Lecture Notes in Mathematics

M.-P. Malliavin (Ed.)

Séminaire d'Algèbre Paul Dubreil

641

Paris 1976-1977 (30ème Année)

Springer

Lecture Notes in Mathematics

For information about Vols. 1–431, please contact your bookseller or Springer-Verlag.

Vol. 432: R. P. Pflug, Holomorphiegebiete, pseudokonvexe Gebiete und das Levi-Problem. VI, 210 Seiten. 1975.

Vol. 433: W. G. Faris, Self-Adjoint Operators. VII, 115 pages. 1975.

Vol. 434: P. Brenner, V. Thomée, and L. B. Wahlbin, Besov Spaces and Applications to Difference Methods for Initial Value Problems. II, 154 pages. 1975.

Vol. 435: C. F. Dunkl and D. E. Ramirez, Representations of Commutative Semitopological Semigroups. VI, 181 pages. 1975.

Vol. 436: L. Auslander and R. Tolimieri, Abelian Harmonic Analysis, Theta Functions and Function Algebras on a Nilmanifold. V, 99 pages. 1975.

Vol. 437: D. W. Masser, Elliptic Functions and Transcendence. XIV, 143 pages. 1975.

Vol. 438: Geometric Topology. Proceedings 1974. Edited by L. C. Glaser and T. B. Rushing. X, 459 pages. 1975.

Vol. 439: K. Ueno, Classification Theory of Algebraic Varieties and Compact Complex Spaces. XIX, 278 pages. 1975

Vol. 440: R. K. Getoor, Markov Processes: Ray Processes and Right Processes. V, 118 pages. 1975.

Vol. 441: N. Jacobson, PI-Algebras. An Introduction. V, 115 pages. 1975.

Vol. 442: C. H. Wilcox, Scattering Theory for the d'Alembert Equation in Exterior Domains. III, 184 pages. 1975.

Vol. 443: M. Lazard, Commutative Formal Groups. II, 236 pages. 1975.

Vol. 444: F. van Oystaeyen, Prime Spectra in Non-Commutative Algebra. V, 128 pages. 1975.

Vol. 445: Model Theory and Topoi. Edited by F. W. Lawvere, C. Maurer, and G. C. Wraith. III, 354 pages. 1975.

Vol. 446: Partial Differential Equations and Related Topics. Proceedings 1974. Edited by J. A. Goldstein. IV, 389 pages. 1975.

Vol. 447: S. Toledo, Tableau Systems for First Order Number Theory and Certain Higher Order Theories. III, 339 pages. 1975.

Vol. 448: Spectral Theory and Differential Equations. Proceedings 1974. Edited by W. N. Everitt. XII, 321 pages. 1975.

Vol. 449: Hyperfunctions and Theoretical Physics. Proceedings 1973. Edited by F. Pham. IV, 218 pages. 1975.

Vol. 450: Algebra and Logic. Proceedings 1974. Edited by J. N. Crossley. VIII, 307 pages. 1975.

Vol. 451: Probabilistic Methods in Differential Equations. Proceedings 1974. Edited by M. A. Pinsky. VII, 162 pages. 1975.

Vol. 452: Combinatorial Mathematics III. Proceedings 1974. Edited by Anne Penfold Street and W. D. Wallis. IX, 233 pages. 1975.

Vol. 453: Logic Colloquium. Symposium on Logic Held at Boston, 1972–73. Edited by R. Parikh. IV, 251 pages. 1975.

Vol. 454: J. Hirschfeld and W. H. Wheeler, Forcing, Arithmetic, Division Rings. VII, 266 pages. 1975.

Vol. 455: H. Kraft, Kommutative algebraische Gruppen und Ringe. III, 163 Seiten. 1975.

Vol. 456: R. M. Fossum, P. A. Griffith, and I. Reiten, Trivial Extensions of Abelian Categories. Homological Algebra of Trivial Extensions of Abelian Categories with Applications to Ring Theory. XI, 122 pages. 1975.

Vol. 457: Fractional Calculus and Its Applications. Proceedings 1974. Edited by B. Ross. VI, 381 pages. 1975.

Vol. 458: P. Walters, Ergodic Theory – Introductory Lectures. VI, 198 pages. 1975.

Vol. 459: Fourier Integral Operators and Partial Differential Equations. Proceedings 1974. Edited by J. Chazarain. VI, 372 pages. 1975.

Vol. 460: O. Loos, Jordan Pairs. XVI, 218 pages. 1975.

Vol. 461: Computational Mechanics. Proceedings 1974. Edited by J. T. Oden. VII, 328 pages. 1975.

Vol. 462: P. Gérardin, Construction de Séries Discrètes p-adiques. »Sur les séries discrètes non ramifiées des groupes réductifs déployés p-adiques«. III, 180 pages. 1975.

Vol. 463: H.-H. Kuo, Gaussian Measures in Banach Spaces. VI, 224 pages. 1975.

Vol. 464: C. Rockland, Hypoellipticity and Eigenvalue Asymptotics. III, 171 pages. 1975.

Vol. 465: Séminaire de Probabilités IX. Proceedings 1973/74. Edité par P. A. Meyer. IV, 589 pages. 1975.

Vol. 466: Non-Commutative Harmonic Analysis. Proceedings 1974. Edited by J. Carmona, J. Dixmier and M. Vergne. VI, 231 pages. 1975.

Vol. 467: M. R. Essén, The Cos $\pi\lambda$ Theorem. With a paper by Christer Borell. VII, 112 pages. 1975.

Vol. 468: Dynamical Systems – Warwick 1974. Proceedings 1973/74. Edited by A. Manning. X, 405 pages. 1975.

Vol. 469: E. Binz, Continuous Convergence on C(X). IX, 140 pages. 1975.

Vol. 470: R. Bowen, Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms. III, 108 pages. 1975.

Vol. 471: R. S. Hamilton, Harmonic Maps of Manifolds with Boundary. III, 168 pages. 1975.

Vol. 472: Probability-Winter School. Proceedings 1975. Edited by Z. Ciesielski, K. Urbanik, and W. A. Woyczyński. VI, 283 pages. 1975.

Vol. 473: D. Burghelea, R. Lashof, and M. Rothenberg, Groups of Automorphisms of Manifolds. (with an appendix by E. Pedersen) VII, 156 pages. 1975.

Vol. 474: Séminaire Pierre Lelong (Analyse) Année 1973/74. Edité par P. Lelong. VI, 182 pages. 1975.

Vol. 475: Répartition Modulo 1. Actes du Colloque de Marseille-Luminy, 4 au 7 Juin 1974. Edité par G. Rauzy. V, 258 pages. 1975. 1975.

Vol. 476: Modular Functions of One Variable IV. Proceedings 1972. Edited by B. J. Birch and W. Kuyk. V, 151 pages. 1975.

Vol. 477: Optimization and Optimal Control. Proceedings 1974. Edited by R. Bulirsch, W. Oettli, and J. Stoer. VII, 294 pages. 1975.

Vol. 478: G. Schober, Univalent Functions – Selected Topics. V, 200 pages. 1975.

Vol. 479: S. D. Fisher and J. W. Jerome, Minimum Norm Extremals in Function Spaces. With Applications to Classical and Modern Analysis. VIII, 209 pages. 1975.

Vol. 480: X. M. Fernique, J. P. Conze et J. Gani, Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour IV–1974. Edité par P.-L. Hennequin. XI, 293 pages. 1975.

Vol. 481: M. de Guzmán, Differentiation of Integrals in R^n. XII, 226 pages. 1975.

Vol. 482: Fonctions de Plusieurs Variables Complexes II. Séminaire François Norguet 1974–1975. IX, 367 pages. 1975.

Vol. 483: R. D. M. Accola, Riemann Surfaces, Theta Functions, and Abelian Automorphisms Groups. III, 105 pages. 1975.

Vol. 484: Differential Topology and Geometry. Proceedings 1974. Edited by G. P. Joubert, R. P. Moussu, and R. H. Roussarie. IX, 287 pages. 1975.

Vol. 485: J. Diestel, Geometry of Banach Spaces – Selected Topics. XI, 282 pages. 1975.

Vol. 486: S. Stratila and D. Voiculescu, Representations of AF-Algebras and of the Group U (∞). IX, 169 pages. 1975.

Vol. 487: H. M. Reimann und T. Rychener, Funktionen beschränkter mittlerer Oszillation. VI, 141 Seiten. 1975.

Vol. 488: Representations of Algebras, Ottawa 1974. Proceedings 1974. Edited by V. Dlab and P. Gabriel. XII, 378 pages. 1975.

continuation on page 371

Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

641

Séminaire d'Algèbre Paul Dubreil

Proceedings, Paris 1976–1977
(30ème Année)

Edité par M. P. Malliavin

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York 1978

Editor
Marie-Paule Malliavin
Université Pierre et Marie Curie
10, rue Saint Louis en l'Ile
75004 Paris, France

AMS Subject Classifications (1970): 12H20, 13D20, 13F20, 13G05, 13H20, 14K20, 16L20, 16A02, 16A26, 16A46, 16A60, 16A62, 16A66 16A72, 17B20, 18H15, 20C20, 22E20

ISBN 3-540-08665-X Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
ISBN 0-387-08665-X Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin

Printed in Germany

Printing and binding: Beltz Offsetdruck, Hemsbach/Bergstr.
2141/3140-543210

Liste des Auteurs

TABLE DES MATIERES

DECOMPOSITION OF EXTERIOR AND SYMMETRIC POWERS OF INDECOMPOSABLE $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-MODULES IN CHARACTERISTIC p AND RELATIONS TO INVARIANTS

Gert Almkvist (Lund) and
Robert Fossum (Copenhagen/Urbana).

This survey represents the extent of our work on the decomposition of exterior and symmetric powers of indecomposable $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$-modules in characteristic p, the relations of these decompositions to invariant theory, relations to combinatorial theory and suggestions for future investigation. It is a neighborhood of a lecture given by the second author at Séminaire d'Algèbre Paul Dubreil at l'Institut Henri Poincaré in January, 1977. Therefore it contains many more results and complete details of proofs.

The research was started when the second author, together with Griffith tried to prove that the action of $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ on the power series ring $k[[X_0,\ldots,X_n]]$, with char k=p gave a factorial ring of invariants. Because the decomposition of the graded components could be easily calculated (see chapter III,3), the class group could be calculated and then it was shown to be zero. Thus it was assumed that similar techniques could the used in general. But first the decompositions, that is the structure of the homogeneous components should be calculated. The table in III.4 was calculated by hand (over many cups of coffee in Treno's in Urbana) and did not help to discover the general pattern. In a letter to Almkvist in late 1975, Fossum posed the problem of decomposition. Immediately Almkvist solved the problem, using the fact that the representation ring is a

λ-ring (which it isn't). But enough of the techniques of λ-ring theory can be used to push through the decompositions for $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. In the summer of 1976 Stanley wrote to Fossum that the decompositions seemed to involve coefficients of Gaussian polynomials. This suggested further comparisons, which resulted in the general Valby Bodega theorem which allows the change of basis in the representation ring and thus permits the calculation of the number of components of a given dimension that appear in a decomposition from the coefficients of the Gaussian polynomials. Further months of calculations by the first author has led to the many interesting relations centered on the Hilbert series of the ring of invariants.

In what follows we give an outline of the contents of these notes, chapter by chapter.

Chapter I. In this chapter the basic concepts are introduced. The indecomposable $k.\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$-modules are determined (here, as always, k is a field of characteristic $p > 0$) and the representation ring $R\ \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ is defined and studied. In our mind the most usefuld result in this chapter is the Valby Bodega theorem (Proposition I.1.7.) that relates decompositions to Adam's operations (see also Problem VI.3.9) in the representation ring $R\ \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Also the several isomorphic representations are given in the second section.

Chapter II. This is the chapter that contains what we need from the classical theory of representations of the symmetric group. There is a meta-theorem (Proposition II.2.3) that relates elements in the representation ring to exact sequences, and this is a key in going from characteristic zero to characteristic $p > 0$. We discuss λ-rings and the various families of symmetric functions. In the last section we define and give what properties are needed of the homogeneous Gaussian polynomials.

Chapter III. This is the main chapter, in which we demonstrate the decompositions of the exterior and symmetric powers of the indecomposable Z/pZ-modules. In chapter I we defined generalized binomial coefficients of indecomposable $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-modules . In this chapter we show :

$$\Lambda^r(V_n) = \binom{V_n}{V_r}$$

and $S^r(V_{n+1}) = \binom{V_{n+r}}{V_r}$ for $0 \leqslant r+n+1 \leqslant p$

where V_n is an indecomposable $k\,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-module of dimension n. We include a table that illustrates the decompositions.

Chapter IV. In this chapter we repeat, for the reader's benefit, the calculations that show that the rings of invariants are generally not Cohen-Macaulay. This involves calculation of a principal homogeneous bundle.

Chapter V. This chapter, the longest and most difficult, is devoted to the study of the dimension of the homogeneous components of the rings of invariants. We first define the Hilbert series, provide some examples and begin the calculations . Then the series "for large p" are discussed. The Hilbert series for small dimensional representations are calculated, as well as those for large dimensional representations. In one section Fourier series and integrals are used to express these Hilbert series. Results concerning counting of partitions are obtained. And counter-examples to a conjecture of Stanley concerning the Hilbert series of factorial rings are mentioned.

Chapter VI. Examples and problems conclude this survey.

A list of notation used precedes the list of references. However we list here those notations that are not introduced. Always p denotes a prime integer. As almost all theorems are true for all primes, we do not distinguish between the even and odd prime integers. We just note here that if a theorem is not true for p=2, it is quite obvious The field k will be understood to have characteristic p.

Throughout the paper we denote the cyclic group $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ by ν_{p^m} with a generator σ , and written multiplicatively. The other notation, if not standard, is found in the list of notation.

References to a result within a chapter are of the form m.n ; $m, n \in \mathbb{N}$ while a reference in chapter III to result m.n in chapter I is written I.m.n. The bibliography or list of references is arranged alphabetically by author and then by year of publication. References are of the form [Gauss (1777)] to indicate the author and the year of publication. If there are two papers in the same year they are indicated by letters 1777 a, 1777 b, etc.

We would like to thank all of those who have contributed in one way or another to this work. A. Melin, T. Claesson, P. Griffith, H-B. Foxby, R. Stanley, H. Diamond, C. Curtis and I. Reiner have given hints and suggestions along the way. Many people have listened to various versions of some of this work and have offered suggestions that have been helpful. Also Københavns Universitets matematisk institut was kind enough to invite Fossum to Copenhagen for one year at a time when the work in this area was most active, and therefore he was able to communicate very efficiently with Almkvist We both thank our respective university for encouragement (Lund and Illinois). Fossum has been supported during the summers by the United States National Science Foundation. And a portion of his visit to Denmark was supported by the Danish Statens Naturvidenskabelige Forskningsråd. He appreciates this support.

Finally we wish to thank Professor M.P. Malliavin who suggested this survey and kept asking for a manuscript. Thus we had to stop finding new Hilbert series and decompositions and had to start writing what we know.

This material is connected to many diverse areas of mathematics.... many with which we are not familiar. For example it has been suggested, and there are many indications that it might be true, that there is a close connection between these decompositions and representations of the symmetric groups in characteristic $p > 0$. We apologize to those whose results we have inadvertently rediscovered But we are also interested in learning of other work that is closely connected with these results.

Table of contents

Gert Almkvist (Lund/Sverige) Robert Fossum (København/Danmark)

Norges grunnlovsdag 1977

"It you can't stand your analyst, see your local algebraist" GA 1976.

I. INDECOMPOSABLE Z/p^mZ-MODULES AND THE REPRESENTATION RING

1. Indecomposable representations and the representation ring.

A representation of ν_{p^m} over k is a finite dimensional vector space V over k together with a group homomorphism $\nu_{p^m} \longrightarrow GL_k(V)$. This is the same as to say that V is a finitely generated module over the group ring $k\nu_{p^m}$. The representation is *indecomposable* if it is not the direct sum of two $k\nu_{p^m}$-modules. It is *irreducible* if there is no proper $k\nu_{p^m}$-submodule.

Proposition 1.1. a) *the group ring* $k\nu_{p^m} \cong k[T]/(T-1)^{p^m}\, k[T]$.

b) *If* V *is an indecomposable representation, then* $V \cong k[T]/(T-1)^n\, k[T]$ *where* $n = \dim_k V$, $1 \leq n \leq p^m$, *and each* $V_n := k\,[T]/\,(T-1)^n\, k\,[T]$ *is indecomposable*.

c) *The indecomposable* V_{p^m} *is both free and* *injective as* a $k\nu_p m$-*module*.

d) *The only irreducible* $k\nu_p m$-*module* (up to isomorphism) *is* $V_1 \cong k$.

Proof. a) The group ring $k\nu_p m$ is generated as a k-algebra by σ. Define $k[T] \longrightarrow k\nu_p m$ by extending $T \longrightarrow \sigma$. Since char $k = p$ and $\sigma^{p^m} = 1$, the element $(T-1)^{p^m}$ is in the kernel. Hence there is a surjection $k[T]/(T-1)^{p^m} k[T] \longrightarrow k\nu_p m$. Comparing dimensions over k yields that it is an isomorphism.

c) The ring $k[T]/(T-1)^{p^m} k[T]$ is a local quasi-frobenius artin k-algebra with maximal ideal generated by the image of $T-1$. Hence $V_p m := k\nu_p m$ is free (obvious) and injective.

d) It is clear that $k \cong k[T]/(T-1)\, k[T]$ is irreducible as a $k\nu_p m$-module. Suppose V is a finite dimensional $k\nu_p m$-module. Then the socle of V, by definition $\mathrm{Soc}(V) := \mathrm{Hom}_{k\nu_p m}(k,V)$, is a $k\nu_p m$-submodule. If V is irreducible, then $V = \mathrm{Soc}(V)$. But $\mathrm{Soc}(V) = (\dim_k \mathrm{Soc}(V)).V_1$ as $k\nu_p m$-modules. Hence $\dim_k \mathrm{Soc}(V) = \dim_k V = 1$.

b) We prove slightly more than b). In fact we prove that a $k\nu_p m$-module V decomposes into as many indecomposables as $\dim_k \mathrm{Soc}(V)$. First, since $k\nu_p m$ is a local ring and artinian, any cyclic module (i.e. one of the form $k\nu_p m/\mathfrak{a}$) is indecomposable. Each ideal is of the form $(T-1)^n\, k\nu_p m$ and hence each V_n is indecomposable. Now $\mathrm{Soc}(V_n) = (T-1)^{n-1}\, V_n$ and is one dimensional. As $\mathrm{Soc}(V) \longrightarrow V$ is essential whenever V is of finite type, the injective enveloppe of V is determined by the injective enveloppe of its socle. As $V_1 \cong \mathrm{Soc}(k\nu_p m) \hookrightarrow k\nu_p m$ is essential and $k\nu_p m$ is injective and indecomposable, it is seen that $E(V_1) \cong V_p m$.

Suppose there is an injection $V_1 \hookrightarrow V$. Let $V(V_1)$ denote the maximal essential extension of V_1 in V. Then the claim is that $V(V_1)$ is a direct summand of V. Suppose W is maximal in V with respect to the property that $W \cap V(V_1) = 0$. (This is the same as to say that $W \cap V_1 = 0$). Then the composition $V(V_1) \hookrightarrow V \longrightarrow V/W$ is an injection. Furthermore it is essential, since $\mathrm{Soc}(V/W) \cong V_1$. By the maximality of $V(V_1)$ it is a surjection. Hence $V(V_1)$ is a direct summand.

As a corollary, the module V is indecomposable if and only if $\mathrm{Soc}(V) \cong V_1$. But then there is an embedding $V \longrightarrow k\nu_p m = E(V_1)$. Hence $V = (T-1)^r\, k\nu_p m$. But $(T-1)^r\, k\nu_p m \cong V_{p^m - r}$.

QED.

In the last paragraph above we have used the fact that the k-linear dual of a $\nu_p m$-representation is isomorphic to the original representation. For as $\nu_p m$-modules there is an isomorphism

$$k\nu_p m \cong \mathrm{Hom}_k(k\nu_p m\ ,\ k)$$

and hence

$$\mathrm{Hom}_{k\nu_p m}\ (V,\ k\nu_p m) \cong \mathrm{Hom}_k(V,k)$$

for each $k\nu_p m$-module V. Then it follows that

$$\mathrm{Hom}_k(V_n,k) \cong V_n$$

as $k\nu_p m$-modules.

The <u>representation ring</u> of $k\nu_p m$ is defined to be the free abelian group on the isomorphism classes $[V]$ of $k\nu_p m$-modules of finite type, modulo the relations $[V] = [V'] + [V'']$ provided $V \cong V' \oplus V''$. Denote this abelian group by $Rk\nu_p m$.

<u>Corollary 1.2.</u> : <u>The abelian group</u> $Rk\nu_p m$ <u>is free on the elements</u> $V_1,\ldots,V_{p^m}$.

QED

The ring structure in $Rk\nu_p m$ is induced by $\otimes_k$. So $V.W ;= V \otimes_k W$. (We omit any kind of symbols to denote the classes of a representation V in $Rk\nu_p m$. And we interchange freely the notation V.W and $V \otimes_k W$ for the product. This should cause no confusion. Likwise V+W means $V \oplus W$ as modules or "$[V] + [W]$" in $Rk\nu_p m$).

<u>Proposition 1.3.</u> : <u>As a</u> $\mathbb{Z}$<u>-algebra, the ring</u> $Rk\nu_p m$ <u>is generated by</u> $V_{p^0+1}\ ,\ V_{p^1+1},\ V_{p^2+1},\ldots,V_{p^{m-1}+1}$.

A proof of this proposition depends upon obtaining the decomposition of the tensor products $V_\ell \otimes V_m$. This is not done in this paper. However the multiplication table below, which is found in [Rally (1969)] permits us to demonstrate the proposition.

(The history of the decomposition of $V_\ell \otimes V_m$ is not clear to us. It seems that Littlewood knew the decomposition constants. Also Green, Srinivasan, and Rally have discussed them. That the V_{p^i+1} generate the representation algebra is explicity mentioned in [Srinivasan (1964)] . See also the papers by Renaud.)

MULTIPLICATION TABLE

If $s > p^k$, then write $s = s \cdot p^k + s_1$ with $o \leq s_1 < p^k$ by Euclid's algorithm. The following decompositions hold for each k, $0 \leq k \leq m-1$

I a) If $s \leq p^k$, then

$$\boxed{V_{p^k-1} \otimes V_s = (s-1)\, V_{p^k} \oplus V_{p^k-s}}$$

b) If $s > p^k$, then

$$\boxed{V_{p^k-1} \otimes V_s = (s_1-1)\, V_{p^k+s-s_1} \oplus V_{p^k+s-2s_1} \oplus (p^k-s_1-1)\, V_{s-s_1}}$$

II a) If $s \leq p^k$, then

$$\boxed{V_{p^k+1} \otimes V_s = V_{p^k+s} \oplus (s-1)\, V_{p^k}}$$

b) If $p^k < s < (p-1)\, p^k$, then

$$\boxed{V_{p^k+1} \otimes V_s = V_{p^k+s} \oplus (s_1-1)\, V_{p^k+s-s_1} \oplus V_{p^k+s-2s_1} \oplus (p^k-s_1-1) V_{s-s_1} \oplus V_{s-p^k}}$$

c) If $(p-1)p^k \leq s \leq p^{k+1}$, then

$$\boxed{V_{p^k+1} \otimes V_s = (s_1+1)\, V_{p^{k+1}} \oplus (p^k-s_1-1)\, V_{s-s_1} \oplus V_{s-p^k}}$$

It is seen that the multiplication is independent of the field, so in the future we write $R\nu_{p^m}$ for this representation ring.

In order to facilitate computations it is convenient to introduce in $R\nu_{p^m}$ the elements χ_i for $0 \leq i \leq m-1$ defined by $\chi_o := V_2 = V_{p^o+1}$ and for $i > 0$, $\chi_i = V_{p^i+1} - V_{p^i-1}$.

For each i adjoin to the ring $R\nu_{p^m}$ the elements μ_i which satisfy the equations

$$1 + \chi_i t + t^2 = (1+\mu_i t)(1+\mu_i^{-1} t).$$

Then $\chi_i = \mu_i + \mu_i^{-1}$. It follows from the multiplication table that $\chi_i^2 = V_{2p^i+1} - V_{2p^i-1} + 2$. In general we get

(1.4.) $\quad \mu_i^s + \mu_i^{-s} = V_{sp^i+1} - V_{sp^i-1} \qquad$ for $o < s < p$.

Since
$$\chi_i^s = \sum_{\nu=0}^{s} \binom{s}{\nu} \mu_i^{s-2\nu} = \sum_{s\geq 2\nu\geq 0} \binom{s}{\nu} (\mu_i^{s-2\nu} + \mu_i^{-s+2\nu})$$

we get
$$\chi_i^s = \sum_{s\geq 2\nu\geq 0} \binom{s}{\nu} (V_{\nu p^{i+1}} - V_{\nu p^{i-1}}) \ .$$

The inversion of this formula gives

$$(1.5.) \qquad V_{sp^{i+1}} - V_{sp^{i-1}} = \sum_{s\geq 2\nu\geq 0} (-1)^\nu \binom{s-\nu}{\nu} \chi_i^{s-2\nu}$$

(where we set $\chi_i^o := 2$)

Now define $W_j := \sum_{p-1\geq 2\nu\geq 0} (-1)^\nu \binom{p-1-\nu}{\nu} X_j^{p-1-2\nu}$

(which, by (1.5.) is $V_{(p-1)p^{i+1}} - V_{(p-1)p^{i-1}}$ when $X_j = \chi_j$) and

$$U_j := \sum_{p-1\geq 2\nu\geq 0} (-1)^\nu \left\{\binom{p-1-\nu}{\nu} X_{j-1}^{p-1-2\nu} - \binom{p-2-\nu}{\nu} X_{j-1}^{p-2-2\nu}\right\} .$$

In the polynomial ring $\mathbb{Z}[X_o,\dots,X_m,\dots]$ define

$$F_j(X_o,\dots,X_j) = (X_j - 2U_j)\ W_j$$

(with $U_o = 1$).

It is not difficult to establish that

$$F_j(2,\ X_o,\dots,X_{j-1}) = F_{j-1}(X_o,\dots,X_{j-1})$$

and

$$F_o(X_o) = (X_o-2)\ W_o.$$

We can then state a result that implies Proposition 1.3.

<u>Proposition 1.6.</u> : <u>The map</u> $\mathbb{Z}[X_o,\dots,X_{m-1}] \longrightarrow R\nu_{p^m}$ <u>induced by</u> $X_i \longmapsto \chi_i$ <u>induces an isomorphism</u>

$$\mathbb{Z}[X_o,\dots,X_{m-1}]/(F_o,\ F_1,\dots,F_{m-1}) \xrightarrow{\ \sim\ } R\nu_{p^m} .$$

<u>Proof</u> : It is easy to check that both rings have the same rank as modules. Hence it is enough to show that the map is surjective. But this follows (say by induction on lots of things, for example m) from the formulas in the mutiplication table.

QED

For future reference we need a few other relations. The first of these gives the basis relation beteween the $\mu_o^s + \mu_o^{-s}$ for arbitrary s and the V_i, $0 \leq i \leq p$. (The name is after the place where the result was proved).

<u>Proposition 1.7.</u> (Valby.Bodega's Theorem). <u>Let</u> $b_o + \sum_{j=1}^{N} b_j(\mu_o^j + \mu_o^{-j})$ <u>be an element in</u> $R\nu_p$. <u>In</u> $\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$ <u>consider the Laurent polynomial</u> $f(t) = \sum_{j=-N}^{N} b_j t^j$, <u>where</u> $b_{-j} = b_j$ <u>for all</u> j. <u>Then</u>

$$b_o + \sum_{j=1}^{N} b_j (\mu_o^j + \mu_o^{-j}) = \sum_{\nu=1}^{p} d_\nu V_\nu$$

<u>where the coefficients</u> d_ν <u>are determined as follows</u> :

<u>Set</u> $g = \left[\frac{N+1}{2p}\right]$, <u>the greatest integer in</u> $\frac{N+1}{2p}$ <u>and expand the function</u>

$$(t-t^{-1})\, t^{-2gp}\, (1 - t^{2p})^{-1} f(t) = \sum_{\nu \geq -\infty} c_\nu t^\nu$$

<u>in the ring</u> $\mathbb{Z}[[t]][t^{-1}]$. <u>Then</u>

1) <u>The integer</u> $d_\nu = c_\nu$ <u>for</u> $1 \leq \nu \leq p-1$ <u>and</u>

2) $d_p = p^{-1}\left\{b_o + 2\sum_{j=1}^{N} b_j - \sum_{j=1}^{p-1} j c_j\right\}$.

<u>Proof</u> : For $1 \leq s \leq p-1$ we have

$$\mu_o^s + \mu_o^{-s} = V_{s+1} - V_{s-1}$$

while $\mu_o^p + \mu_o^{-p} = (\mu_o^{p-1} + \mu_o^{-(p-1)})(\mu_o + \mu_o^{-1}) - (\mu_o^{p-2} + \mu_o^{-(p-2)})$.

Hence $\mu_o^p + \mu_o^{-p} = (V_p - V_{p-2})\, V_2 - (V_{p-1} - V_{p-3})$

$$= 2\,(V_p - V_{p-1}).$$

By induction one gets the formula

$$\mu_o^{2kp+\ell} + \mu_o^{-(2kp+\ell)} = \mu_o^\ell + \mu_o^{-\ell} \tag{1.8.}$$

for all ℓ with $0 \leq \ell \leq 2p$.

For suppose we have this formula for some k, ℓ. Then multiply by $\mu_o + \mu_o^{-1}$ to get

$$\mu_o^{2kp+\ell+1} + \mu_o^{-(2kp+\ell+1)} + \mu_o^{2kp+\ell-1} + \mu_o^{-(2kp+\ell-1)}$$

$$= \mu_o^{\ell+1} + \mu_o^{-(\ell+1)} + \mu_o^{\ell-1} + \mu_o^{-(\ell-1)}.$$

If $o < \ell$, then the two terms on the right of each side of the equality sign are equal, by assumption. If $\ell = 0$, then $2kp-1 = 2(k-1)p + (2p-1)$. So the left hand side is $\mu_o^{2kp+1} + \mu_o^{-(2kp+1)} + \mu_o^{2p-1} + \mu_o^{-(2p-1)}$ while the right hand side is $2(\mu_o + \mu_o^{-1})$. But $\mu_o^{2p-1} + \mu_o^{-(2p-1)} = \mu_o + \mu_o^{-1}$, since in general, $\mu_o^{p+s} + \mu_o^{-(p+s)} = \mu_o^{p-s} + \mu_o^{-(p-s)}$ for $o \leq s \leq p$.

Now write $N = 2Kp + L$ with $0 \leq L < 2p$. Then

$$b_o + \sum_{j=1}^{N} b_j(\mu_o^j + \mu_o^{-j}) = b_o + b_1(\mu_o + \mu_o^{-1}) + \ldots + b_{2p-1}(\mu_o^{2p-1} + \mu_o^{-(2p-1)})$$

$$+ \sum_{\substack{o \leq \ell \leq 2p-1 \\ o \leq k \leq K}} b_{2kp+\ell}(\mu_o^{\ell} + \mu_o^{-\ell})$$

(where it is assumed that $b_j = 0$ for $j > N$). We continue by rearranging terms to get

$$b_o + b_1(\mu_o+\mu_o^{-1}) + \ldots + b_{2p-1}(\mu_o^{2p-1} + \mu_o^{-(2p-1)}) + \sum_{\ell=o}^{2p-1} \left(\sum_{k=1}^{K} b_{2kp+\ell}\right)(\mu_o^{\ell} + \mu_o^{-\ell})$$

$$= \left(\frac{1}{2} b_o + \sum_{k=1}^{K} b_{2kp}\right)(\mu_o^{o} + \mu_o^{-o})$$

$$+ \sum_{\ell=1}^{2p-1} \left(\sum_{k=o}^{K} b_{2kp+\ell}\right)(\mu_o^{\ell} + \mu_o^{-\ell}) .$$

Using the relations

$$\mu_o^{\ell} + \mu_o^{-\ell} = V_{\ell+1} - V_{\ell-1} \quad \text{for} \quad 1 \leq \ell \leq p-1$$

$$\mu_o^{p} + \mu_o^{-p} = 2(V_p - V_{p-1})$$

and

$$\mu_o^{p+\ell} + \mu_o^{-(p+\ell)} = V_{p-\ell+1} - V_{p-\ell-1} \quad \text{for} \quad 1 \leq \ell \leq p-2$$

and finally

$$\mu_o^{2p-1} + \mu_o^{-(2p-1)} = V_2$$

we can write this as

$$\left(b_o + 2\sum_{k=1}^{K} b_{2kp}\right) + \sum_{\ell=1}^{p-1} \left(\sum_{k=o}^{K} b_{2kp+\ell}\right)(V_{\ell+1} - V_{\ell-1})$$

$$+ 2\sum_{k=o}^{K} b_{2kp+p}(V_p - V_{p-1}) + \sum_{\ell=1}^{p-1} \left(\sum_{k=o}^{K} b_{2kp+p+\ell}\right)(V_{p-\ell+1} - V_{p-\ell-1})$$

$$= \sum_{\nu=1}^{p} d_\nu V_\nu \quad \text{where}$$

$$d_{\nu+1} = \sum_{k=o}^{K} \left\{(b_{2kp+\nu} - b_{2kp+\nu+2}) + (b_{2(k+1)p-\nu} - b_{2(k+1)p-(\nu+2)})\right\}$$

for $o \leqslant \nu \leqslant p-2$ and

$$d_p = \sum_{k=o}^{K} \left(b_{(2k+1)p-1} + 2b_{(2k+1)p} + b_{(2k+1)p+1}\right).$$

What remains is to show that these are exactly the coefficients of the Laurent series as claimed. Now

$$f(t) = \sum_{j=-N}^{N} b_j \; t^j \quad \text{and hence}$$

$$t^{-1} f(t) = \sum_{j=-N}^{N} b_j \; t^{j-1} = \sum_{j=-(N+1)}^{N-1} b_{j+1} \; t^j \quad \text{and}$$

$$t \; f(t) = \sum_{j=-N+1}^{N+1} b_{j-1} \; t^j \quad . \text{ Thus}$$

$$t \; f(t) - t^{-1} f(t) = - b_{-N} t^{-(N+1)} - b_{-(N+1)} t^{-N} + \sum_{j=-(N-1)}^{N-1} (b_{j-1} - b_{j+1}) \; t^j$$

$$+ b_{N-1} \; t^N + b_N \; t^{N+1} \; .$$

Since $b_{-N-1} = b_{N+1} = b_{-N-2} = b_{N+2} = 0$, we can write this as

$$(t-t^1) \; f(t) = \sum_{j=-(N+1)}^{N+1} (b_{j-1} - b_{j+1}) \; t^j.$$

Now consider, for $g = \left[\frac{N+1}{2p}\right]$,the expansion

$$t^{-2gp}(1 - t^{2p})^{-1} \; (t-t^{-1}) \; f(t) = \left(\sum_{j=-g}^{\infty} t^{2jp}\right)\left(\sum_{j=-(N+1)}^{N+1} (b_{j-1} - b_{j+1}) t^j\right)$$

$$= \sum_{k=-g}^{\infty} \left(\sum_{\ell=-(N+1)}^{N+1} (b_{\ell-1} - b_{\ell+1}) \; t^{2kp+\ell}\right) \; .$$

To show 1) we must consider the coefficients of t^j for $1 \leqslant j \leqslant p-1$ in this series. Since in general

$$\sum_{k=-g}^{\infty} \left(\sum_{\ell} c_\ell \, t^{2kp+\ell}\right) = \sum_{j \geq -\infty} \left(\sum_{k=o}^{\infty} c_{j+2gp-2kp}\right) t^j$$

we want the numbers $\sum_{k \geq o} c_{j+2gp-2kp}$ where $c_\ell = b_\ell - b_{\ell+1}$. So we want to evaluate

$$\sum_{k \geq o} \left(b_{j+(2g-2k)p-1} - b_{j+(2g-2k)p+1}\right)$$

where $b_{-n} = b_n$ and $b_n = o$ for $|n| \geq N$.
But writing this out and using the definition of g, we get

$$\sum_{k \geq o} \left(b_{j+2(g-k)p-1} - b_{j+2(g-k)+1}\right) = \sum_{k=o}^{g} \left\{(b_{2kp+\ell-1} - b_{2kp+\ell+1}) + (b_{2(k+1)p-(\ell-1)} - b_{2(k+1)p-\ell-1})\right\}$$

which is what we want for the coefficient.

To show 2) we consider the augmentation $R\nu_p \xrightarrow{\dim} \mathbb{Z}$ induced by $V \longrightarrow \dim_k V$. It is a ring homomorphism. It extends to a map $R\nu_p[\mu_o] \longrightarrow \mathbb{Z}$ with $\dim(\mu_o) = 1$ (since $\mu_o^2 - \chi_o\mu + 1 = 0$). Hence $\dim(\mu_o^\ell + \mu_o^{-\ell}) = 2$.

Now $\dim(b_o + \sum_{j=1}^{N} b_j\,(\mu_o^j + \mu_o^{-j})) = b_o + 2\sum_{j=1}^{N} b_j$, while

$$\dim\left(\sum_{\nu=1}^{p} d_\nu V_\nu\right) = \sum_{\nu=1}^{p} \nu\, d_\nu .$$

Therefore $\sum_{\nu=1}^{p} \nu d_\nu = b_o + 2\sum_{j=1}^{N} b_j$ from which the formula for d_p follows.

QED

Two other relations are needed.

<u>Lemma 1.8.</u> : a) <u>For each</u> n <u>with</u> $1 \leq n \leq p$, <u>the element</u> $\mu_o^n - \mu_o^{-n} = (\mu_o - \mu_o^{-1}).V_n$ in $R\nu_p[\mu_o]$.

b) <u>If</u> r, s <u>are integers such that</u> $rs \leq p$, <u>then there is a unique element</u> $V_{rs/r}$ <u>such that</u> $V_{rs} = V_r . V_{rs/r}$ <u>in</u> $R\nu_p$.

<u>Proof</u>. For a) consider the factorization $\mu_o^n - \mu_o^{-n} = (\mu_o - \mu_o^{-1})(\mu_o^{n-1} + \mu_o^{n-3} + \ldots + \mu_o^{-(n-1)})$. The second term is

just V_n. For b) consider the factorization
$\mu_o^{rs} - \mu_o^{-rs} = (\mu_o^r - \mu_o^{-r})(\mu_o^{r(s-1)} + \mu_o^{r(s-3)} + \ldots + \mu_o^{-r(s-1)})$. Then we get
$V_{rs} = V_r\,(\mu_o^{r(s-1)} + \mu_o^{-r(s-1)} + \mu_o^{r(s-3)} + \mu_o^{-r(s-3)} + \ldots)$.
Hence

$$V_{rs/r} = (V_{r(s-1)+1} - V_{r(s-1)-1}) + (V_{r(s-3)+1} - V_{r(s-3)-1}) + \ldots$$

QED.

Remark 1.9. On $R\nu_p$ define elements W_n for all n by $(\mu_o - \mu_o^{-1})\, W_n = \mu_o^{n^p} - \mu_o^{-n}$. Then for $o < n \leq p$ we have $W_n = V_n$. If $1 \leq -n \leq p$, then $W_n = -V_{-n}$. The statement b) above can then be generalized. So for example $W_{p+1} = 2V_p - V_{p-1}$, $W_{p+2} = 2V_p - V_{p-2}$, etc. If $s \mid p+2$, for example, then W_s divides (uniquely) W_{p+2}.

This allows us to define, for integers m,n, the generelized binomial coefficients

$$\binom{W_m}{W_n} := \frac{W_m \cdot W_{m-1} \cdots W_{m-n+1}}{W_n \cdot W_{n-1} \cdots W_1}$$

in $R\nu_p$.

We now digress slighty to consider the maps on the representation algebras induced by the homomorphisms $\nu_p m \longrightarrow \nu_p n$.

Suppose $m \geq n$ and $\nu_p m \longrightarrow \nu_p n$ is the usual surjection. We get a homomorphism (surjection) $k\nu_p m \longrightarrow k\nu_p n$ whose kernel is generated by the image of $(T-1)^{p^n}$. This yields an injection $R\nu_p n \longrightarrow R\nu_p m$ which is just

$$R\nu_p n = \mathbb{Z}[\chi_o, \chi_1, \ldots, \chi_{n-1}] \hookrightarrow \mathbb{Z}[\chi_o, \chi_1, \ldots, \chi_{n-1}, \chi_n, \ldots, \chi_{m-1}] = R\nu_p m$$

That is, an (indecomposable) $\nu_p m$-module is considered as a $\nu_p m$-module.

More interesting is the case $m < n$ and we consider the injection $\nu_p m \hookrightarrow \nu_p n$ whose cokernel is $\nu_p n-m$. Let σ generate $\nu_p n$ and τ generate $\nu_p m$. Then the map $F_{n,m} : \nu_p m \longrightarrow \nu_p n$ is given by $F(\tau) = \sigma^{p^{n-m}}$. Let $k = \mathbb{F}_p$ so that the Frobenius map $F : k \longrightarrow k$ given by $F(\chi) = \chi^p$ is the identity. The map on k-algebras $k\nu_p m \longrightarrow k\nu_p n$ induced is just $F^{(n-m)}(\chi) = \chi^{p^{n-m}}$, the $(n-m)^{th}$ iteration of Frobenius in the sense that $k\nu_p m = k[T]/(T-1)^{p^m}$ and

$k\nu_p n = k[S]/(S-1)^{p^n}$ and $F(T) = S^{p^{n-m}}$. It is not difficult to show (for example by induction on $n-m$) that the induced map

$$RF^{(n-m)} : R\nu_p n \longrightarrow R\nu_p m$$

is given by $RF^{(n-m)}(\chi_i) = 2$ if $0 \leq i \leq n-m-1$ and $RF^{(n-m)}(\chi_i) = \chi_{i-n+m}$ for $n-m \leq i \leq n-1$.

The cokernel of $\nu_p m \longrightarrow \nu_p n$ is $\nu_p n-m$. We get $R\nu_p n-m \longrightarrow R\nu_p n \xrightarrow{RF^{(n-m)}} R\nu_p m$ whose composition is the augmentation map $\dim : R\nu_p n-m \longrightarrow \mathbb{Z} \hookrightarrow R\nu_p m$. We notice, using the polynomials in Proposition 1.6, that (in case $m=n-1$).

$$F_j(X_0, X_1, \ldots, X_j) = F_{j+1}(2, X_0, X_1, \ldots, X_j).$$

2. Bases for representations.

For future use we record here several different methods for writing the action of σ on V_{n+1} (in case $n+1 \leq p$).

a) The regular representation : We know that $V_{p^m} = k\nu_{p^m}$, so we can take as basis the elements $u_i = \sigma^i$ $0 \leq i \leq p^m-1$. Then $\sigma \cdot u_i = u_{i+1}$, the subscript to be read modulo p^m. The matrix is

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & & \vdots & \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \\ 0 & 0 & & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) The Jordan form : As $V_{n+1} = k\nu_p m/(\sigma-1)^{n+1}$, we can take as bases $e_j = (\sigma-1)^{n-j}$. Then
$(\sigma-1)e_j = (\sigma-1)^{n-j+1} = (\sigma-1)^{n-(j-1)} = e_{j-1}$. Hence
$\sigma \cdot e_j = e_j + e_{j-1}$ for $n \geq j \geq 1$ while $\sigma e_o = e_o$. The matrix is

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) The SL(2) representation. For $n+1 \leq p$, we know (See III. 2.8) that $V_{n+1} \cong S^n(V_2)$. A basis for $S^n(V_2)$ is $e_1^n, e_1^{n-1}e_o, \ldots, e_1 e_o^{n-1}, e_o^n$. Lable these elements $f_n, f_{n-1}, \ldots, f_o$.

Then $\sigma(e_1^j\, e_o^{n-j}) = (e_1+e_o)^j\, e_o^{n-j} = \sum_{\nu=o}^{j} \binom{j}{\nu} e_1^{j-\nu}\, e_o^{\nu+n-j} =$

$= \sum_{\nu=o}^{j} \binom{j}{\nu} f_{j-\nu}$. So we get $\sigma(f_j) = \sum_{\nu=o}^{j} \binom{j}{\nu} f_{j-\nu}$. The matrix is

$$\begin{pmatrix} \binom{n}{o} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \binom{n}{1} & \binom{n-1}{o} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \binom{n}{2} & \binom{n-1}{1} & \binom{n-2}{o} & \cdots & 0 & 0 \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & 1 & 0 \\ \binom{n}{n} & \binom{n-1}{n-1} & \binom{n-2}{n-2} & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

d) <u>The contragredient representation</u> : if V in a representation, then $\mathrm{Hom}_k(V,k) = V'$ is also a representation, with

$$(\sigma f)(v) = f(\sigma^{-1} v).$$

So in each case above we get the inverse transpose matrix.

II. <u>REPRESENTATIONS OF THE SYMMETRIC GROUP IN CHARACTERISTIC 0</u> .

In this section we review the theory of representations of the symmetric group over a field of characteristic zero to the extent that we will use the results in characteristic $p > o$.

1. <u>Partitions, representations and symmetric functions</u>.

Let r be a non-negative integer. The group of permutations on r letters will be denoted by S_r. Let Q be a field of characteristic 0. We discuss representations of S_r over Q, a representation being assumed to be finite dimensional.

<u>A partition</u> of r is a sequence $I_1 \geq I_2 \geq \ldots \geq I_n \geq 0$ of integers such that $I_1 + I_2 + \ldots + I_n = r$. We write this sequence $\underline{\underline{I}} = (I_1,\ldots,I_n)$. Also $|I| = r$ If s_1 parts of $\underline{\underline{I}}$ are 1, and s_2 parts are 2, etc..., then we have $1.s_1+2.s_2+\ldots+r.s_r = r$.

We denote this partition by $1^{s_1}\, 2^{s_2} \ldots r^{s_r}$. So

$$1^{s_1}\, 2^{s_2} \ldots r^{s_r} = (\underbrace{r,\ldots,r}_{s_r},\ \underbrace{(r-1),\ldots,(r-1)}_{s_{r-1}},\ldots,\underbrace{1,\ 1,\ldots,1}_{s_1}).$$

If $\underline{I}$ is a partition of r we write $|\underline{I}| = r$.

<u>Proposition 1.1.</u> a) <u>There is a one-to-one correspondence between the partitions of r and the conjugacy classes of S_r.</u>

b) <u>There is a one-to-one correspondence between the conjugacy classes of S_r and the irreducible complex</u> (rational) <u>characters of S_r.</u>

c) <u>There is a one-to-one correspondence between the irreducible complex</u> (rational) <u>characters of S_r and the isomorphism classes of irreducible complex</u> (rational) <u>representations of S_r.</u>

<u>Outline of proof</u>: a) If $\underline{I} = (I_1, \ldots, I_r)$ is a partition then the associated conjugacy class is the class of the element
$(1..I_1)(I_1+1..I_1+I_2)(I_1+I_2+1..I_n+I_2+I_3)..(I_1+..+I_{r-1}+1..I_1+..+I_r) \in S_r$
Conversely the disjoint cycle decomposition of an element gives a partition of r.

b) This is standard in the representation theory of finite groups.

c) If V is an irreducible representation, then the function $\sigma \longmapsto \mathrm{Tr}(\sigma|_V)$ is a class function which is an irreducible character, by definition.

QED

Let $\xi_1, \ldots, \xi_r$ be r variables. Each $\sigma \in S_r$ defines a function $\sigma : \mathbb{Z}[\xi_1, \ldots, \xi_r] \longrightarrow \mathbb{Z}[\xi_1, \ldots, \xi_r]$ by $\sigma(\xi_i) = \xi_{\sigma(i)}$. This is a ring automorphism. In the ring $\mathbb{Z}[\xi_1, \ldots, \xi_r][t]$ consider the polynomial

$$\prod_{i=1}^{r} (1+\xi_i t) = \sum_{j=o}^{r} a_j(\xi_1, \ldots, \xi_r)\, t^j$$

Each coefficient $a_j(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ is invariant under S_r (i.e. is a "symmetric function"). The next result is classical.

<u>Proposition 1.2.</u> : <u>The ring of invariants</u>
$\mathbb{Z}[\xi_1, \ldots, \xi_r]^{S_r} = \mathbb{Z}[a_1, \ldots, a_r]$.

QED

If $s \geqslant r$ consider the homomorphism
$\mathbb{Z}[\xi_1, \ldots, \xi_s] \longrightarrow \mathbb{Z}[\xi_1, \ldots, \xi_r]$ given by $\xi_j \longrightarrow 0$ if $j > r$

and $\xi_j \longmapsto \xi_j$ for $1 \leq j \leq r$. If we consider $S_r \leq S_s$ as a subgroup acting on the first r letters, leaving the remainder fixed, then this homomorphism is S_r-equivariant. There is induced a surjection

$$\mathbb{Z}[\xi_1,\ldots,\xi_s]^{S_s} \longrightarrow \mathbb{Z}[\xi_1,\ldots,\xi_r]^{S_r}$$

with $a_i \longmapsto 0$ for $i > r$ and $a_i \longmapsto a_i$ for $i \leq r$. In the limits $S_\infty = \varinjlim S_r$, $\mathbb{Z}[\xi_1,\ldots]^\wedge = \varprojlim \mathbb{Z}[\xi_1,\ldots,\xi_r]$ we get $(\mathbb{Z}[\xi_1,\ldots,\xi_r,\ldots]^\wedge)^{S_\infty} = \varprojlim \mathbb{Z}[a_1,\ldots,a_r,\ldots]$.

If $f(\xi_1,\ldots,\xi_r)$ is homogeneous of degree p and invariant under S_r, there is a unique isobaric polynomial $p(a_1,\ldots,a_r)$ of weight p such that
$f(\xi_1,\ldots,\xi_r) = p(a_1(\xi_1,\ldots,\xi_r),\ldots,a_r(\xi_1,\ldots,\xi_r))$, where
weight $a_i = 1$ and weight $(a_1^{s_1}\ldots a_r^{s_r}) = 1\, s_1+2\, s_2+\ldots+r\, s_r$.
So the homogeneous symmetric polynomials of degree p form a free $\mathbb{Z}$-module spanned by the monomials $\{a_1^{s_1}\ldots a_r^{s_r}\}_{1^{s_1}\ldots r^{s_r} \vdash p}$.
Denote by A_r the subspace (free $\mathbb{Z}$-module) of these polynomials.
Then $\prod_{r\geq 0} A_r = \varprojlim \mathbb{Z}[a_1,a_2,\ldots]$.

Remark 1.3. Let $P(v)$ denote the number of partitions of r. Then

$$\prod_{j=1}^{\infty}(1-t^j)^{-1} = \sum_{r=0}^{\infty} P(r)t^r.$$

Suppose we consider not all partitions, but rather the number of partitions $I = (I_0,\ldots,I_r)$ such that

$|I| := I_0+\ldots+I_r = n$ and $\|I\| := 1.I_1 + 2.I_2+\ldots+rI_r = s$.

Call this number $A_s(r,n)$. (See section 4). Then

$$\prod_{i=0}^{r}(1-\chi^i t)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{s\geq 0} A_s(r,n)\chi^s\Big)t^n$$

The polynomials $\sum_{s\geq 0} A_s(r,n)\chi^s$ will enter in section 4.
There are two other bases for A_r obtained either formally, or by direct definition. In $(\varprojlim_r \mathbb{Z}[\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_r])[[t]]$ consider the power series
$\prod_{i=1}^{\infty}(1+\xi_i t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(\underline{\xi})t^j$. This is invertible, but so is

$\sum_{j=o}^{\infty} a_j(\xi)(-t)^j$. Define the elements $h_j(\xi)$ by

$(\sum_{j=o}^{\infty} h_j(\xi)t^j)(\sum_{j=o}^{\infty} a_j(\xi)(-t)^j) = 1$. Then we get the following

equations : $h_0(\xi) = a_0(\xi) = 1$ and

$$\sum_{j=o}^{r} (-1)^j a_j h_{r-j} = 0$$

for $r \geqslant 1$.

It is seen that each h_r is an integer linear combination of the a_I for $|I| = r$ and conversely. Hence the $h_I := \prod_{i=1}^{r} h_{I_i}$ also span A_r for $|I| = r$.

The h_I are called the <u>complete</u> <u>symmetric</u> functions (or polynomials). For example

$$h_r(\xi_1,\ldots,\xi_r) = \sum_j \xi_j^r + \sum_{i\neq j} \xi_i^{r-1}\xi_j + \sum_{\substack{i\neq j\\ i\neq k\\ j\neq k}} \xi_i^{r-2}\xi_j\xi_k + \ldots\ldots .$$

Then in $(\varprojlim_n \mathbb{Z}[\xi_1,\ldots,\xi_r] \otimes \varprojlim_m \mathbb{Z}[\xi_1,\ldots,\xi_m])[[t]]$ consider the formal power series

$$\prod_{i,j} (1-\xi_i\eta_j t)^{-1} = \sum_{r=o}^{\infty} p_r(\xi,\eta)t^r .$$

Since $p_r(\xi,\eta)$ is symmmetric in ξ and η separately and is of degree r in each, we can write $p_r(\xi,\eta) = \sum_{I-r} h_I(\xi) \otimes k_I(\eta)$. The k_λ are thus homogeneous symmetric functions, called the <u>monomial</u> <u>symmetric</u> functions. If $|I| = r$, say $I = (I_1,\ldots,I_r)$, take the monomial

$$\eta_1^{I_1}\eta_2^{I_2}\ldots\eta_r^{I_r}$$

and symmetrize it to get

$$k_I = \sum \eta_{s_1}^{I_1}\ldots\eta_{s_r}^{I_r} \quad , \text{ all } \quad s_1,\ldots,s_r \text{ distinct.}$$

(Note that $k_r = a_1(\eta^r)$, and hence that $k_{(I_1,\ldots,I_r)} \neq k_{I_1}k_{I_2}\ldots k_{I_r}$ in general).

A fourth set of symmetric functions is defined by

$$s_n := \sum_{i=o}^{\infty} \xi_i^n = a_1(\xi^n) ,$$

and then $s_I := \prod_{i=1}^{r} s_{I_i}$ for $I = (I_1,\ldots,I_r)$ with $|I| = r$.

The S_I form only a $\mathbb{Q}$-basis for A_r. In particular

$$s_r = \det \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 2a_2 & a_1 & 1 & \ldots & 0 \\ 3a_3 & a_2 & a_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \\ (r-1)a_{r-1} & a_{r-2} & a_{r-3} & \ldots & 1 \\ ra_r & a_{r-1} & a_{r-2} & \ldots & a_1 \end{pmatrix}$$

while

$$r!\, a_r = \det \begin{pmatrix} s_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ s_2 & s_1 & 1 & \ldots & 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ & & & \ldots & 1 \\ s_r & s_{r-1} & s_{r-2} & \ldots & s_1 \end{pmatrix}$$

(Thus $A_r/(\sum_{|I|=r} \mathbb{Z}\, s_I) \cong \bigoplus_{j=1}^{r} \mathbb{Z}/j\mathbb{Z}$.)

Let RS_r denote the representation ring of the group S_r. As in the first chapter this is obtained by considering the free group on the isomorphism classes of complex representations of S_r. It is shown, for example in [Weyl (1946)], that the primitive idempotents in $\mathbb{C}S_r$ be in the subring $\mathbb{Z}_{r!}\, S_r$. (Here $\mathbb{Z}_{r!} := \mathbb{Z}\,[(r!)^{-1}.]$.) Hence the indecomposable $\mathbb{C}S_r$-modules are extensions, by base ehange, of indecomposable free $\mathbb{Z}_{r!}\, S_r$-module. An indication of this will be given later.

There is an isomorphism $RS_r \longrightarrow A_r$ obtained as follows. If W is a representation of S_r and V is a vector space, let S_r act on the right of $V^{\otimes r}$ by $(x_1 \otimes \ldots \otimes x_r)\sigma = x_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(r)}$ for $\sigma \in S_r$. Then consider the vector space $V^{\otimes r} \otimes_{\mathbb{C}S_r} W$.

<u>Lemma 1.3</u>. <u>There is an isomorphism</u>

$$V^{\otimes r} \otimes_{\mathbb{C}S_r} W \cong (V^{\otimes r} \otimes_{\mathbb{C}} W)^{S_r} .$$

<u>Proof</u>. The group S_r acts on the left of $U = V^{\otimes r} \otimes_{\mathbb{C}} W$ by $\sigma^{-1}(\chi_1 \otimes \dots \otimes \chi_r \otimes \omega) = \chi_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \chi_{\sigma(r)} \otimes \sigma^{-1}(\omega)$. Let $e : U \longrightarrow U$ be given by $e(u) = (r!)^{-1} \sum_{\sigma \in S_r} \sigma(u)$. Then $e^2 = e$ and $U^{S_r} = e(U)$. Define $i : U \longrightarrow V^{\otimes r} \otimes_{\mathbb{C}S_r} W$ by the universal property of $\otimes_{\mathbb{C}}$, so $i(\chi_1 \otimes \dots \otimes \chi_r \otimes_k \omega) = \chi_1 \otimes \dots \otimes \chi_r \otimes_{\mathbb{C}S_r} \omega$. Note that $i(\sigma(u)) = i(u)$. Hence $ie = i$. So $i/_{U^{S_r}} : U^{S_r} \longrightarrow V^{\otimes r} \otimes_{\mathbb{C}S_r} W$ is an isomorphism. QED

So each W induces a functor

$$\text{mod-}\ \mathbb{C} \xrightarrow{W} \text{mod-}\ \mathbb{C}.$$

Let $W(V) := V^{\otimes r} \otimes_{\mathbb{C}S_r} W$. (N.B. This functor is not additive).

We note that $(W \oplus W_1)(V) = W(V) \oplus W_1(V)$.

Also note that there is a function

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,V') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W(V), W(V'))$$

that takes isomorphisms to isomorphisms.

<u>Example 1.4</u> a) If $W = \mathbb{C}$ with trivial action, then $W(V) = S^r(V)$, the r^{th} symmetric power of V.

b) If $W = \mathbb{C}$ with alternating action, then $W(V) = \Lambda^r(V)$, the r^{th} exterior power of V.

c) If $W = \mathbb{C}S_r$, the group ring itself, then $W(V) = V^{\otimes r}$.

Suppose that V has a basis $e_1, \dots, e_m$ and that $T : V \longrightarrow V$ is a diagonal operator with eigenvalues ξ_i. Then the eigenvalues fo $T^{\otimes r} \otimes Id_W$ are the monomials $\{\xi_{i_1} \dots \xi_{i_r}\}$. Hence the eigenvalues of $W(T)$ are among these monomials. So $Tr(W(T))$ is a sum of monomials in $\xi_1, \dots, \xi_m$ of degree r. Clearly it is a symmetric function. Call it $\omega(\xi_1, \dots, \xi_m)$. If $n \geq m$, then under the homomorphism $\mathbb{Z}[\xi_1, \dots, \xi_n] \longrightarrow \mathbb{Z}[\xi_1, \dots, \xi_m]$ we get $\omega(\xi_1, \dots, \xi_n) \longrightarrow \omega(\xi_1, \dots, \xi_m)$. Hence there is a uniquely defined $\omega \in A_r$ corresponding to $W \in RS_r$.

Denote this map by $sym_r : RS_r \longrightarrow A_r$. It is seen that $sym(W_1 \oplus W_2) = sym\ W_1 + sym\ W_2$ so indeed it is a group homomorphism.

Suppose $I = (I_1, I_2, \ldots, I_r)$ is a partition of r. There is an embedding $S_{I_1} \times \ldots \times S_{I_r} \longrightarrow S_r$ which induces a map

$$RS_{I_1} \times \ldots \times RS_{I_r} \longrightarrow RS_r$$

(induction from the subgroup).

There are also maps for each I induced by multiplication

$$A_{I_1} \times \ldots \times A_{I_r} \longrightarrow A_r.$$

A calculation shows that the diagram

$$\begin{tikzcd} RS_{I_1} \times \ldots \times RS_{I_r} \arrow[r, "ind"] \arrow[d, "sym_{I_1} \times \ldots \times sym_{I_r}"] & RS_r \arrow[d, "sym_r"] \\ A_{I_1} \times \ldots \times A_{I_r} \arrow[r, "mult"] & A_r \end{tikzcd}$$

is commutative.

If W is the alternating representation, then $W(V) = \Lambda^r(V)$ as we observed in example 1.4. Then $sym(W) = a_r$. An easy calculation shows that, if W_{I_i} is the alternating representation on S_{I_i}, then $sym_r(ind\ W_{I_1} \times \ldots \times W_{I_r}) = a_{I_1} \ldots a_{I_r} = mult(sym_{I_1} \times \ldots \times sym_{I_r}(W_{I_1} \times \ldots \times W_{I_r}))$.
Hence sym_r is a surjection. By Proposition 1.1. we conclude that sym_r is a bijection.

<u>Theorem 1.5.</u> : <u>The map $sym_r : RS_r \longrightarrow A_r$ is an isomorphism of abelian groups which preserves the products that is</u>

$$\begin{tikzcd} RS_r \times RS_s \arrow[r] \arrow[d] & RS_{r+s} \arrow[d] \\ A_r \times A_s \arrow[r] & A_{r+s} \end{tikzcd}$$

<u>commutes</u>. QED

The set RS_r is also a ring, so sym_r can be used to induce a ring structure on A_r. Furthermore there are inner product structures on RS_r and A_r that sym_r preserves.

There are several other ways to set the map sym_r. These will be discussed in the next section.

2. Schur functions, irreducible representations.

Let $I = (I_1,\dots,I_r)$ be a partition of r. The Vandermonde determinant

$$V(\xi_1,\dots,\xi_r) := \det(\xi_i^{j-1}) \quad \text{for} \quad 1 \leq i,j \leq r$$

is alternating that is $\sigma(V(\xi_1,\dots,\xi_r)) = (-1)^{\operatorname{sgn}\sigma} V(\xi_1,\dots,\xi_r)$ for all $\sigma \in S_r$. (In part one can define the alternating character $\operatorname{sgn} : S_r \longrightarrow Z$ by

$$\operatorname{sgn}\sigma := \sigma(V(\xi_1,\dots,\xi_r))/V(\xi_1,\dots,\xi_r).)$$

Define the polynomial

$$V_I(\xi_1,\dots,\xi_r) := \det(\xi_i^{I_{r-j+1}+j-1}) \quad \text{for} \quad 1 \leq i,j \leq r.$$

It is clear that $V_I(\xi_1,\dots,\xi_r)$ is alternating and that $V(\xi_1,\dots,\xi_r)$ divides $V_I(\xi_1,\dots,\xi_r)$ in the polynomial ring $\mathbb{Z}[\xi_1,\dots,\xi_r]$. (In fact [Mitchell (1881)] has proved that coefficients of $V_I(\xi_1,\dots,\xi_r)/V(\xi_1,\dots,\xi_r)$ are non negative. A simple proof of this result appears in [Evans and Isaacs (1976)] . Since V and V_I are alternating, the polynomial V_I/V is symmetric and homogeneous of degree r.

Definition 2.1. The Schur function e_I is the (unique) function in A_r given by

$$e_I(\xi) = V_I(\xi_1,\dots,\xi_r)/V(\xi_1,\dots,\xi_r)$$

in $\mathbb{Z}[\xi_1,\dots,\xi_r]$.

Since the symmetric polynomials $\{a_I\}_{|I|=r}$ span A_r ,each e_I can be written in terms of the a_I. Let I' denote the partition of r conjugate to I. For each $n < o$ set $a_n = o$ and set $a_o = 1$. The next result relates the Schur functions to the other functions. The identities are known as the Jacobi-Trudi identities.

<u>Proposition 2.2</u>. <u>If</u> $|I| = r$ <u>then</u>

$$e_I = \det(h_{I_s+t-s})$$

<u>and</u>

$$e_{I'} = \det(a_{I_s+t-s}) \qquad 1 \leq s,t \leq r.$$

Yet another way to get these functions is via the map sym_r.

If $\chi : S_r \longrightarrow \mathbb{Q}$ is a character and (a_{ij}) an $r \times r$ square matrix with entries from a $\mathbb{Q}$-algebra, define

$$\det_\chi (a_{ij}) := \sum_{\sigma \in S_r} \chi(\sigma)\, a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{r,\sigma(r)}.$$

The ordinary determinant is just $\det_{\mathrm{alt}}$ where alt is the alternating character, while the so-called permanent is $\det_{\mathrm{triv}}$ where triv is the trivial character.

Now suppose χ is a character arising from a representation W of S_r. Then [Knutson, for example]

$$\mathrm{sym}_r(W) = \frac{1}{r!} \det_\chi \begin{pmatrix} s_1 & 1 & \cdots & 0 \\ s_2 & s_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ s_{r-1} & s_{r-2} & \cdots & r-1 \\ s_r & s_{r-1} & \cdots & s_1 \end{pmatrix}$$

If W_I is an irreducible representation corresponding to a partition $|I| = r$, then

$$\mathrm{sym}_r(W_I) = e_I.$$

We can put a partial order on RS_r by saying that the class of a $\mathbb{C}S_r$-module is greater than zero, that is $\chi \geqslant 0$ if and only if there is a $\mathbb{C}S_r$-module W such that $\chi = W$. Since RS_r is a free abelian group based on the indecomposables, an element $\chi \geqslant 0$ if and only if, when $\chi = \sum_{|I|=r} n_I W_I$ where $n_I \in \mathbb{Z}$ and $\{W_I\}$ are the indecomposables, then the integers $n_I \geqslant 0$ in $\mathbb{Z}$.

There is an inner product on RS_r given, on the CS_r-modules, by

$$\langle V, W \rangle := \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}S_r}(V, W).$$

Then $\langle W_I, W_J \rangle = \delta_{IJ}$. Hence $\chi \geqslant 0$ if and only if $\langle \chi, W_J \rangle \geqslant 0$ for all J. For arbitrary elements $x, y \in RS_r$ we can then say

"$x \geqslant y$ if and only if there is a module W such that $x = y + W$".

This inner product is transfered over to A_r by the map sym_r. As the Schur functions $\{e_I\}_{|I|=r}$ span A_r and are images of the W_I under sym_r, we get the inner product

$$\langle e_I, e_J \rangle = \delta_{IJ},$$

that is : the set $\{e_I\}$ forms an orthonormal basis for A_r with respect to this inner product.

We use this relation for generating exact sequences of $\mathbb{C}S_r$-modules, and then relations between symmetric and exterior powers. The idea is this : suppose there is a relation between positive symmetric functions. Then there is an associated isomorphism between $\mathbb{C}S_r$-modules. The decomposition of these into various of the standard modules (for example in the indecomposables or the tensor products of symmetric or exterior powers) is defined by idempotents in $\mathbb{Z}[(r!)^{-1}]\, S_r$.

The simplest example of this is the relation

$$e_{n,1} = \det\begin{pmatrix} h_n & h_{n+1} \\ 1 & h_1 \end{pmatrix} = h_n h_1 - h_{n+1}. \text{ Hence}$$

$h_n h_1 = e_{n,1} + h_{n+1}$. But h_{n+1} and $h_n h_1$ lie in the positive cone of A_{n+1}. We get $h_n h_1$ from the trivial representation of $S_n \times S_1$ induced up to S_{n+1}, while h_{n+1} is obtained from the trivial representation and $e_{n,1}$ is obtaind from the indecomposable corresponding to $(n,1)$. These representations are given by the modules $\mathbb{C}S_{n+1} \otimes_{\mathbb{C}S_n} \mathbb{C}$ and $\mathbb{C}$. We need a map $\mathbb{C}S_{n+1} \otimes_{\mathbb{C}S_n} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ whose kernel is $W_{n,1}$. Now $\mathbb{C}S_{n+1} \otimes_{\mathbb{C}S_n} \mathbb{C}$ is a vector space of dimension $n+1$ spanned by the transpositions $(j,n+1)$

$$\mathbb{C}S_{n+1} \underset{\mathbb{C}S_n}{\otimes} \mathbb{C} = \bigoplus_{j=1}^{n+1} \mathbb{C}\,(j,n+1)$$

Define

$$\mathbb{C}S_{n+1} \otimes_{\mathbb{C}S_n} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

by $(j,n+1) \longmapsto 1$. The inverse is given by $\quad Z \longmapsto \left(\frac{1}{n+1}\right) \sum_{j=1}^{n+1} Z(j,n+1)$

Then we get the split exact sequence.

$$0 \longrightarrow W_{(n,1)} \longrightarrow \mathbb{C}S_{n+1} \otimes_{\mathbb{C}S_n} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow 0.$$

Apply this to a vector space V, to get an exact sequence

$$0 \longrightarrow W_{(n,1)}(V) \longrightarrow (\mathbb{C}S_{n+1} \otimes_{\mathbb{C}S_n} \mathbb{C})(V) \longrightarrow \mathbb{C}(V) \longrightarrow 0.$$

But $\mathbb{C}(V) = S^{n+1}(V)$ (by Example 1.4.a)) while $(\mathbb{C}S_{n+1} \otimes_{\mathbb{C}S_n} \mathbb{C})(V) = S^n(V) \otimes_{\mathbb{C}} V$. Hence we get

$$0 \longrightarrow W_{(n,1)}(V) \longrightarrow S^n(V) \otimes_{\mathbb{C}} V \longrightarrow S^{n+1}(V) \longrightarrow 0,$$

which is split exact. The map $S^n(V) \otimes_{\mathbb{C}} V \longrightarrow S^{n+1}(V)$ is the obious one :

$$v_1 \dots v_n \otimes v_{n+1} \longrightarrow v_1 \dots v_{n+1}$$

<u>Proposition 2.3. A relation among elements in the positive cone of A_r corresponds with a split exact sequence of $\mathbb{Z}[(r!)^{-1}]S_r$-modules free over $\mathbb{Z}[(r!)^{-1}]$, and conversely.</u>

As another example, consider the relation

$$\sum_{j=o}^{r} (-1)^j a_j h_{r-j} = 0 \qquad (\text{for } r > 1),$$

in A_r. Since $a_j h_{r-j} = \mathrm{sym}_r (\mathrm{Ind}_{S_r}^{S_j \times S_{r-j}} \mathrm{alt} \otimes \mathrm{triv})$, where <u>alt</u> is the alternating and <u>triv</u> is the trivial representation respectively. Then we get the split exact sequence

$$0 \longrightarrow \mathrm{alt} \longrightarrow \mathrm{Ind}_{S_r}^{S_{r-1} \times S_1}(\mathrm{alt} \otimes \mathrm{triv}) \longrightarrow \mathrm{Ind}_{S_r}^{S_{r-2} \times S_2}(\mathrm{alt} \otimes \mathrm{triv}) \longrightarrow$$

$$\dots \longrightarrow \mathrm{Ind}_{S_r}^{S_1 \times S_{r-1}}(\mathrm{alt} \otimes \mathrm{triv}) \longrightarrow \mathrm{triv} \longrightarrow 0 .$$

Apply this to a free $\mathbb{Z}[(r!)^{-1}]$-module V to get a split exact sequence

$$(2.4.)\quad 0 \longrightarrow \Lambda^r(V) \xrightarrow{d_r} \Lambda^{r-1}(V) \otimes S^1(V) \xrightarrow{d_{r-1}} \dots \longrightarrow \Lambda^1(V) \otimes S^{r-1}(V) \xrightarrow{d_1} S^r(V) \longrightarrow 0$$

of $\mathbb{Z}[(r!)^{-1}]$-modules. In this case it is possible to write the maps and the splitting maps.

Define $d_j : \Lambda^j(V) \otimes S^{r-j}(V) \longrightarrow \Lambda^{j-1} \otimes S^{r-j+1}(V)$ by

$$d_j((v_1 \wedge \dots \wedge v_j) \otimes \omega) = \sum_{\nu=1}^{j} (-1)^{j-\nu} v_1 \wedge \dots \wedge \hat{v}_\nu \wedge \dots \wedge v_j \otimes v_\nu \omega)$$

and define

$$e_{r-j} : \Lambda^j(V) \otimes S^{r-j}(V) \longrightarrow \Lambda^{j+1}(V) \otimes S^{r-j-1}(V)$$

by

$$e_{r-j}(u \otimes v_1 \ldots v_{r-j}) = \sum_{\nu=1}^{r-j} (u \wedge v_\nu) \otimes v_1 \ldots \hat{v}_\nu \ldots v_{r-j} .$$

Then a long, but straight forward calculation, shows that

$$d_{j+1} \circ e_{r-j} + e_{r-j+1} \circ d_j = r\mathrm{Id}.$$

[Of course $d_{r+1} = 0 = d_o$ and $e_o = 0 = e_{r+1}$].

Hence the sequence splits whenever r is invertible.

Further applications of this principle will be given in the next section.

3. λ -operations and λ -rings

Suppose R in a commutative ring. A family $\lambda = \{\lambda^i\}_{i \in \mathbb{N}_o}$ of λ-operations on R is a family of functions

$$\lambda^i : R \longrightarrow R$$

satisfying the following ;

$$\lambda^o(x) = 1 \quad \text{all} \quad x \in R$$

$$\lambda^1(x) = x \quad \text{all} \quad x \in R$$

$$\lambda^i(x+y) = \sum_{j=o}^{i} \lambda^j(x)\, \lambda^{i-j}(y) \quad \text{all} \quad x,y \in R.$$

In the formal power series ring $R[[t]]$ one can consider the formal power series

$$\lambda_t(x) = \sum_{\nu=o}^{\infty} \lambda^\nu(x) t^\nu .$$

Let $\mathcal{U}_o(R) := 1 + t\,R[[t]]$. This is a subgroup of the group of units of $R[[t]]$. The three operations above are equivalent to :

$$\lambda_t : R \longrightarrow \mathcal{U}_o(R)$$

is a group homomorphism.

Say an element $x \in R$ has λ-rank n if $\lambda^n(x) \neq 0$ while $\lambda^{n+j}(x) = 0$ for all $j > 0$. If we could write all elements of R as sums of elements of λ-rank 1 and if the product of an element of λ-rank 1 were again of λ-rank 1, then we could compute $\lambda^p(xy)$ and $\lambda^s(\lambda^r(x))$. We can formalize this.

In the ring $\varprojlim_{n,m} (\mathbb{Z}[\xi_1,\ldots,\xi_m] \otimes \mathbb{Z}[\eta_1,\ldots,\eta_n])[[t]]$ consider the element

$$\prod_{i,j=1}^{\infty} (1 + \xi_i \eta_j t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu(\xi,\eta)\, t^\nu .$$

[One takes finite products

$$\prod_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}} (1 + \xi_i \eta_j t) = \sum_{\nu=0}^{nm} p_\nu(\xi,\eta) t^\nu$$

and notes that under the projections

$$Z[\xi_1,\ldots,\xi_{m'},\eta_1,\ldots,\eta_{n'}] \longrightarrow Z[\xi_1,\ldots,\xi_m,\eta_1,\ldots,\eta_n]$$

that $p'_\nu \longrightarrow p_\nu$. Thus there is a well defined element in the limit]

The product $\prod_{i,j} (1 + \xi_i \eta_j t)$ is invariant under $S_\infty \times S_\infty$ and so the elements $p_\nu(\xi,\eta)$ are invariant and hence $p_\nu(\xi,\eta) \in A_\nu \otimes A$. Thus there is a unique polynomial

$$P^\nu \in Z[S_1,\ldots,S_\nu, T_1,\ldots,T_\nu]$$

such that $p_\nu(\xi,\eta) = P^\nu(a_1(\xi),\ldots,a_\nu(\xi),a_1(\eta),\ldots,a_\nu(\eta))$.

[of course we could express the p_ν in terms of the other bases for symmetric functions. We will not do this, as we do not need these expressions for our purposes.]

<u>Definition 3.1</u>. Suppose $f(t) = 1 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots$ and $g(t) = 1 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots$ are in $\mathcal{U}_o(R)$. The $\otimes$-product of f with g is defined by

$$f(t) \otimes g(t) := \sum_{\nu=0}^{\infty} P^\nu(a_1,\ldots,a_\nu,b_1,\ldots,b_\nu)t^\nu .$$

This product is commutative, associative, with $1+t$ as unit. Furthermore

$$(f(t) \otimes (g(t).h(t)) = (f(t) \otimes h(t)).(g(t) \otimes h(t)).$$

Thus $(\mathcal{U}_o(R),.,\otimes)$ is a commutative ring with unit.

The product $\displaystyle\prod_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_d<\infty} (1 + \xi_{i_1}\xi_{i_2}\ldots\xi_{i_d} t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} p_{\nu d}(\xi)t^\nu$ is also expandable in $\varprojlim_m \mathbb{Z}[\xi_1,\ldots,\xi_m]$ yielding symmetric functions $p_{\nu d} = P^{\nu d}(a_1,\ldots,a_{\nu d})$. If $f(t) \in \mathcal{U}_o(R)$, define $\Lambda^d f(t) := \sum_{\nu=0} P^{\nu d}(a_1,\ldots,a_{\nu d})\, t^\nu$. Then the $\Lambda^d : \mathcal{U}_o(R) \longrightarrow \mathcal{U}_o(R)$

are λ-operations.

<u>Definition 3.2.</u> : The ring R with λ-operations λ^i is a λ-<u>ring</u> if the map

$$\lambda_t : R \longrightarrow \mathbb{U}_o(R)$$

defined above is a homomorphism of rings with λ-operations

There are some formal operations, mentioned in the first section, concerning the various families of symmetric functions. For the readers' and our benefit we list them here.

(3.3.) $\prod_{i=1}^{\infty} (1 + \xi_i t) = \sum_{\nu=o}^{\infty} a_\nu t^\nu$ <u>Elementary symmetric functions</u> a_ν .

$a_I = \prod a_{I_\nu}$ where $I = (I_1, \ldots, I_r)$ is a multi index and $|I| = \Sigma I_\nu$

(3.4.) $\prod_{i=1}^{\infty} (1 - \xi_i t)^{-1} = \sum_{\nu=o}^{\infty} h_\nu t^\nu$ <u>Complete symmetric functions</u> h_ν .

$h_I = \prod h_{I_\nu}$.

(3.5.) $\prod_{j=o}^{\nu} (-1)^j a_j h_{\nu-j} = 0$ for all $\nu \geqslant 1$

(3.6.) $\prod_{i=1,j=1}^{\infty\ \infty} (1 - \xi_i \eta_j t)^{-1} = \sum_{\nu=o}^{\infty} (\sum_{|I|=\nu} h_I(\xi) k_I(\eta))t^\nu$

<u>Monomial symmetric functions</u> k_I

(3.7.) $e_I = \det (h_{I_s+t-s})$ <u>Jacobi-Trudi identifies for Schur functions</u> e_I , $|I| = r$.

$e_{I'} = \det (a_{I_s+t-s})$

(3.8.) $\prod_{i,j=1}^{\infty} (1 - \xi_i \eta_j t)^{-1} = \sum_{\nu=o}^{\infty} (\sum_{|I|=\nu} e_I(\xi) e_I(\eta))t^\nu$.

<u>Orthonormality of the</u> e_I

Let $h_\nu(\xi, \eta)$ be the coefficient of t^ν in (3.6.). Then comparing (3.6.) and (3.8.) we get

(3.9) $h_\nu (\xi,\eta) = \sum_{|I|=\nu} h_\nu (\xi)k_\nu(\eta) = \sum_{|I|=\nu} e_I(\xi)e_I(\eta)$.

The identity $h_\nu(\xi,\eta) = \sum_{|I|=\nu} e_I(\xi)\, e_I(\eta)$ is one form of the <u>Cauchy</u> <u>Formula</u>. Another form is given by

$$(3.10)\quad a_\nu(\xi,\eta) = \sum_{|I|=\nu} e_{I'}(\xi)\, e_I(\eta).$$

These formulas can be given another interpretation. Consider the ring $B := \varprojlim_m \mathbb{Z}[\xi_1,\dots,\xi_m]$ defined in § 1.

Define $\lambda^i : B \longrightarrow B$ by $\lambda_t(\xi_i) = 1 + \xi_i t$ (so $\mathrm{rk}\,\xi_i = 1$ for all ξ_i). Then B is a λ-ring. Consider the subring of B generated over $\mathbb{Z}$ by a_1 and all the λ-operations. Then this is again a λ-ring. Clearly $\lambda^n(a_1) = a_n$ so this ring contains $A := \varprojlim_m \mathbb{Z}[a_1,\dots,a_m]$, and in fact is equal to A. Suppose we consider the $\otimes$-product

$$\lambda_t(a_1) \otimes \lambda_t(b_1) = \prod_{i,j=1}^{\infty} (1 + \xi_i \eta_j t).$$

Then we get, on the one hand

$$\lambda_t(a_1 b_1)$$

and on the other, from (3.10), the expression

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \Big(\sum_{|I|=\nu} e_{I'}(\xi)\, e_I(\eta)\Big) t^\nu .$$

Hence

$$(3.11.)\quad \lambda^\nu(a_1 b_1) = \sum_{|I|=\nu} e_{I'}(\xi)\, e_I(\eta).$$

This is another form of Cauchy's Formula.

Using the principle in Proposition 2.3., these formulas can be transformed to exact sequences.

<u>Proposition 3.12.</u> : <u>Let</u> E,F <u>be free</u> $\mathbb{Z}[(r!)^{-1}]$-<u>modules. Then there are free</u> $\mathbb{Z}[(r!)^{-1}]$-<u>modules</u> $W_I(E)$, $W_I(F)$ <u>for each</u> $|I| = r$ <u>and functorial isomorphisms</u>

$$(3.9')\quad \Lambda^r(E \otimes F) \cong \bigoplus_{|I|=r} W_{I'}(E) \otimes W_I(F)$$

$$(3.10')\quad S^r(E \otimes F) \cong \bigoplus_{|I|=r} W_I(E) \otimes W_I(F).$$

In particular, in the representation ring of free $\mathbb{Z}[(r!)^{-1}]S_1$*-modules we have*

$$\lambda_t(xy) = \lambda_t(x) \otimes \lambda_t(y).$$

Recall that W_I is the indecomposable $S_{|I|}$-module corresponding to the partition I.

The first few coefficients of $\lambda_t(a) \otimes \lambda_t(b)$ are recorded in [Almkvist]. They are repeated here with the associated statements for symmetric and exterior powers of vector spaces

If $\quad \lambda_t(a_1) \otimes \lambda_t(b_1) = \sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu t^\nu \quad$ then

$d_0 = 1 \qquad \Lambda^0(U \otimes_k V) \cong k$

$d_1 = a_1 b_1 \qquad \Lambda^1(U \otimes_k V) \cong U \otimes_k V$

$d_2 = a_1^2 b_2 + a_2 b_1^2 - 2a_2 b_2$

$$\Lambda^2(U \otimes V) \oplus 2\,(\Lambda^2(U) \otimes \Lambda^2(V)) \cong \{U^{\otimes 2} \otimes \Lambda^2(V)\} \oplus \{\Lambda^2(U) \otimes V^{\otimes 2}\}$$

$$d_3 = a_1^3 b_3 + a_3 b_1^3 + a_1 a_2 b_1 b_2 - 3a_1 a_2 b_3 - 3a_3 b_1 b_2 + 3a_3 b_3$$

$$\Lambda^3(U \otimes V) \oplus 3(U \otimes \Lambda^2(U) \otimes \Lambda^3(V)) \oplus 3(\Lambda^3(U) \otimes V \otimes \Lambda^2(V))$$

$$\cong (U^{\otimes 3} \otimes \Lambda^3(V)) \oplus (\Lambda^3(U) \otimes V^{\otimes 3}) \oplus (U \otimes \Lambda^2(U) \otimes V \otimes \Lambda^2(V)) \oplus 3(\Lambda^3(U) \otimes \Lambda^3(V))$$

etc... The corresponding formulas using the indecomposables are

$$\Lambda^2(U \otimes V) \cong \{S^2(U) \otimes \Lambda^2(V)\} \oplus \{\Lambda^2(U) \otimes S^2(V)\}.$$

$$S^2(U \otimes V) \cong \{S^2(U) \otimes S^2(V)\} \oplus \{\Lambda^2(U) \otimes \Lambda^2(V)\}$$

$$\lambda^3(U \otimes V) \cong \{\Lambda^3(U) \otimes S^3(V)\} \oplus \{E_{2,1}(U) \otimes E_{2,1}(V)\} \oplus \{S^3(U) \otimes \Lambda^3(V)\}$$

$$S^3(U \otimes V) \cong \{S^3(U) \otimes S^3(V)\} \oplus \{E_{2,1}(U) \otimes E_{2,1}(V)\} \oplus \{\Lambda^3(U) \otimes \Lambda^3(V)\}.$$

The isomorphisms above for $\Lambda^2(U \otimes V)$ can be replaced by exact sequences (from 2.4.)

$$0 \longrightarrow \Lambda^2(U) \otimes \Lambda^2(V) \xrightarrow{d_2 \otimes I} U^{\otimes 2} \otimes \Lambda^2(V) \xrightarrow{d_1 \otimes I} S^2(U) \otimes \Lambda^2(V) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \Lambda^2(U) \otimes S^2(V) \xrightarrow{I \otimes e_2} \Lambda^2(U) \otimes V^{\otimes 2} \xrightarrow{I \otimes e_1} \Lambda^2(U) \otimes \Lambda^2(V) \longrightarrow 0$$

then

$$0 \longrightarrow \Lambda^2(U) \otimes S^2(V) \xrightarrow{\beta} \Lambda^2(U \otimes V) \xrightarrow{\alpha} S^2(U) \otimes \Lambda^2(V) \longrightarrow 0.$$

The map α is given by $\alpha((u_1 \otimes v_1)\wedge(u_2 \otimes v_2)) = u_1u_2 \otimes v_1 \wedge v_2$ while $\beta(u_1\wedge u_2 \otimes v_1\ v_2) = \frac{1}{2}\{(u_1 \otimes v_1)\wedge(u_2\wedge v_2) + (u_1 \otimes v_2)\wedge(u_2 \otimes v_1)\}$ Thus the two decompositions are related.

It is intersting to note the following : In characteristic 2, it will be shown that for the indecomposable μ_2-module V_2 we have the decomposition $S^2(V_2) \cong V_2 \oplus V_1$, $V_2 \otimes V_2 = V_2 \oplus V_2$. Hence

$$\Lambda^2(V_2\otimes V_2) \cong \Lambda^2(V_2\oplus V_2) \cong \{\Lambda^2(V_2) \otimes \Lambda^0(V_2)\} \oplus \{\Lambda^1(V_2)\otimes \Lambda^1(V_2)\}$$
$$\oplus \{\Lambda^0(V_2) \otimes \Lambda^2(V_2)\}$$
$$\cong V_1 \otimes V_1 \oplus V_2 \otimes V_2 \oplus V_1 \otimes V_1 \cong 2V_1 \oplus 2V_2$$
$$\cong \{S^2(V_2) \otimes V_1\} \oplus \{V_1 \otimes S^2(V_2)\}.$$

Hence

$$\Lambda^2(V_2 \otimes V_2) \cong (S^2(V_2) \otimes \Lambda^2(V_2)) \oplus (\Lambda^2(V_2) \otimes S^2(V_2)) .$$

However computing the other formula we get

$$\Lambda^2(V_2 \otimes V_2) \oplus 2\{\Lambda^2(V_2) \otimes \Lambda^2(V_2)\} \cong \{V_2^{\otimes 2} \otimes \Lambda^2(V_2)\} \oplus \{\Lambda^2(V_2) \otimes V_2^{\otimes 2}\} .$$

This gives

$$\Lambda^2(V_2 \otimes V_2) \oplus 2V_1 \cong 4V_2 \quad \text{or}$$
$$2V_2 \oplus 4V_1 \cong 4V_2 .$$

Thus the Cauchy Formula holds while the formula expressing the coefficients in terms of the elementary symmetric functions does not. The Cauchy Formula for $S^2(V_2 \otimes V_2)$ also works in this case.

A direct computation involving the maps α , β above does not yield a proof in characteristic 2 because of the $\frac{1}{2}$ in the definition of β .

However when one goes to larger indecomposables, even the Cauchy Formula does not hold. It is not difficult to calculate the following module decompositions (in characteristic 2) over $k\mu_4$

$$\Lambda^2(V_2 \otimes V_3) \cong \Lambda^2(V_2 \oplus V_4) \cong \Lambda^2(V_4) \oplus (V_2 \otimes V_4) \oplus V_1$$
$$\cong (V_4 \oplus V_2) \oplus 2V_4 \oplus V_1$$

$$S^2(V_2) \otimes \Lambda^2(V_3) \cong (V_2 \oplus V_1) \otimes V_3 \cong V_2 \oplus V_4 \oplus V_3$$

$$\Lambda^2(V_2) \otimes S^2(V_3) \cong S^2(V_3) \cong V_4 \oplus V_2 .$$

But there is no isomorphism

$$V_1 \oplus V_2 \oplus 4V_4 \cong 2V_2 \oplus V_3 \oplus 2V_4 .$$

Hence $R\nu_4$ is not a λ-ring with λ-operations $V \longrightarrow \Lambda^i(V)$.

In the remarks just above, it has been seen that the rings $R\nu_{p^\alpha}$ are not λ-rings for the operations induced by exterior powers. There is reason to consider what λ-structure there is for using the limited λ-structure we are able to find the desired decompositions.

As a concluding remark we note the renewed interest in the relation between the purely combinatorial aspects of partitions and the related algebra and geometry. See for example [Doubilet, et al (1976), Lascoux (1977), Roberts (1977), De Concini and Procesi (1976), Towber (1976a and b)].

4. GAUSSIAN POLYNOMIALS AND SYMMETRIC FUNCTIONS.

In the next chapter we need some formal properties of the Gaussian polynomials. We list them here together with their relations to other areas.

<u>Definition 4.1</u>. <u>The homogeneous Gaussian polynomial</u> $G_{n,r}(X,Y)$ is defined, for a pair of non-negative integers n,r ; $n \geq r$, by

$$G_{n,r}(X,Y) := \frac{(X^n-Y^n)(X^{n-1}-Y^{n-1})\ldots(X^{n-r+1}-Y^{n-r+1})}{(X^r-Y^r)(X^{r-1}-Y^{r-1})\ldots(X-Y)}$$

Easy calculations show

(4.2) $G_{n,r}(X,Y)$ <u>is homogeneous of degree</u> $r(n-r)$

(4.3) $G_{n,r}(X,Y) = X^{n-r}\, G_{n-1,r-1}(X,Y) + Y^r\, G_{n-1,r}(X,Y)$

<u>and therefore</u> $G_{n,r}(X,Y)$ <u>is a polynomial in</u> X,Y <u>with integer coefficients</u>.

(4.4.) $G_{n,r}(X,Y) = G_{n,r}(Y,X) = G_{n,n-r}(X,Y)$.

(4.5.) <u>In</u> $\mathbb{Z}[X,Y][\![t]\!]$ <u>we have</u>

$$\prod_{j=o}^{r} (1-X^{r-j}\, Y^j t)^{-1} = \sum_{\nu=o}^{\infty} G_{\nu+r,r}(X,Y)\, t^{\nu}$$

(This is demonstrated by induction on r using (4.3) above).

<u>Proposition 4.6.</u> <u>Suppose</u> $G_{n+r,r}(X,Y) = \sum_{\mu=o}^{nr} A_\mu\, X^{nr-\mu}\, Y^\mu$. <u>Then</u> A_μ <u>is the number of partitions</u> $I = (I_o,\ldots,I_r)$ <u>such that</u> $|I| = I_o + I_1+\ldots+I_r = n$ and $I_1 + 2I_2 +\ldots+ rI_r = \|I\| = \mu$

<u>Proof</u> : Consider the product

$$\prod_{j=o}^{r} (1 - X^{r-j}\, Y^j t)^{-1} = \prod_{j=o}^{r} \Big(\sum_{m=o}^{\infty} (X^{r-j}\, Y^j t)^m\Big) = \sum_{n=o}^{\infty} G_{n+r,r}(X,Y)t^n.$$

But in the expansion of the product of the infinite sum, the coefficient of t^n is given by

$$\sum_{|I|=n} (X^r)^{I_o}\, (X^{r-1}\, Y^1)^{I_1} \ldots (XY^{r-1})^{I_{r-1}}\, (Y^r)^{I_r}$$

$$= \sum_{|I|=n} X^{rI_o+(r-1)I_1+\ldots+I_{r-1}}\, Y^{I_1+2I_2+\ldots+rI_r}$$

$$= \sum_{\substack{I_o+I_1+\ldots+I_r = n \\ I_1+2I_2+\ldots+rI_r = \mu}} X^{nr-\mu}\, Y^\mu = \sum A_\mu\, X^{nr-\mu}\, Y^\mu .$$ QED

There is a relation between the symmetric functions and Gaussian polynomials.

<u>Proposition 4.7.</u> <u>Let</u> a_r <u>be the</u> r^{th} <u>elementary symmetric function and let</u> h_r <u>be the</u> r^{th} <u>complete symmetric function.</u> <u>Then</u>

$$a_r(X^{n-1},\, X^{n-2}Y,\ldots,XY^{n-2},\, Y^{n-1}) = (XY)^{\binom{r}{2}}\, G_{n,r}(X,Y).$$

<u>and</u>

$$h_n(X^r,\, X^{r-1}Y,\ldots,Y^r) = G_{n+r,r}(X,Y).$$

<u>Proof</u> : Note that $a_r(\xi_1,\ldots,\xi_n) = a_r(\xi_1,\ldots,\xi_{n-1})+\xi_n a_{r-1}(\xi_1,\ldots,\xi_{n-1})$
Hence, with $\xi_i = X^{n-i}Y^{i-1}$ we get

$$a_r(X^{n-1},X^{n-2}Y,\ldots,Y^{n-1})=a_r(X^{n-1},X^{n-2}Y,\ldots,XY^{n-2})+Y^{n-1}a_{r-1}(X^{n-1}\ldots XY).$$

Therefore

$$\begin{aligned}a_r(X^{n-1},\ldots,Y^{n-1})&=X^r a_r(X^{n-2},X^{n-3}Y,\ldots,Y^{n-2})+Y^{n-1}X^{r-1}a_{r-1}(X^{n-2},\ldots,Y^{n-2})\\ &=X^rG_{n-1,r}(X,Y)(XY)^{\binom{r}{2}}+Y^{n-1}X^{r-1}(XY)^{\binom{r-1}{2}}G_{n-1,r-1}(X,Y)\\ &= (XY)^{\binom{r}{2}}\left\{X^rG_{n-1,r}(X,Y) + Y^{n-r}G_{n-1,r-1}(X,Y)\right\}.\end{aligned}$$

By (4.3) and (4.4), this term in the brackets $\{\ \}$ is just $G_{n,r}(X,Y)$ as desired. The statement for h_n results from 4.5. QED

<u>Corollary 4.8.</u> : <u>For each</u> $r \geq 1$ <u>and</u> n <u>we have</u>

$$\sum_{\nu=0}^{r} (-1)^{\nu}\ (XY)^{\binom{r-\nu}{2}}G_{n+1,r-\nu}(X,Y)\ G_{n+\nu,\nu}(X,Y) = 0$$

<u>Proof</u> : Since $\sum_{\nu=0}^{r} (-1)^{\nu}\ a_{r-\nu}h = 0$, the result follows by direct substitution. QED

<u>Remark 4.9.</u> In Proposition 4.6 the number of partitions $I = (I_0,\ldots,I_r)$ with $|I|=n$ and $\|I\|=\mu$ is denoted by $A_\mu(r,n)$. Note that

$$(X-Y)\ G_{n+r,r}(X,Y) = A_0\ X^{nr+1} + \sum_{\mu=1}^{nr}(A_\mu - A_{\mu-1})\ X^{nr+1-\mu}\ Y^\mu - A_{nr}Y^{nr+1}.$$

Furthermore $A_0 = 1$ (with $I = (n, 0,\ldots,0)$) and $A_{nr} = 1$ (with $I = (0,\ldots, 0, n)$). So

$$(X-Y)\ G_{n+r,r}(X,Y) = X^{nr+1} + \sum_{\mu=1}^{nr}(A_\mu - A_{\mu-1})\ X^{nr+1-\mu}\ Y^\mu - Y^{nr+1}.$$

The number $A_\mu - A_{\mu-1}$ is the difference between the number of partitions I with $\|I\|=\mu$ and $\|I\|=\mu-1$. It is a classical problem in combinatorics to show purely combinatorically that $A_\mu - A_{\mu-1} \geq 0$ for $1 \leq \mu \leq \frac{nr}{2}$. In a later chapter we give a proof of this result that depends upon the decomposition of exterior (or symmetric) powers of indecomposable ν_p-modules in characteristic p. We list below an example.

Example 4.10. Let $n=4$, $r=2$ Then $I = (I_o, I_1, I_2)$. The partitions are listed below

$\|I\| = \mu =$ 0	1	2	3	4	5	6	7	8
400	310	220	211	040	112	022	013	004
		301	130	202	031	103		
				121				

Then $A_o=1$ $A_1=1$ $A_2=2$ $A_3=2$ $A_4=3$ $A_5=2$ $A_6=2$ $A_7=1$ $A_8=1$ and

$$G_{6,2}(X,Y)=X^8+X^7Y+2X^6Y^2+2X^5Y^3+3X^4Y^4+2X^3Y^5+2X^2Y^6+XY^7+Y^8 ,$$

and

$$(X-Y)G_{6,2}(X,Y) = X^9 + X^7Y^2 + X^5Y^4 - X^4Y^5 - X^2Y^7 - Y^9.$$

The polynomials appear in [Schur (1968)] where it is also shown that $A_\mu - A_{\mu-1} \geq 0$ for $1 \leq \mu \leq \frac{nr}{2}$ (See Satz 2.2 1. [Schur] (1968)).

III. DECOMPOSITIONS.

In this chapter we give the decompositions of the exterior and symmetric powers of indecomposables. Since our proofs work only for indecomposables of dimension up to the characteristic (i.e. we cannot decompose $\Lambda^i(V_{p+1})$, for example) we will restrict immediately to the consideration of indecomposables over ν_p. In order to save on notation, then, we assume everything is in characteristic p and that $\nu = \nu_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. In the final section of this chapter we will discuss what is known in general.

1. The decomposition of exterior powers.

This section is devoted to determining the decomposition of the exterior powers $\Lambda^r(V_n)$ of the indecomposables V_n. Under the assumptions in the introduction above we calculate these for $1 \leq n \leq p$.

Proposition 1.1. In $R\nu[t]$

$$\lambda_t(V_2 \otimes V_n) = \lambda_t(V_2) \otimes \lambda_t(V_n).$$

Proof : To demonstrate this result is in enough to show that the

the coefficients of t^r in both polynomials are the same for $1\leq r<p$, since both polynomials are reflexive i.e. the coefficient of t^i is the same as the coefficient of t^{2n-i}.

But the equality of these two coefficients is equivalent to finding the expression for $\Lambda^r(V_2 \otimes V_n)$ in terms of the $\Lambda^s(V_2) \otimes \Lambda^t(V_n)$ for $s,t \leq r$. As $r<p$ we can use Corollary II. 3.14 with $E = (\mathbb{Z}[(r!)^{-1}])^2$ and $F = (\mathbb{Z}[(r!)^{-1}])^n$, each with the matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 1\end{pmatrix}$ operating. Then the decomposition, being functorial, changes base for any homomorphism

$$\mathbb{Z}[(r!)^{-1}] \longrightarrow k.$$

In particular, since $r<p$, there is such a homomorphism to k for char $k = p$.

Remark 1.2. The examples at the end of Chapter II show why this argument fails for ν_{p^α} for $\alpha > 1$.

In chapter I we discussed the ring $R\nu[\mu]$ where $(1+\mu t)(1+\mu^{-1}t) = 1+V_2t+t^2$, i.e. $\mu+\mu^{-1} = V_2$. Thus $\lambda_t(V_2) = (1+\mu t)(1+\mu^{-1}t)$ in $R\nu[\mu][[t]]$. Using the result of Proposition 1.1. and the multiplication $V_2 \otimes V_n = V_{n+1} \oplus V_{n-1}$ (Formula II.b. in Multiplication table) we can express $\lambda_t(V_n)$ in the ring $R\nu[\mu][[t]]$.

Proposition 1.3. : Suppose $1\leq n\leq p$. Then $\lambda_t(V_{n+1}) = \prod_{\nu=0}^{n} (1+\mu^{n-2\nu}t)$

Proof : We know $\lambda_t(V_2) = (1+\mu t)(1+\mu^{-1}t) = \prod_{\nu=0}^{1}(1+\mu^{1-2\nu}t)$. Suppose, by induction, that

$$\lambda_t(V_m) = \prod_{\nu=0}^{m-1}(1+\mu^{m-1-2\nu}t) \quad \text{for} \quad 1\leq m\leq n.$$

Since $\lambda_t(V_{n+1} \oplus V_{n-1}) = \lambda_t(V_{n+1})\,\lambda_t(V_{n-1})$, we get

$$\lambda_t(V_{n+1}) = \lambda_t(V_{n-1})^{-1}\,\lambda_t(V_{n+1} \oplus V_{n-1}).$$

By Proposition 1.1 , we have

$$\lambda_t(V_n \otimes V_2) = \lambda_t(V_n) \otimes \lambda_t(V_2)$$

So $\lambda_t(V_{n+1}) = \prod_{\nu=0}^{n-2}(1+\mu^{n-2-2\nu}t)^{-1}\left(\left(\prod_{\nu=0}^{n-1} 1+\mu^{n-1-2\nu}t\right) \otimes \prod_{\nu=0}^{1}(1+\mu^{1-2\nu}t)\right)$

$$= \prod_{\nu=0}^{n-2} (1+\mu^{n-2-2\nu} t)^{-1} \prod_{\nu=0}^{n-1} (1+\mu^{n-2\nu} t) \prod_{\nu=0}^{n-1} (1+\mu^{n-2-2\nu} t)$$

$$= \left(\prod_{\nu=0}^{n-1} (1+\mu^{n-2\nu} t)\right) . \; (1+\mu^{n-2-2(n-1)} t)$$

$$= \prod_{\nu=0}^{n} (1+\mu^{n-2\nu} t) \qquad \text{QED}$$

Since $\prod_{\nu=0}^{n-1} (1+\mu^{n-1-2\nu} t) = \sum_{r=0}^{n+1} a_r(\mu^{-n+1}, \mu^{-n+2}, \ldots, \mu^{n+2})\, t^r$, we can calculate the exterior powers in terms of elementary symmetric functions.

<u>Corollary 1.4</u>. <u>In</u> $R\nu[\mu]$ <u>we have</u>

$$\Lambda^r(V_n) = a_r(\mu^{-n+1}, \ldots, \mu^{n-1})$$

$$= G_{n,r}(\mu^{-1}, \mu) = \frac{(\mu^{-n}-\mu^{n}) \ldots (\mu^{-n+r-1}-\mu^{n-r+1})}{(\mu^{-r}-\mu^{r}) \ldots (\mu^{-1}-\mu)}$$

<u>Proof</u> : By definition and by II.4.7. QED

<u>Corollary 1.5</u>. : <u>In</u> $R\nu$ <u>we have</u>

$$\Lambda^r(V_n) = \binom{V_n}{V_r} .$$

<u>Proof</u> : By corollary 1.4 , I.1.8. and I.1.9. QED

<u>Corollary 1.6.</u> : <u>In</u> $R\nu$ <u>we have</u>

$$\Lambda^r(V_n) = \bigoplus_{m=1}^{p} d_m V_m$$

<u>where the</u> d_m <u>are determined as follows</u> :

<u>Let</u> $g = \left[\frac{r(n-r)+1}{2p}\right]$. <u>Consider the expansion</u>

$$(t-t^{-1})\, t^{-2gp}\, G_{n,r}(t^{-1}, t) = \sum_{\ell \gg -\infty} c_\ell\, t^\ell .$$

<u>Then</u> $d_m = c_m$ <u>for</u> $1 \leqslant m \leqslant p-1$ <u>and</u>

$$d_p = p^{-1}\left\{\binom{n}{r} - \sum_{m=1}^{p-1} m\, d_m\right\}.$$

Proof. From 1.4. and I.1.7. QED

Corollary 1.7. : Suppose $(X-Y)\,G_{n,r}(X,Y) = \sum_{s=o}^{r(n-r)+1} d'_s\, X^{r(n-r)+1-s}\, Y^s$

Then $d'_s \geq 0$ for $1 \leq s \leq \frac{r(n-r)}{2}$.

Proof : Suppose $p > \frac{r(n-r)}{2} + 1$. Then in Cor. 1.5 above $g=o$. The coefficients d'_s are just a rearrangement of the d_s. QED

Remark 1.8. The coefficients d'_s are the successive differences of the number of partitions as given in II.4.9. As a corollary of 1.7. we see that the number of partitions limited as in III.4.6 is increasing to a certain point, then decreases again. As an example (see also remark II.4.9.) consider the pair $(7,3) = (n,r)$, Then $r(n-r) = 12$. So we consider partitions of 3 into 5 parts $I = (I_o,\ldots,I_4)$ with the weight of the partition

$$0.I_0 + 1.I_1 + \ldots + 4I_4 = 12$$
$$I_0 + I_1 + \ldots + I_4 = 3.$$

We list these according to weights (there are 35 of them)

12	11	10	9	8	7	6	5
00003	00012	00102	01002	10002	10011	10101	10110
		00021	00111	01011	01101	10020	02010
			00030	00201	01020	01110	01200
				00120	00210	00300	11001
						02001	

This is symmetric about 6... if $(I_0\ I_1\ I_2\ I_3\ I_4)$ appears here, then $(I_4\ I_3\ I_2\ I_1\ I_0)$ appears somewhere (symmetrically about 6) on the right. The coefficients A_μ can be read from this diagram...

$$A_0=1,\ A_1=1,\ A_2=2,\ A_3=3,\ A_4=4,\ A_5=4,\ A_6=5,\ A_7=4,\ldots$$

So

$$G_{7,3} = X^{12}+X^{11}Y+2X^{10}Y^2+3X^9Y^3+4X^8Y^4+4X^7Y^5+5X^6Y^6+ Y^{12}+XY^{11}+2X^2Y^{10}+3X^3Y^9+4X^4Y^8+4X^5Y^5$$

and $$(X-Y)G_{7,3} = X^{13}+X^{11}Y^2+X^{10}Y^3+X^9Y^4+X^7Y^6 -Y^{13}-X^2Y^{11}-X^3Y^{10}-X^4Y^9-X^6Y^7 .$$

Furthermore, for "large" p we have the decomposition

$$\Lambda^3(V_7) = V_1 \oplus V_5 \oplus V_7 \oplus V_9 \oplus V_{13}$$

while in characteristic 7

$$\Lambda^3(V_7) \text{ is free of rank } 5 \ldots \Lambda^3(V_7) = 5.V_7$$

and $\Lambda^3(V_7) = V_1 \oplus V_5 \oplus V_7 \oplus 2V_{11}$ in characteristic 11.

So in particular, for "large p" the decomposition of $\Lambda^r(V_n)$ can be read from the array of partitions, the indecomposable V_n appearing if there is a row of length n... and it appears as many times as there are rows.

2. The decomposition of the symmetric powers.

We can now use the decomposition of the exterior powers to find the decomposition of the symmetric powers. However a reduction to small powers is first required.

We consider the $k\nu$-module V_{n+1} generated by elements $e_n, e_{n-1}, \ldots, e_o$ over k with ν-action given by $\sigma(e_j)=e_j+e_{j-1}$ for $j>o$ and $\sigma(e_o) = e_o$. There is an element $N \in S^p(V_{n+1})$ given by $N = \prod_{s=o}^{p-1} \sigma^s(e_n)$. Another basis is given by the elements

$$\{e_n, \sigma(e_n), \sigma^2(e_n), \ldots, \sigma^n(e_n)\}.$$

In case $n+1=p$, then these elements are

$$\{e_{p-1}, \sigma(e_{p-1}), \ldots, \sigma^{p-1}(e_{p-1})\}.$$

and σ acts as a cyclic permutation. Label these elements $x_1, x_2, \ldots, x_p$ respectively. Then $\sigma(x_i) = x_{i+1}$; i taken modulo p.

Proposition 2.1. : If $p \nmid r$, then $S^r(V_p)$ in a free $k\nu$-module of rank $p^{-1}\binom{p+r-1}{r}$.

Proof. Consider a monomial $x_1^{e_1} \ldots x_p^{e_p}$ in $S^r(V_p)$. Then $\sigma(x_1^{e_1} \ldots x_p^{e_p}) = x_2^{e_1} x_3^{e_2} \ldots x_p^{e_{p-1}} x_1^{e_p}$. The orbit of this monomial under the action of σ has length p or 1. If the length is 1, then $e_p = e_1 = e_2 = \dots = e_{p-1}$, so $\deg(x_1^{e_1} \dots x_p^{e_p}) = pe_1$. But $pe_1 = r$, a contradiction. Hence the orbit of the monomial has length p. Clearly the elements in the orbit are linearly independant over k, so they span a free and hence injective $k\mathcal{V}$-module

QED

If $e = e_1 = e_2 = \dots = e_p$, then $x_1^e \dots x_p^e = (x_1 \dots x_p)^e = N^e \in S^{pe}(V_p)$ This is the only monomial whose orbit has length less than p. Hence the next proposition.

<u>Proposition 2.2.</u> : <u>For each</u> $e \geqslant o$ <u>the decomposition</u> $S^{pe}(V_p) \cong k\, N^e \oplus F$, <u>where</u> F <u>in a free</u> $k\mathcal{V}$-<u>module of rank</u> $\frac{1}{p}\left\{\binom{pe+p-1}{pe}-1\right\}$.

QED

For each n there is a surjection of $k\mathcal{V}$-modules $V_{n+1} \longrightarrow V_n$ (with kernel generated by the socle of V_{n+1}). Since N in $S^p(V_{n+1})$ reduces to N in $S^p(V_n)$ under the induced homomorphism, and since N is invariant, we get a commutative diagram

$$\begin{array}{ccc}
S^r(V_{n+1}) & \xrightarrow{N?} & S^{r+p}(V_{n+1}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
S^r(V_n) & \xrightarrow{N?} & S^{r+p}(V_n)
\end{array}$$

The element $e_o \in S^1(V_{n+1})$ is also invariant. It is clear that $\mathrm{Ker}(S^r(V_{n+1}) \longrightarrow S^r(V_n)) = e_o\, S^{r-1}(V_{n+1})$. Hence we can write a larger diagram of $k\mathcal{V}$-modules with exact columns and injections on the left :

$$(2.3.)\qquad \begin{array}{ccc}
0 & & 0 \\
\downarrow & & \downarrow \\
S^{r-1}(V_{n+1}) & \xrightarrow{N?} & S^{r-1+p}(V_{n+1}) \\
\downarrow{\scriptstyle e_0?} & & \downarrow{\scriptstyle e_0?} \\
S^r(V_{n+1}) & \xrightarrow{N?} & S^{r+p}(V_{n+1}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
S^r(V_n) & \xrightarrow{N?} & S^{r+p}(V_n) \\
\downarrow & & \downarrow \\
0 & & 0
\end{array}$$

As a consequence of 2.1. and 2.2. we get that $\mathrm{Cok}(N?)$ is a free

$k\nu$ -module for $n+1=p$. Using this plus induction (decreasing) we get

<u>Proposition 2.4.</u> <u>The</u> $\mathrm{Cok}(S^r(V_{n+1}) \xrightarrow{N?} S^{r+p}(V_{n+1}))$ <u>is a free</u> $k\nu$ <u>-module of rank</u> $p^{-1}\left\{\binom{r+p+n}{n} - \binom{r+n}{n}\right\}$ <u>for all</u> n <u>and</u> r.

<u>Proof</u>. : In diagram 2.3. we get an exact sequence of cokernels

$$0 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_2 \longrightarrow F_3 \longrightarrow 0.$$

Since F_1 and F_2 are free (by induction starting at $n+1=p$) then F_3 is also free (again use that free is equivalent to injective). Q.E.D.

<u>Corollary 2.5.</u> <u>Let</u> $r=kp+r_o$ <u>with</u> $k \geqslant o$, $o \leqslant r_o < p$. <u>Then</u>

$$0 \longrightarrow S^{r_o}(V_{n+1}) \xrightarrow{N^k ?} S^r(V_{n+1}) \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

<u>is exact with</u> F <u>a free</u> $k\nu$ <u>-module of rank</u>

$$p^{-1}\left\{\binom{r+n}{n} - \binom{r_o+n}{n}\right\}$$ Q.E.D.

Consequently the decomposition of $S^r(V_{n+1})$ depends only on the decomposition of $S^r(V_{n+1})$ for $o \leqslant r < p$. For thus we can use (II.2.4) base changed to k.

<u>Proposition 2.6.</u> : <u>For</u> $o \leqslant r < p$, <u>in</u> $R\nu[\mu]$ <u>we have</u>

$$S^r(V_{n+1}) = G_{n+r,r}(\mu^{-1},\mu)$$

<u>Proof</u>. We go by induction on r. By II(2.4) there is a split exact sequence

$$0 \to \Lambda^r(V_{n+1}) \to \Lambda^{r-1}(V_{n+1}) \otimes S^1(V_{n+1}) \to \cdots \to \Lambda^1(V_{n+1}) \otimes S^{r-1}(V_{n+1}) \to S^r(V_{n+1}) \to 0$$

By corollary II.4.8. there is an equality

$$\sum_{\nu=o}^{r} (-1)^{\nu} (XY)^{\binom{r-\nu}{2}} G_{n+1,r-\nu}(X,Y)\, G_{n+\nu,\nu}(X,Y) = 0.$$

Hence in $R\nu$ we have

$$\sum_{\nu=o}^{r} (-1)^{\nu} \Lambda^{r-\nu}(V_{n+1}) \otimes S^{\nu}(V_{n+1}) = 0.$$

Therefore

$$(-1)^r S^r(V_{n+1}) + \sum_{\nu=o}^{r-1} (-1)^{\nu} G_{n+1,r-\nu}(\mu^{-1},\mu)\, G_{n+\nu,\nu}(\mu^{-1},\mu) = 0$$

by the induction hypothesis. But from the first formula we get

$$(-1)^r G_{n+r,r}(\mu^{-1},\mu) + \sum_{\nu=o}^{r-1} (-1)^{\nu} G_{n+1,r-\nu}(\mu^{-1},\mu)\, G_{n+\nu,\nu}(\mu^{-1},\mu) = 0$$

Hence $S^r(V_{n+1}) = G_{n+r,r}(\mu^{-1},\mu)$ as desired. Q.E.D.

We note some unusual corollaries before going on.

Corollary 2.7. : The following isomorphisms of $k\mathcal{V}$-modules hold :

(a) $S^r(V_{n+1}) \cong \Lambda^r(V_{n+r})$ for $n+r \leqslant p$.

(b) $S^r(V_{n+1}) \cong S^n(V_{r+1})$ for $1 \leqslant n+1 \leqslant p$, $1 \leqslant r+1 \leqslant p$

(b') $V_{n+1} \cong S^n(V_2)$

Proof : We have the following equalities

$$S^r(V_{n+1}) = G_{n+r,r}(\mu^{-1},\mu) = \Lambda^r(V_{n+r}) = G_{n+r,n}(\mu^{-1},\mu) = S^n(V_{r+1}).$$

Then (b') is a result of (b) applied with $r=1$. Q.E.D.

Remark 2.8. : This last isomorphism is well known and very useful in characteristic zero. To see how it is obtained, consider the group $GL(2,k)$ operating on $k[u,v]$. A binary n-form can be written $a_o u^n + \binom{n}{1} a_1 u^{n-1}v + \binom{n}{2} a_2 u^{n-2}v^2 + \ldots + a_n v^n$. So the space $S^n(V_2)$ of all binary n-forms is a vector space of dimension $n+1$. The action of $GL(2,k)$ on V_2 induces an action of $GL(2,k)$ on $S^n(V_2)$. Suppose $M = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \in GL(2,k)$ and $Mu = \alpha u + \gamma v$ and $Mv = \beta u + \delta v$. Then

$$M(a_o u^n + \tbinom{n}{1} a_1 u^{n-1} v + \ldots + a_n v^n)$$

$$= a_o(\alpha u+\gamma v)^n + \tbinom{n}{1} a_1(\alpha u+\gamma v)^{n-1}(\beta u+\delta v) + \ldots + a_n(\beta u+\gamma v)^n$$

$$= (a_o\alpha^n + \tbinom{n}{1} a_1\alpha^{n-1}\beta + \ldots + a_n\beta^n)u^n + \tbinom{n}{1}(a_o\alpha^{n-1}\gamma + a_1(\alpha^{n-1}\delta + \tbinom{n}{1}\alpha^{n-2}\delta\beta + .)u^{n-1}v$$
$$+ \ldots + (a_o\gamma^{n-1} + \tbinom{n}{1} a_1\gamma^{n-1}\delta + \ldots + a_n\gamma^{n-1})v^n$$

So $M(a_o,\ldots,a_n) = ((a_o\alpha^n + \binom{n}{1} a_1\alpha^{n-1}\beta + \ldots), (a_o\alpha^{n-1}\gamma + a_1\{\ldots\} + \ldots), \ldots,$
$a_o\gamma^n + \binom{n}{1} a_1\gamma^{n-1}\delta + \ldots + a_n\gamma^{n-1}).$

In particular take $\sigma = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$. Then we have

$$\sigma(a_o u^n + \tbinom{n}{1} a_1 u^{n-1} v + \tbinom{n}{2} a_2 u^{n-2} v + \ldots + a_n v^n)$$

$$= a_o(u+v)^n + \tbinom{n}{1} a_1 (u+v)^{n-1} v + \tbinom{n}{2} a_2 (u+v)^{n-2} v^2 + \ldots + a_n v^n$$

$$= a_o u^n + \tbinom{n}{1}(a_o + a_1)u^{n-1}v + \tbinom{n}{2}(a_o + \tbinom{2}{1} a_1 + a_2)u^{n-2} v^2$$

$+ \binom{n}{3}(a_o + \binom{3}{1}a_1 + \binom{3}{2} a_2+a_3)u^{n-3}v^3+\ldots+(a_o + \binom{n}{1}a_1+\ldots+a_n) \; v^n$

so $\sigma\begin{pmatrix} a_o \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_o \\ a_o+a_1 \\ \vdots \\ a_o+\binom{n}{1}a_1+\ldots+a_n \end{pmatrix}$, the general term being

$\sigma(a_j) = a_o + \binom{j}{1} a_1 + \binom{j}{2} a_2+\ldots+a_j$. Suppose $X_0, X_1,\ldots,X_n$ is the basis of the dual space $\mathrm{Hom}_k(S^n(V_2),k)$ with $X_i(a_j) = \delta_{n-1,j}$. The contragredient representation then gives

$$(MX_j)(a_k) = X_j(M^{-1}a_k).$$

It is easy to check that $\sigma^{-1}(a_k) = \sum_{j=o}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} a_j$.

Hence $(\sigma X_j)(a_k) = X_j(\sigma^{-1}a_k) = X_j(\sum_{\nu=o}^{k}(-1)^{k-\nu}\binom{k}{\nu}a_\nu)=(-1)^{k-n+j}\binom{k}{n-j}$

So $\sigma X_j = \sum_{k=o}^{n} (-1)^{k+j-n} \binom{k}{n-j} X_{n-k}$. I.e, we have

$\sigma X_o = X_o, \sigma X_1 = -\binom{n}{n-1}X_o + X_1 , \sigma X_2 = \binom{n}{n-2} X_o - \binom{n}{n-1} X_1 + X_2$

etc...

It we set $e_n = a_n$, $e_{n-1} = \sigma(e_n) - e_n$, $e_{n-2} = \sigma(e_{n-1}) - e_{n-1}$, etc., then $\{e_n, e_{n-1},\ldots,e_o\}$ forms a basis for $S^n(V_2)$ for which the matrix of σ is

$$\begin{pmatrix} 1 & 0\ldots & & & 0 \\ 1 & 1 & 0\ldots & & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0\ldots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0\ldots 0 & & 1 & 1 & 0 \\ 0\ldots & & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

If char $k=p > n$, then all these calculations hold over k and we obtain the isomorphism of $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-modules

$$V_{n+1} \cong S^n(V_2)$$

given in the proposition above. See also I.2.

Using the Valby Bodega theorem we get the following decomposition

<u>Corollary 2.9.</u> : <u>Suppose</u> $g = \left[\frac{nr+1}{2p}\right]$ <u>and that</u>

$(t-t^{-1})t^{-2gp}(1-t^{2p})^{-1} \; G_{n+r,r}(t^{-1},t) = \sum_{\nu \geq -\infty} c_\nu \, t^\nu$ <u>in</u> $\mathbb{Z}[[t]][t^{-1}]$

Then

$$S^r(V_{n+1}) = \bigoplus_{j=1}^{p} d_j\, V_j \qquad \underline{\text{where}}$$

$d_j = c_j$ for $1 \leqslant j \leqslant p-1$ <u>and</u> $d_p = p^{-1}\left\{\binom{n+r}{r} - \sum_1^{p-1} j\, d_j\right\}$. Q.E.D.

We can use part of the diagram (2.3.) in order to show that the $S^r(V_{n+1})$ are free for large r.

<u>Proposition 2.10.</u> : <u>Suppose</u> $1 \leqslant r \leqslant p-1$ <u>and</u> $0 \leqslant n \leqslant p-1$. <u>Then</u>

(a) $S^r(V_{n+1})$ <u>is a free</u> $k\mathcal{V}$<u>-module if</u> $r+n \geqslant p$.

(b) $S^r(V_{n+1}) \cong \text{Free} \oplus V_s$ if $r+n = p-1$.

<u>Proof</u> : There are three proofs of these. One involves the analysis of the expansion of $G_{r+n,r}(t^{-1},t)$, as in the corollary above. Another uses (2.3.). The sequence

$$(2.3') \quad 0 \longrightarrow S^r(V_{n+1}) \xrightarrow{e_o^?} S^{r+1}(V_{n+1}) \longrightarrow S^{r+1}(V_n) \longrightarrow 0$$

is exact. If $n+1=p$, then $S^r(V_p)$ and $S^{r+1}(V_p)$ are free and injective, for certain values of r (that is $1 \leqslant r \leqslant p-2$). Then $S^{r+1}(V_p)$ is free. We can use (2.3') so long as $S^r(V_{n+1})$ and $S^{r+1}(V_{n+1})$ are free. A short analysis gives (a).

As for (b), since $e_o^? : V_{p-1} \hookrightarrow S^2(V_{p-1})$ and $S^2(V_{p-1})$ is free, and hence injective, the image of V_{p-1} in $S^2(V_{p-1})$ is contained in one injective indecomposable component of $S^2(V_{p-1})$. Hence $S^2(V_{p-2}) \cong \text{Free} \oplus V_1$. Now $S^2(V_{p-2}) \subset S^3(V_{p-2})$ and $S^3(V_{p-2})$ is free. So V_1 is contained in one of the indecomposable injectives, hence $S^3(V_{p-3}) \cong \text{Free} \oplus V_{p-1}$. Continue. Q.E.D.

3. <u>The decomposition of symmetric powers of</u> V_{p^m}.

In this section we consider the indecomposable $\mathcal{V}_{p^m}$-modules V_{p^m} and V_{p^m-1}. As in the beginning of the previous section we take as basis for V_{p^m} elements $x_o, x_1, \ldots, x_{p^m-1}$ with action given by $\sigma(x_i) = x_{i+1}$ (i taken modulo p^m), where σ is a generator of $\mathcal{V}_{p^m}$. Note that the induced action on $S^r(V_{p^m})$ takes monomials in the x_i to monomials. That is, if $\underline{e} = (e_o, \ldots, e_{p^m-1})$ is a multi-index and $x_o^{e_o} \ldots x_{p^m-1}^{e_{p^m-1}} = \underline{x}^{\underline{e}}$, then $S^r(\sigma)(\underline{x}^{\underline{e}}) = \underline{x}^{s(\underline{e})}$

where s is the permutation $s(e_o,\dots,p_{p^m-1}) = (e_{p^m-1}, e_o, e_1,\dots)$, and $r = |\underline{e}|$.

Consider the element $y_o := x_o\, x_{p^{m-1}} \cdots x_{(p-1)p^{m-1}} = \prod_{j=o}^{p-1} \sigma^{jp^{m-1}}(x_o)$ and its conjugates $y_i = x_i\, x_{i+p^{m-1}} \dots$. A monomial in the p^{m-1} elements $y_o,\dots y_{p^{m-1}-1}$ will be denoted by $\underline{y}^{\underline{f}}$.

The following results are to be found in [Fossum-Griffith.]

Lemma 3.1. : Suppose $\underline{x}^{\underline{e}}$ is a monomial of degree $r = |\underline{e}|$. If the orbit of $\underline{x}^{\underline{e}}$ under ν_{p^m} has fewer than p^m elements, then $p|r$ and $\underline{x}^{\underline{e}} = \underline{y}^{\underline{f}}$ where $\underline{f} = (e_o, e_1,\dots,e_{p^{m-1}-1})$.

Proof. As elements in the orbit are monomials, the length of the orbit is the dimension of the vector space spanned by the orbit. Consider the subgroup of ν_{p^m} that stabilizes $\underline{x}^{\underline{e}}$. If the orbit has fewer that p^m-elements, then this is a proper subgroup and hence contains $\sigma^{p^{m-1}}$. Thus $\sigma^{p^{m-1}}(\underline{x}^{\underline{e}}) = \underline{x}^{\underline{e}}$, so $e_{i+p^{m-1}} = e_i$ for each i (modulo p^m). The remainder of the proof is now clear.
Q.E.D.

Proposition 3.2. If $p \nmid r$, then $S^r(V_{p^m})$ is a free (and hence injective) $k\nu_{p^m}$-module of rank $p^{-m}\binom{r+p^m-1}{r}$.

Proof. Consider a monomial $\underline{x}^{\underline{e}}$. Since $p \nmid |\underline{e}|$, the orbit of $\underline{x}^{\underline{e}}$ has length p^m and spans a $k\nu_{p^m}$-module of dimension p^m. Thus this module splits off from $S^r(V_{p^m})$ as a $k\nu_{p^m}$-module. As the monomials are linearly independent, this gives a decomposition into injective (or free) $k\nu_{p^m}$-modules.
Q.E.D.

In $S^p(V_{p^m})$ there is the invariant subspace spanned by the conjugates of y_o. It is seen that this subspace has dimension p^{m-1}, so we get $k\nu_{p^m}\, y_o \cong V_{p^{m-1}}$. By lemma 3.1 , the orbits of other monomials are of length p^m and so these each span a free $k\nu_{p^m}$-module. Thus $S^p(V_{p^m}) \cong F \oplus V_{p^{m-1}}$ where F is free of rank

$$p^{-m}\left(\binom{p^m+p-1}{p} - p^{m-1}\right)$$

and $V_{p^{m-1}}$ is spanned by $y_o,\dots,y_{p^{m-1}-1}$. Thus we can consider monomials in the y_i.

Proposition 3.3. The inclusion $S^r(V_{p^{m-1}}) \hookrightarrow S^{pr}(V_{p^m})$, *with* $S^r(V_{p^m})$ *spanned by the monomials in the* y_i *of degree* r, *has a cokernel that is a free* $k\mathcal{V}_{p^m}$*-module. Hence*

$$S^{pr}(V_{p^m}) \cong S^r(V_{p^{m-1}}) \oplus F$$

where F *is a free* $k\mathcal{V}_{p^m}$*-module of rank*

$$p^{-m}\left\{\binom{p^m+pr-1}{pr} - \binom{p^{m-1}+r-1}{r}\right\}.$$

Proof. By Lemma 3.1. a monomial $\underline{x}^{\underline{e}}$ is in the image of $S^r(V_{p^{m-1}})$ if and only if its orbit has length less than p^m. Suppose that its orbit has length p^m. Then $k\mathcal{V}_{p^m}\,\underline{x}^{\underline{e}}$ is an injective submodule of $S^{pr}(V_{p^m})$ with $(k\mathcal{V}_{p^m}\,\underline{x}^{\underline{e}}) \cap S^r(V_{p^{m-1}}) = 0$. Q.E.D.

As $V_{p^{m-1}}$ is $k\mathcal{V}_{p^{m-1}}$ and the action is through the surjection $k\mathcal{V}_{p^m} \longrightarrow k\mathcal{V}_{p^{m-1}}$, we can assume, by induction, that we know the decomposition of $S^r(V_{p^{m-1}})$ into indecomposable $k\mathcal{V}_{p^{m-1}}$-modules (and hence indecomposable $k\mathcal{V}_{p^m}$-modules). In particular we can consider the subalgebra $S^\cdot(V_{p^{m-1}}) \hookrightarrow S^\cdot(V_{p^m})$, each component $S^\cdot(V_{p^{m-1}})$ being in degree pr in $S^\cdot(V_{p^m})$. So we get a chain

$$S^\cdot(V_1) \hookrightarrow S^\cdot(V_p) \hookrightarrow S^\cdot(V_{p^2}) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow S^\cdot(V_{p^{m-1}}) \hookrightarrow S^\cdot(V_{p^m})$$

with $V_1 = \langle Nx_o\rangle = k(\prod_{i=o}^{p^m-1} \sigma^i x_o)$, $V_p = kN_0 + \ldots + kN_{p-1}$ where

$$N_0 := \prod_{i=o}^{p^{m-1}-1} \sigma^{ip} x_o,\ N_1 := \sigma N_0, \ldots, N_{p-1} = \sigma^{p-1} x_o, \text{ etc...}$$

These decompositions are now used to study the decompositions of $S^r(V_{p^{m-1}})$. Let $e_o = \sum_{i=o} \sigma^i(x_o)$. Then e_o is the unique (up to constant multiple) invariant of $S^1(V_{p^m}) = V_{p^m}$. So we get the exact sequence

$$0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow V_{p^m} \longrightarrow V_{p^{m-1}} \longrightarrow 0.$$

As before we consider the surjections $S^r(V_{p^m}) \longrightarrow S^r(V_{p^{m-1}})$ induced by $e_o \longmapsto o$. Then we get the exact sequences

$$0 \longrightarrow S^{r-1}(V_{p^m}) \xrightarrow{e_o^?} S^r(V_{p^m}) \longrightarrow S^r(V_{p^{m-1}}) \longrightarrow 0.$$

<u>Proposition 3.4.</u> : <u>If</u> $r \not\equiv 0,1 \pmod p$, <u>then</u> $S^r(V_{p^m-1})$ <u>is free of rank</u>

$$p^{-m}\binom{p^m-2+r}{r}$$

<u>as a</u> $k\mathcal{V}_{p^m}$<u>-module</u>.

<u>Proof</u> : In this case $r \not\equiv 0,1 \pmod p$, the modules $S^{r-1}(V_{p^m})$ and $S^r(V_{p^m})$ are both free and hence injective, by 3.2. Hence the exact sequence above splits. Q.E.D.

<u>Proposition 3.5</u>. <u>If</u> $r \equiv 0 \pmod p$, <u>then</u> $S^r(V_{p^m-1}) \cong S^{r/p}(V_{p^{m-1}}) \oplus F$ <u>where</u> F <u>is a free</u> $k\mathcal{V}_{p^m}$<u>-module of rank</u>

$$p^{-m}\left\{\binom{p^m-2+r}{r} - \binom{p^{m-1}-1+r/p}{r/p}\right\}$$

<u>Proof</u> : In case $r \equiv 0 \pmod p$, the module $S^{r-1}(V_{p^m})$ is injective while $S^r(V_{p^m}) \cong S^{r/p}(V_{p^{m-1}}) \oplus G$. Hence again the sequence preceeding Proposition 3.4. splits and the image of $S^{r-1}(V_{p^m})$, being a submodule of G, splits to give the result. Q.E.D.

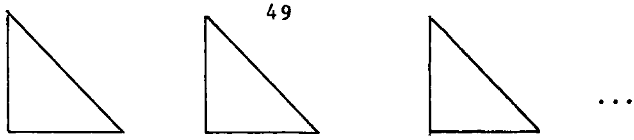
<u>Proposition 3.6.</u> <u>If</u> $r \equiv 1 \pmod p$, <u>then</u> <u>$S^r(V_{p^m-1}) \cong E(S^{(r-1)/p}(V_{p^{m-1}}))/S^{(r-1)/p}(V_{p^{m-1}}) \oplus F$</u>, <u>where</u> $E(X)$ <u>denotes the injective envelope of</u> X <u>and</u> F <u>is a free</u> $k\mathcal{V}_{p^m}$<u>-module of a rank that can be determined.</u>

<u>Proof</u>. : As $S^r(V_{p^m})$ is injective, it contains the injective envelope of $S^{r-1}(V_{p^m})$. Since $S^{r-1}(V_{p^m}) = S^{(r-1)/p}(V_{p^{m-1}}) \oplus G$, the statement of the proposition follows. Q.E.D.

<u>Remark 3.7</u>. : It is possible, using these types of arguments, to show that

$$S^r(V_{p^m-t})$$

is a free $k\mathcal{V}_{p^m}$-module for r and t in the ranges $0 \leq t < p$ and $r \equiv t+1, t+2, \ldots, p-1 \pmod p$, and that $S^r(V_{p^m-t}) \cong S^{r/p}(V_{p^{m-1}}) \oplus$ Free, for $r \equiv 0 \pmod p$. Examples indicate that the non free parts in the triangle $1 \leq t < p$, $1 \leq r \leq t$, repeat for r modulo p, so we get a seheme



r+o r+1p r+2p

so that $S^r(V_{p^m-t}) \cong S^{r-p}(V_{p^m-t}) \oplus$ Free. However rather than verify this it would be more interesting and satisfactory to find the explicit decompositions of $S^r(V_{n+1})$ for all n.

(This material, except for (3.4., 3.5. and 3.6.), which follows immediately from the previous results, is found in [Fossum and Griffith (1975)]. It is included for use in later chapters).

4. Table of decompositions for small p.

In this section the decompositions of $S^r(V_{n+1})$ are given for $p = 2, 3, 5, 7, 11$.

	$S^0(V_n)$	$S^1(V_n)$	$S^2(V_n)$	$S^3(V_n)$	$S^4(V_n)$	$S^5(V_n)$	$S^6(V_n)$	$S^7(V_n)$	$S^8(V_n)$	$S^9(V_n)$	$S^{10}(V_n)$	$S^{11}(V_n)$
p=2	1	2	2,1									
	1	1	1									
	1	3	2.3	3.3,1								
p=3	1	2	3	3,1								
	1	1	1	1								
	1	5	3.5	7.5	14.5	25.5,1						
	1	4	2.5	4.5	7.5	11.5,1						
p=5	1	3	5,1	2.5	3.5	4.5,1						
	1	2	3	4	5	5,1						
	1	1	1	1	1	1						
	1	7	4.7									
	1	6	3.7									
	1	5	2.7,1	5.7								
p=7	1	4	7,3	2.7,6	5.7							
	1	3	5,1	7,3	2.7,1	3.7	4.7					
	1	2	3	4	5	6	7	7,1				
	1	1	1	1	1	1	1	1				
	1	11										
	1	10										
	1	9	4.11,1									
	1	8	3.11,3	10.11,10								
	1	7	2.11,5,1	7.11,7	19.11,1							
p=11	1	6	11,7,3	4.11,8,4	11.11,5	22.11,10						
	1	5	9,5,1	2.11,7,5,1	5.11,9,5,1	11.11,5	19.11,1					
	1	4	7,3	10,6,4	2.11,7,5,1	4.11,8,4	7.11,7	10.11,10				
	1	3	5,1	7,3	9,5,1	11,7,3	2.11,5,1	3.11,3	4.11,1			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	11,1
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

<u>Explanation</u> : In the table above the notation $a.n_1$, $b.n_2$, $c.n_3$,... in the column under $S^r(V_n)$ means that

$$S^r(V_n) \cong a\,V_{n_1} \oplus b.V_{n_2} \oplus c.V_{n_3} \oplus \ldots$$

The free modules are left out of the table. The table works for the decomposition of $\Lambda^r(V_n)$ as $\Lambda^r(V_n) \cong S^r(V_{n+1-r})$ according to Proposition II.

Note the following interesting patterns of triangles obtained by consider the number of <u>non</u> free components

p=2

1
1
1 1

p=3

1
1 1
1 1 1

p=5

1
1 1
1 1 1
1 1 1 1
1 1 1 1 1

p=7

1
1 1
1 1 1
1 1 1 1
1 1 2 1 1
1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1

p=11

1
1 1
1 1 1
1 1 1 1
1 1 2 1 1
1 1 2 2 1 1
1 1 3 3 3 1 1
1 1 2 3 3 2 1 1
1 1 2 2 3 2 2 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

We would be interested in knowing the combinatorial significance of these triangles.

IV. THE GEOMETRY OF THE GROUP ACTION

In this section we use a technique due to Serre [Serre (1956)] and used in [Hochster and Roberts (1974)] and [Fossum and Griffith (1975)] to show that the rings of invariants $S^{\cdot}(V_{n+1})^{\nu_{p^m}}$ are not Cohen-Macaulay in general. We also mention here the proof that the complete local rings $\hat{S}^{\cdot}(V_{p^m})^{\nu_{p^m}} := \prod_{r\geq 0} S^r(V_{p^m})^{\nu_{p^m}}$ are factorial, the original proof as found in [Fossum and Griffith (1975)] . This chapter contains no new material and therfore the proofs will be less detailed. A short survey of other, related results concludes the chapter.

1. The rings $S^{\cdot}(V_{n+1})^{\nu_{p^m}}$ are usually not Cohen-Macaulay.

Recall that a local noetherian ring B with maximal ideal is Cohen-Macaulay if there is a regular A-sequence of length = dim B. As usual there is a relation between this local property and a similar property for (positively) graded k-algebras. Suppose $A = \coprod_{r\geq 0} A_r$ is a graded k-algebra with $A_0=k$. Let $\mathfrak{m} = A_+ = \coprod_{r>0} A_r$ be the irrelevant maximal ideal. Then we can speak of regular A-sequences of homogeneous elements in $\mathfrak{m}$. For want of a better notation and terminology, let gr-depth A denote the length of a longest regular A-sequence of homogeneous elements in $\mathfrak{m}$, while depth B denotes the length of a longest regular B-sequence in $\mathfrak{m}$. The next result is well kenown.

<u>Proposition.1.1.</u> : <u>If</u> $A = \coprod_{r\geq 0} A_r$ <u>is graded with</u> $A_0 = k$, <u>then</u>

$$\text{gr-depth } A = \text{depth } A_{\mathfrak{m}}. \qquad \text{Q.E.D.}$$

There is a further relation between A and $A_{\mathfrak{m}}$. Let $P = \mathrm{Proj}(A)$ be the projective scheme associated to the graded algebra A. Let $H^{\cdot}_{\mathfrak{m}}$ be the local cohomology associated to the maximal ideal $\mathfrak{m}$ of $A_{\mathfrak{m}}$. It is also well known that

$$\text{depth } A_{\mathfrak{m}} = \inf\{d : H^d_{\mathfrak{m}}(A_{\mathfrak{m}}) \neq 0\}$$

and

$$\dim A_{\mathfrak{m}} = \sup\{d : H^d_{\mathfrak{m}}(A_{\mathfrak{m}}) \neq 0\} .$$

Furthermore we have the following exact sequence relating the local cohomology to the cohomology of P. [Grothendieck EGA, III, 2.1.4.] .

<u>Proposition 1.2.</u> : <u>Let</u> $\tilde{A}(n)$ <u>denote the</u> $n^{\underline{th}}$ <u>twisted sheaf of</u> O_p<u>-modules. Then</u>

$$0 \longrightarrow H^o_{\mathfrak{m}}(A_{\mathfrak{m}}) \longrightarrow A \longrightarrow \coprod_{n\geq o} H^o(P,\tilde{A}(n)) \longrightarrow H^1_{\mathfrak{m}}(A_{\mathfrak{m}}) \longrightarrow 0$$

<u>is exact and there are isomorphisms</u>

$$\coprod H^r(P,\ \tilde{A}(n)) \xrightarrow{\ \sim\ } H^{r+1}_{\mathfrak{m}}(A_{\mathfrak{m}})$$

<u>for</u> $r\geq 1$. Q.E.D.

We want to use the geometry of the formation of orbit spaces

$$\mathbb{A}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{A}^{n+1}/\nu_{p^m}$$

in order to construct a non zero element in a local cohomology group of low dimension, where $\mathbb{A}^{n+1} = \operatorname{Spec} S^{\cdot}(V_{n+1})$.

In general terms, we consider the projective space $\mathbb{P}^n_k$ associated to $\mathbb{A}^{n+1}$ and the associated quotient $\mathbb{P}^n_k/\nu_{p^m}$. The map $\mathbb{P}^n(k) \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^n(k)/\nu_{p^m}$ is not a principal homogeneous ν_{p^m}-bundle because ν_{p^m} does not operate freely on $\mathbb{P}^n(k)$. But we can find a "nice" closed subset X of $\mathbb{P}^n(k)/\nu_{p^m}$ such that $\pi^{-1}(X) \longrightarrow X$ is a principal homogeneous ν_{p^m}-bundle. The bundle defines a non zero element in $H^1(X,\nu_{p^m})$, and eventually a non zero element in $H^1(X,O_X)$. Using this we deduce that

$$\mathbb{A}^{n+1}/\nu_{p^m} = \operatorname{Spec}(S^{\cdot}(V_{n+1})^{\nu_{p^m}})$$

is not Cohen-Macaulay at the local ring at the origin - for most n. (See problems VI.3.4. and 3.13).

<u>Theorem 1.3</u>. <u>If</u> $n > p^{m-1}+1$, <u>then</u> $S^{\cdot}(V_{n+1})^{\nu_{p^m}}$ <u>is not Cohen-Macaulay</u>.

<u>Proof</u>. We go immediately to the geometry. We can suppose k is algebraically closed and then we can suppose ν_{p^m} acts on $\mathbb{A}^{n+1}(k)$ and then on $\mathbb{P}^n(k)$. Consider the quotient $\mathbb{P}^n(k) \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^n(k)/\nu_{p^m}$, which exists since ν_{p^m} is finite. We want to find a nice closed subset X of $\mathbb{P}^n(k)/\nu_{p^m}$ for which $\pi^{-1}(X) \longrightarrow X$ is étale.

Take projective coordinates $(a_o,\dots a_n)$; $a_n \in k$ of $\mathbb{P}^n(k)$ and let σ, a generator for ν_{p^m}, act by the matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

on the left. Since the subgroups of $\nu_p m$ are linearly ordered, it follows that a point $\underline{a} = (a_o,\ldots,a_n)$ has an orbit of length <u>less</u> than p^m if and only if $a_{p^{m-1}} = a_{p^{m-1}+1} = \ldots = a_n = 0$, a closed subspace of $\mathbb{P}^n(k)$ of codimension $n - p^{m-1}+1 \geqslant 1$.

Let $C = S^{\cdot}(V_{n+1})^{\nu_{p^m}}$, so that $\mathbb{P}^n(k)/\nu_p m = (\mathrm{Proj}\ C)(k)$. As C is noetherian, there is an integer d such that $C(d) := \coprod_{r\geqslant o} C_{rd} = C_o[C_d]$ (and hence $\mathrm{Proj}\ C = \mathrm{Proj}C(d)$). Since $C(d) = C_o[C_d]$, we can embed $\mathbb{P}^n(k)/\nu_p m \hookrightarrow \mathbb{P}^N(k)$ using the (linear) generators for C_d. That is $N+1 = \dim_k C_d$. Since $C(d)$ is a direct summand of C as a $C(d)$-algebra we know that any regular $C(d)$-sequence is a regular C-sequence. Hence $\dim C = \dim C(d)$ and

$$\text{gr-depth } C(d) \geqslant \text{gr-depth } C.$$

So it is enough to show that $C(d)$ is not Cohen-Macaulay.

Let $Q = \{\underline{a} \in \mathbb{P}^n(k) : a_{p^{m-1}} = a_{p^{m-1}+1} = \ldots = a_n = 0\}$ with image $\pi(Q)$ in $\mathbb{P}^n(k)/\nu_p m$. We can find p^{m-1} forms $f_1,\ldots,f_{p^{m-1}}$ in C_d that form part of a system of parameters for $S^{\cdot}(V_{n+1})$ and such that the hypersurface defined by $f_1=0,\ldots,f_{p^{m-1}}=0$ in $\mathbb{P}^n(k)/\nu_p m$ misses $\pi(Q)$ and cuts the variety tranversally. Let X be this variety. Then $\nu_p m$ acts freely on $\pi^{-1}(X)$ so that

$$\pi^{-1}(X) \xrightarrow{\pi} X$$

is a principal homogeneous $\nu_p m$-space. Note that $X = \mathrm{Proj}\ (C(d)/(f_1,\ldots,f_{p^{m-1}}))$.

Denote by $W_{n,X}(X)$ the abelian group scheme of Witt vectors of length r over O_X. By [Serre 1956 , Prop. 13] , the sequences for the Frobenius F

$$0 \longrightarrow \nu_{p^m,X} \longrightarrow W_{m,X} \xrightarrow{F-I} W_{n,X} \longrightarrow 0$$

induces an exact sequence

$$0 \longrightarrow H^1(X, \nu_p m) \longrightarrow H^1(X,W_{m,X}) \xrightarrow{F-I} H^1(X,W_{m,X}) .$$

But $\pi^{-1}(X) \longrightarrow X$ is a non trivial element in $H^1(X, \mu_{p^m})$ and hence $H^1(X, W_{m,X})$ is non zero. As

$$0 \longrightarrow O_X \xrightarrow{V^{m-1}} W_{m,X} \xrightarrow{R} W_{m-1,X} \longrightarrow 0$$

is exact (where V is the Verschiebung) , it follows, by induction on m, that $H^1(X, O_X) \neq 0$.

By Proposition 1.3. we conclude that

$$\text{gr-depth } C(d)/(f_1, \ldots, f_{p^m-1}) \leqslant 2.$$

Were $C(d)$ itself Cohen-Macaulay, then $f_1, \ldots, f_{p^m-1}$ would be part of a system of parameters for $C(d)$, so we would have

$$n+1 = \text{gr-depth } C(d) = p^{m-1} + \text{gr-depth } C(d)/(f_1, \ldots, f_{p^m-1}) \leqslant p^{m-1}+2$$

Hence we conclude that $C(d)$ is not Cohen-Macaulay for $n+1 > p^{m-1}+2$

Q.E.D.

2. These rings are factorial

That the rings of invariants are factorial follows directly from a beautiful and extremely useful result of [Samuel (1964)] , which we repeat here without proof.

Proposition 2.1. *Suppose B is a noetherian normal domain and that G is a finite group of automorphisms of B. Then B^G is a Krull domain and the induced map of divisor class groups $Cl(B^G) \longrightarrow Cl(B)$ has a kernel that is a subgroup of the cohomology group $H^1(G, \mathbb{G}_m(B))$.*

The group $\mathbb{G}_m(B)$ is the group of units of B. When B is a polynomial ring over a field k and G acts as k-algebra automorphisms, then $Cl(B) = 0$ since B is factorial. Also $\mathbb{G}_m(B) = \mathbb{G}_m(k)$ with G acting trivially. Therefore $H^1(G, \mathbb{G}_m(B)) = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{G}_m(k))$ is the group of k characters of G.

Proposition 2.2. *The rings $S^\cdot(V_{n+1})^{\mu_{p^m}}$ are factorial*

Proof. We need only to show that $H^1(\mu_{p^m}, \mathbb{G}_m(k)) = 0$. But as k had characteristic p, there are no non-trivial μ_{p^m}-characters of μ_{p^m}. So $\mathrm{Hom}(\mu_{p^m}, \mathbb{G}_m(k)) = 0$. Q.E.D.

The action of $\nu_p m$ on $S^\cdot(V_{h+1})$ extends to an action on the ring of formal powers series, which we denote by $\hat{S}^\cdot(V_{n+1}) := \prod_{r\geq o} S^r(V_{n+1})$. The ring of invariants is just

$$\hat{S}^\cdot(V_{n+1})^{\nu_p m} = \prod_{r\geq o} S^r(V_{n+1})^{\nu_p m} \quad ,$$

which, as is seen in [Fossum, Griffith (1975)], is the completion of $S^\cdot(V_{n+1})^{\nu_p m}$ at the irrelevant maximal ideal.

We can ask whether $\hat{S}^\cdot(V_{n+1})^{\nu_p m}$ in factorial, and it would follow from 2.1 if we could show that $H^1(\nu_p m , \mathbb{C}_m \hat{S}^\cdot(V_{n+1})) = 0$.

<u>Proposition 2.3</u>. <u>The rings</u> $\hat{S}^\cdot(V_{pm})^{\nu_p m}$ <u>are factorial</u>.

<u>Proof</u> . In III.3 we have shown that as $\nu_p m$ rings we have $S^\cdot(V_p m-1) \hookrightarrow S^\cdot(V_p m)$ with cokernel a sum of free $\nu_p m$-modules. Using this fact we can show that there is an isomorphism

$$H^1(\nu_p m, \dot{\mathbb{C}}_m(\hat{S}^\cdot(V_p m)) \xrightarrow{\sim} H^1(\nu_p m, \mathbb{C}_m \hat{S}^\cdot(V_p m-1)).$$

The second group is then shown to be $H^1(\nu_p m-1, \mathbb{C}_m (\hat{S}^\cdot(V_p m-1))$ which we may suppose is trivial, by induction. Q.E.D.

Unfortunately we have not been clever enough to be able to use the decomposition of $S^r(V_{n+1})$ for $n+1 < p$ in order to make a similar argument. Of course the problem is that there are many non trivial units in $\hat{S}^\cdot(V_{n+1})$, so the cohomology groups need not vanish - so easily as for the polynomial rings.

3. <u>Related results</u>.

The main problem - to what extent does the factoriality of a noetherian ring determine other homological properties - was opened by Samuel who stated that he knew no examples of a non Cohen-Macaulay factorial ring [Samuel 1961] . An excellent survey of the material related to this problem is [Lipman (1975)] . There are now many examples of non Cohen Macaulay factorial rings. Most of them are obtained as rings of invariants. All the examples are shown to be non Cohen-Macaulay by calculating a local cohomology group and showing that it is not zero, for low dimension. Then the divisor class group is shown to be zero - again by showing that a group cohomology vanishes. A very nice example of this is found in [Freitag and Kiehl (1974)].

A slightly different approach is taken by Mori, who finds many examples.

Example 3.1. [Mori (1975)] For every integer $d \geq 2$ there is a factorial complete local ring of depth 2 with residue class field of characteristic 0. And for every $d \geq 3$, there is a local ring with algebraically closed residue class field that has dimension d, depth 3 and is factorial.

These are obtained by taking a projective curve with genus g and its associated Jacobian J, which has a line bundle L. Then he works with the graded ring

$$\coprod_{n \geq 0} H^{\cdot}(J, L^{\otimes n}) .$$

We conclude this chapter by mentioning that in Chapter VI we show that

$$\operatorname{depth} (S^{\cdot}(V_4)^{\nu_4}) = 3.$$

This is the smallest possible counter-example.

V. THE NUMBER OF INVARIANTS AND HILBERT SERIES.

1. Hilbert series and Moliens Theorem.

Let k be a field and A a $\mathbb{Z}$-graded k-algebra. That is, there is a decomposition $A = \coprod_{r \in \mathbb{Z}} A_r$ of the additive structure of A into vector spaces such that

$$A_i A_j \subset A_{i+j}$$

for all $i, j \in \mathbb{Z}$. (i.e. the multiplication is given by a pairing $A_i \otimes_k A_j \longrightarrow A_{i+j}$ that is associative, etc...). If $\dim_k A_r$ is finite for each r we get a function

$$H_{\bullet}(A) : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}_0$$

defined by $H_{\bullet}(A)(r) = H_r(A) = \dim_k A_r$.

Definition 1.1. The function $H_{\bullet}(A)$ is the Hilbert function of A. The Hilbert series of A is the formal series

$$H_t(A) := \sum_{-\infty}^{\infty} H_r(A)t^r .$$

<u>Example 1.2</u>. a) Consider the polynomial ring $A = k[X_o,..,X_n]$. Assign a weight to each indeterminant X_i by $wgt(X_i) = w_i \in Z$. To each monomial $X_o^{e_o} \dots X_n^{e_n}$ assign the weight

$$wgt(X_o^{e_o} .. X_n^{e_n}) := e_o w_o + .. + e_n w_n$$

A polynomial $f(X_o,..,X_n)$ is <u>isobaric</u> of weight w if either of the two equivalent conditions below is satisfied :

1°. In $k[X_o,..,X_n,T,T^{-1}]$, there is an identity

$$T^w f(X_o,..,X_n) = f(T^{w_o}X_o,..,T^{w_n}X_n) \quad .$$

2°. The monomials in f have weight w.

Then setting $A_w = \{ f \in k[X_o,..,X_n] \| f$ is isobaric of weight w or $f = 0 \}$ it is seen that $A = k[X_o,..,X_n]$ is a graded k-algebra Note that $\dim_k A_r$ is finite for each r if and only if $w_i > 0$ for all i. In this case it is not difficult to show

$$H_t(A) = \prod_{i=0}^{n} (1-t^{w_i})^{-1} \quad .$$

b) Let $A = k[X_1,X_2,X_3,...]$ be the polynomial ring in countably many variables with weight $(X_i) := i$. Then $\dim_k A_r < \infty$ for all r and

$$H_t(A) = \prod_{\nu=1}^{\infty} (1-t^\nu)^{-1}$$

<u>Proposition 1.3</u>. <u>Suppose</u> A <u>is a graded k-algebra with</u> $A_r = 0$ <u>for</u> $r<0$. <u>Then</u> A <u>is noetherian if and only if</u> A_o <u>is noetherian</u> <u>and</u> $A_+ := \coprod_{r \geq 1} A_r$ <u>is a finitely generated ideal in</u> A. QED

Then each A_r is a finitely generated A_o-module. If $\dim_k A_o$ then $\dim_k A_r < \infty$ for all $r \geq 0$. Furthermore there are elements $f_1,..,f_s$ with $f_i \in A_{r_i}$ (that is $wgt(f_i) = r_i$) and a surjective homomorphism of graded k-algebras :

$$A_o[X_1,..,X_s] \to A$$

defined by $X_i \to f_i$ and where $wgt(X_i) = r_i$. In case $A_o = k$, Hilbert's syzygy theorem can be employed to prove that $H_t(A)$ is a rational function in t.

Suppose $B = k[X_o,..,X_n]$ with weight $(X_i) = deg(X_i) = 1$. Let G be a group of k-linear automorphisms of $B_1 = kX_o + .. + kX_n$. The action of G on B_1 extends to action on $B_r = S^r(B_1)$ by $g \to S^r(g)$. Putting these actions together yields a group homomorphism $G \to Aut_{k-alg}(B)$. We are interested in the ring of G-invariants $A = B^G = \{f : g(f) = f \text{ all } g \in G\}$ and the relative semi-invariants for a given character $\lambda : G \to k^*$, $A_\lambda = \{f : g(f) = \lambda(g)f$ all $g \in G\}$.

In case char(k) = 0, the ring A is Cohen-Macaulay [Hochster and Roberts (1974)]. Stanley uses the Hilbert series for A to determine whether or not A is Gorenstein. In this case the Hilbert series can be obtained by the representation of G on B_1, a classical result due to [Molien(1898)] .

<u>Theorem 1.4</u>. [Molien (1898)] <u>The Hilbert series</u>

$$H_t(A_\lambda) = |G|^{-1} \sum_{g \in G} \frac{\lambda(g)^{-1}}{\det(1-gt)}$$

<u>Proof</u>. Consider the Reynolds operator $E_{\lambda,r} = |G|^{-1} \sum_{g \in G} \lambda(g)^{-1} S^r(g)$ operating on $S^r(B_1) = B_r$. If $h \in G$, then

$$E_{\lambda,r} . \lambda(h)^{-1} S^r(h) = |G|^{-1} \sum_{g \in G} \lambda(gh)^{-1} S^r(gh) = E_{\lambda,r} \text{ . Hence}$$

$$(E_{\lambda,r})^2 = E_{\lambda,r} \quad . \quad \text{Then}$$

a) $A_{\lambda,r} = E_{\lambda,r}(B_r)$ and

b) $\dim_k A_{\lambda,r} = Tr(E_{\lambda,r})$.

For if $f \in A_{\lambda, r}$, then clearly $E_{\lambda, r} f = f$. On the other hand if

$E_{\lambda,r} f = f$, then $S^r(h) f = S^r(h) E_{\lambda,r} f = |G|^{-1} \sum_{g\in G} \lambda(g)^{-1} S^r(hg) f =$

$= \lambda(h)|G|^{-1} \sum_{g\in G} \lambda(hg)^{-1} S^r(hg) f = \lambda(h) E_{\lambda,r} f = \lambda(h) f.$

Thus a) in established. As for b), this is well known for idempotent operators.

<u>Lemma 1.5</u>. <u>If</u> $g : V \longrightarrow V$ <u>is a linear operator, then</u>

$$\det(1+gt) = \sum_{\nu=o}^{\infty} \mathrm{Tr}(\Lambda^{\nu} g) t^{\nu} \quad \text{and}$$

$$(\det(1-gt))^{-1} = \sum_{\nu=o}^{\infty} \mathrm{Tr}(S^{\nu}(g)) t^{\nu} \quad \underline{\text{both in}} \quad k[\![t]\!]$$

<u>Proof</u>. The two sides of the first formula are not changed if the field is extended. Assume that g is diagonal. The result follows from (II.3.3). As the diagonal operators are dense, the formula follows in general. As for the second formula, consider the functorial split exact sequence (2.4). It follows that

$$\sum_{j=o}^{r} (-1)^j \mathrm{Tr}(\Lambda^{r-j} g) \mathrm{Tr}(S^j g) = 0$$

for $r > 0$. Hence

$$\det(1-gt)\left(\sum_{r=o}^{\infty} \mathrm{Tr}(S^r g) t^r\right) = 1 \qquad \text{QED}$$

Now consider

$$H_t(A_\lambda) := \sum_{r=o}^{\infty} \dim_k(A_{\lambda,r}) t^r = \sum_{r=o}^{\infty} \mathrm{Tr}(E_{\lambda,r}) t^r ,$$

the second equality by b). Continue

$$H_t(A_\lambda) = \sum_{r=o}^{\infty} \mathrm{Tr}\left(|G|^{-1} \sum_{g\in G} \lambda(g)^{-1} S^r g\right) t^r$$

$$= \sum_{r=o}^{\infty} |G|^{-1} \sum_{g\in G} \lambda(g)^{-1} \mathrm{Tr}(S^r g) t^r$$

$$= |G|^{-1} \sum_{g\in G} \lambda(g)^{-1} \sum_{r=o}^{\infty} \mathrm{Tr}(S^r g) t^r$$

$$= |G|^{-1} \sum_{g\in G} \lambda(g)^{-1}\det(1-gt)^{-1} ,$$

this last equality by Lemma 1.4. QED

We give some examples, a few of which will be used later.

Example 1.6. Let $|G| = 1$. Then we have $A = B$.
So

$$H_t(B) = \frac{1}{\det(1-t)} = \frac{1}{(1-t)^{n+1}}$$

Example 1.7. Let $|G| = 2$ with the non-identity element operating by $\sigma(X_i) = -X_i$. Then

$$A = B^G = k[\{X_iX_j\}_{o\le i,j\le n}] = B(2) = \prod_{r\ge o} B_{2r}$$

$$H_t(A) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\det(1-t)} + \frac{1}{\det(1+t)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1-t)^{n+1}} + \frac{1}{(1+t)^{n+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\ \frac{(1+t)^{n+1} + (1-t)^{n+1}}{(1-t^2)^{n+1}} = (1-t^2)^{-(n+1)}\left(\sum_{j=o}^{n+1}\binom{n+1}{2j}t^{2j}\right)$$

Example 1.8. Let G be a finite group and consider the regular representation $V = \mathbb{C}[G]$ of G and its symmetric algebra $S^{\cdot}(V)$ over $\mathbb{C}$. This is a polynomial ring in $|G|$-variables $\{X_g : g\in G\}$ with action induced by $h.X_g = X_{hg}$. By Molien's theorem, the Hilbert series for the invariant ring is

$$H_t(S^{\cdot}(V)^G) = |G|^{-1} \sum_{g\in G} \frac{1}{\det(1-gt)}$$

Almkvist has calculated the characteristic polynomial of the group elements acting on the regular representation [Almkvist (1973)]. His result is

$$\det(1-gt) = (1-t^{\operatorname{ord} g})^{|G|/\operatorname{ord} g} ,$$

where ord(g) is the order of the element g. Hence

$$H_t(S^{\cdot}(V)^G) = |G|^{-1} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\varphi(s)}{(1-t^s)^{|G|/s}}$$

where $\varphi(s)$ is the number of elements in G with order exactly s. Thus we can calculate this series for abelian groups, for example. For $G = \nu_{p^m}$ we get a very nice series that appears again in Proposition 1.14.

Begin with the rational function $M_1(t) = (1-t)^{-1}$ and define, inductively for each $m>1$ and each p, the rational function

$$M_{p^m}(t) = p^{-m}\{(1-t)^{-p^m} - (1-t^p)^{-p^{m-1}}\} + M_{p^{m-1}}(t^p) .$$

It is not difficult to show that

$$M_{p^m}(t) = p^{-m}\{\frac{1}{(1-t)^{p^m}} + \frac{p-1}{(1-t^p)^{p^{m-1}}} + \frac{p^2-p}{(1-t^{p^2})^{p^{m-2}}} + \cdots + \frac{p^m-p^{m-1}}{(1-t^{p^m})}\}.$$

<u>Proposition 1.9. Let</u> $V = \mathbb{C}[\nu_{p^m}]$. <u>Then</u>

$$H_t(S^\cdot(V)^{\nu_{p^m}}) = M_{p^m}(t) .$$

<u>Proof</u>. There are exactly p^i-p^{i-1} elements in ν_{p^m} of order p^i (for $i\geq 1$). Then the result follows from Almkvist's calculation.

QED

As an example we have, for $V = \mathbb{C}[\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}]$, that

$$H_t(S^\cdot(V)^{\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}}) = \frac{1}{6}\{\frac{1}{(1-t)^6} + \frac{1}{(1-t^2)^3} + \frac{2}{(1-t^3)^2} + \frac{2}{1-t^6}\} ,$$

We now turn to the computation of the Hilbert series of our rings of invariants $S^\cdot(V_{n+1})^{\nu_p}$ for an indecomposable $k\nu_p$-module V_{n+1} to which the remainder of this chapter is devoted. That is we want to compute

$$H_t(S^\cdot(V_{n+1})^{\nu_p}) := \sum_{r=0}^{\infty} H_r(S^\cdot(V_{n+1})^{\nu_p})t^r .$$

For convenience, let $a_{n,r} := H_r(S^\cdot(V_{n+1})^{\nu_p}) = \dim_k S^r(V_{n+1})^{\nu_p}$.

<u>Proposition 1.10. The number</u> $a_{n,r}$ <u>is the number of linearly independent</u> ν_p<u>-invariant r-forms in</u> $n+1$ <u>variables in characteristic</u> p, <u>and is the same as the number of indecomposables in the decomposition of</u> $S^r(V_{n+1})$.

<u>Proof</u>. Suppose $S^r(V_{n+1}) \cong \bigoplus_{j=1}^{p} c_j V_j$. Then

$$S^r(V_{n+1})^G = \mathrm{Soc}(S^r(V_{n+1})) = \bigoplus_{j=1}^{p} c_j \mathrm{Soc}(V_j) = (\sum_{j=1}^{p} c_j).V_1. \qquad \text{QED}$$

Then the generating function for the $a_{n,r}$ is the Hilbert series

$$\phi_n(t) := H_t(S^{\cdot}(V_{n+1})^{\nu_p}) = \sum_{r=o}^{\infty} a_{n,r}t^r \quad .$$

We denote this function by $\phi_n(t)$ in order to save on notation. We now study some of the properties of $\phi_n(t)$. The statements that follow hold for all p and n, $0\leqslant n\leqslant p<1$.

Proposition 1.11. The function

$$(1-t^p)\{\phi_n(t) - (p(1-t)^{n+1})^{-1}\} = \sum_{r=o}^{p-n-1} (a_{n,r} - \tfrac{1}{p}\binom{n+r}{r})t^r$$

is a polynomial of degree $p-n-1$.

Proof. By III.2.5 we have a decomposition

$S^r(V_{n+1}) \cong S^{r-p}(V_{n+1}) \oplus F$ where F is a free $k\nu_p$-module of

rank $p^{-1}\{\binom{r+n}{n} - \binom{r-p+n}{n}\}$. Hence for $r\geqslant p$; we get

$$a_{n,r} - a_{n,r-p} = p^{-1} \{\binom{n+r}{n} - \binom{n+r-p}{n}\} \ .$$

It follows that

$$(1-t^p)\phi_n(t) = \sum_{r=o}^{p-1} a_{n,r}t^r + \sum_{r=p}^{\infty} (a_{n,r} - a_{n,r-p})t^r =$$

$$= \sum_{r=o}^{p-1} a_{n,r}t^r + p^{-1}\sum_{r=p}^{\infty} (\binom{n+r}{n} - \binom{n+r-p}{n})t^r =$$

$$= p^{-1}\frac{1-t^p}{(1-t)^{n+1}} + \sum_{r=o}^{p-1} (a_{n,r} - p^{-1}\binom{n+r}{n})t^r \ .$$

If $r+n\geqslant p$, then $S^r(V_{n+1})$ is free of rank $p^{-1}\binom{n+r}{n}$ (for $0\leqslant r\leqslant p-1$) by III.2.10a). Hence $a_{n,r} - p^{-1}\binom{n+r}{n} = 0$ for $p-1\geqslant r\geqslant p-n$. By III.2.10b $a_{n,p-(n+1)} \neq p^{-1}\binom{p-1}{n}$, so the polynomial $\sum_{r=o}^{p-1}(a_{n,r} - p^{-1}\binom{n+r}{n})t^r$ has degree $p-n-1$. QED

Corollary 1.12. The Hilbert series

$$\phi_n(t) = \frac{\text{polynomial of degree at most } p-1}{(1-t)^n(1-t)^p}$$ QED

<u>Corollary 1.13. The Krull dimension of</u> $S^\cdot(V_{n+1})^{\nu p}$ <u>is</u> $n+1$.

<u>Proof</u>. The Hilbert series of $S^\cdot(V_{n+1})^{\nu p}$ is

$$\phi_n(t) = \frac{1}{p(1-t)^{n+1}} + \frac{g(t)}{1-t^p}$$ and this has a pole of order $n+1$ at $t=1$. Hence the result by a well known result [Atiyah-McDonald (1969)] . QED

(This result can be obtained by other methods. For example $S^\cdot(V_{n+1})$ is integral over $S^\cdot(V_{n+1})^{\nu p}$. Hence they have the same Krull dimension. But $S^\cdot(V_{n+1})$ is a polynominal ring in $n+1$ variables over k so has Krull dimension $n+1$.).

Before turning to the more difficult computations involved in computing $H_t(S^\cdot(V_{n+1})^{\nu p})$ for all n, we use the decompositions in III.3 to compute $H_t(S^\cdot(V_{p^m})^{\nu p^m})$ and $H_t(S^\cdot(V_{p^m-1})^{\nu p^m})$.

<u>Proposition 1.14. For each</u> $m \geqslant 0$ <u>the Hilbert series</u>

$$H_t(S^\cdot V_{p^m})^{\nu p^m}) = M_{p^m}(t) \quad .$$

<u>Proof</u>. From III.3.2 and III.3.3 we see that

$$\begin{aligned} H_t(S^\cdot(V_{p^m})^{\nu p^m} &= H_{t^p}(S^\cdot(V_{p^{m-1}})^{\nu p^{m-1}}) + \\ &+ p^{-m} \sum_{r=o}^{\infty} \{\binom{p^m+pr-1}{pr} - \binom{p^{m-1}+r-1}{r}\} t^{pr} + \\ &+ p^{-m} \sum_{p+r} \binom{p^m+r-1}{r} t^r \end{aligned}$$

Hence, by induction on m, we have

$$\begin{aligned} H_t(S^\cdot(V_{p^m})^{\nu p^m}) &= M_{p^{m-1}}(t^p) + p^{-m} \sum_{r=o}^{\infty} \binom{p^m+r-1}{r} t^r \\ &\quad - p^{-m} \sum_{r=o}^{\infty} \binom{p^{m-1}+r-1}{r} t^{pr} \end{aligned}$$

But then

$$H_t(S^\cdot(V_{p^m})^{\nu p^m}) = M_{p^{m-1}}(t^p) + p^{-m}\{\frac{1}{(1-t)^{p^m}} - \frac{1}{(1-t^p)^{p^{m-1}}}\}$$

But this last function is just $M_{p^m}(t)$. QED

Using the decompositions for $S^r(V_{p^m-1})$ we can find the associated Hilbert series.

<u>Proposition 1.15</u>. <u>For all</u> m, <u>the Hilbert series</u>

$$H_t(S^\cdot(V_{p^m-1})^{\nu_{p^m}}) = \frac{1-t}{p^m}\left(\frac{1}{(1-t)^{p^m}} - \frac{1}{(1-t^p)^{p^{m-1}}}\right) + M_{p^{m-1}}(t^p) .$$

<u>Proof</u>. By III.3.4 and III.3.5 and III.3.6 we have

$$H_t(S^\cdot(V_{p^m-1})^{\nu_{p^m}}) = p^{-m}\sum_{r\not\equiv 0,1 (\mathrm{mod}\, p)}\binom{p^m-2+r}{r}t^r + p^{-m}\sum_{r=0}^{\infty}\left\{\binom{p^m-2+pr}{pr}-\binom{p^{m-1}-1+r}{r}\right\} t^{pr}$$

$$+ H_{t^p}(S^\cdot(V_{p^{m-1}})^{\nu_{p^{m-1}}}) + \sum_{r\equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)} d_r t^r ,$$

where we must determine the integer d_r - which is the number of components in the decomposition of $S^r(V_{p^m-1})$ into indecomposable ν_{p^m}-modules. By III.3.6, the integer d_r is given by

$$d_r = c_r + e_r$$

where c_r is the number of components of

$$E(S^{(r-1)/p}(V_{p^{m-1}})) / S^{(r-1)/p}(V_{p^{m-1}})$$

and e_r is the rank of the free $k_{\nu_{p^m}}$-module. Now

$$c_r = H_r(S^\cdot(V_{p^{m-1}})^{\nu_{p^{m-1}}}) .$$

To compute d_r we consider dimensions of the vector spaces involved. We have

$$\dim_k S^r(V_{p^m-1}) = p^m e_r + p^m c_r - \dim_k S^{(r-1)/p}(V_{p^{m-1}}) ,$$

since the injective envelope of an indecomposable is just V_{p^m}. Hence we get

$$e_r = p^{-m}\left\{\binom{p^m-2+r}{r} + \binom{p^{m-1}-1+(r-1)/p}{(r-1)/p}\right\} - c_r$$

Thus

$$d_{kp+1} = p^{-m}\left\{\binom{p^m-1+kp}{kp} + \binom{p^{m-1}-1+k}{k}\right\} .$$

Putting all this information together we get

$$H_t(S^\cdot(V_{p^m-1})^{\nu_{p^m}}) = p^{-m}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{p^m-2+r}{r}t^r$$

$$- p^{-m}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{p^{m-1}-1+r}{r}(t^p)^r$$

$$+ p^{-m}t\sum_{k=0}^{\infty}\binom{p^{m-1}-1+k}{k}(t^p)^k$$

$$+ H_{t^p}(S^\cdot(V_{p^{m-1}})^{\nu_{p^{m-1}}}) \quad .$$

This is just

$$p^{-m}\left\{\frac{1}{(1-t)^{p^m-1}} - \frac{1}{(1-t^p)^{p^{m-1}}} + \frac{t}{(1-t^p)^{p^{m-1}}}\right\} + M_{p^{m-1}}(t^p). \qquad \text{QED}$$

For future reference we note that the rational functions $M_{p^m}(t)$ satisfies the following equations :

$$M_{p^m}(t^{-1}) = (-1)t^{p^m}M_{p^m}(t) \qquad \text{if } p \text{ is odd}$$

(1.15)

$$M_{2^m}(t^{-1}) = t^{2^m}M_{2^m}(t) - \frac{t^{2^m}}{1-t^{2^m}} \quad \text{otherwise .}$$

2. The number of invariants when p is large.

The number $a_{n,r} = \dim_k(S^r(V_{n+1})^{\nu_p}$ varies with the prime p, but remains constant $= b_{n,r}$ for "large" p, i.e. $p > nr+1$. Note that $b_{n,r} = b_{r,n}$ by III,2.7.

Define

$$\psi_r(t) := \sum_{n=0}^{\infty} b_{r,n}t^n$$

We compute this function for $r \leq 6$. Note that

$$\psi_r(t) = \lim_{p\to\infty}\phi_r(t), \qquad |t|<1 \ .$$

By III.2.9. the expression

$$(s-s^{-1})G_{n+r,r}(s^{-1},s) = \sum_j c_{r,j}(n)s^j$$

gives the coefficient in the decomposition

$$S^r(V_{n+1}) \overset{\sim}{=} \bigoplus_{j=1}^{nr+1} c_{r,j}(n)V_j$$

(since we are assuming that $p>nr+1$). Observe that

$c_{r,-j}(n) = -c_{r,j}(n)$. We want to compute

$$b_{r,n} = \sum_{j=1}^{rn+1} c_{r,j}(n) .$$

The generating function for the Gaussian polynomials (II.4.5) gives

$$(s-s^{-1})\prod_{i=o}^{r}(1-s^{2i-r}t)^{-1} = \sum_{n=o}^{\infty}(s-s^{1})G_{n+r,r}(s^{-1},s)t^n$$

$$= \sum_{n=o}^{\infty}(\sum_j c_{r,j}(n)s^j t^n) = \sum_{j=1}^{\infty} f_{r,j}(t)(s^j-s^{-j})$$

where $f_{r,j}(t) = \sum_{n=o}^{\infty} c_{r,j}(n)t^n$. These $f_{r,j}(t)$'s are in a sense duals to the Gaussian polynomials. Once we know the $f_{r,j}$'s we can compute

$$\psi_r(t) = \sum_{n=o}^{\infty} b_{r,n}t^n = \sum_{j=1}^{\infty} f_{r,j}(t) .$$

We are going to do induction from r to $r+2$, so we compute $f_{1,j}(t)$ and $f_{2,j}(t)$.

Lemma 2.1. The function $f_{1,j}(t) = t^{j-1}$.

Proof. As $\dfrac{s-s^{-1}}{(1-st)(1-s^{-1}t)} = \dfrac{s}{1-st} - \dfrac{s^{-1}}{1-s^{-1}t} = \sum_{1}^{\infty} t^{j-1}(s^j-s^{-j})$ we get the result. QED

Corollary 2.2. The function $\psi_1(t) = \sum_{j=1}^{\infty} t^{j-1} = \frac{1}{1-t}$ QED

Lemma 2.3. The function $f_{2,j} = \begin{cases} 0 & j=2\nu \\ \dfrac{t^\nu}{1-t^2} & j=2\nu+1 \end{cases}$,

and hence $\psi_2(t) = \dfrac{1}{(1-t)(1-t^2)}$.

Proof. As

$$\frac{s-s^{-1}}{(1-t)(1-s^2t)(1-s^{-2}t)} = \frac{1}{1-t^2}\sum_{\nu=0}^{\infty} t^{\nu}(s^{2\nu+1}-s^{-(2\nu+1)})$$ the result

follows. QED

Now we get the formula for larger r by using a recursion formula. Define $f_{r,-j} := f_{r,j}$

Proposition 2.4. The recursion formula :

$$f_{r,i} = (1-t^2)\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} f_{r-2,i-r\nu}t^{|\nu|}.$$

Set $i = qr+\ell$, where $0\leqslant \ell<r$. Then

$$(1-t^2)f_{r,qr+\ell} = t^q\sum_{j=0}^{q} f_{r-2,jr+\ell}t^{-j} + t^{-q}\sum_{j=q+1}^{\infty} f_{r-2,jr+\ell}t^{j}$$
$$- t^q\sum_{j=0}^{\infty} f_{r-2,jr-\ell}t^{j} \quad .$$ QED

The usefulness of this formula is limited by the difficulties arising when $i-r\nu$ and ν change signs.

Lemma 2.5. Let $r=3$, Then $f_{r-2,j} = f_{1,j} = t^{j-1}$

and

$$f_{3,3q+\ell} = \frac{1}{(1-t^2)(1-t^4)}\begin{cases} t^{q+1}-t^{3q+1} & \ell=0 \\ t^{q}-t^{3q+2} & \ell=1 \\ t^{q+3}-t^{3q+3} & \ell=2 \end{cases},$$

and

$$\psi_3(t) = \frac{1+t^3}{(1-t)(1-t^2)(1-t^4)} \quad .$$ QED

Remark 2.6. By computing $f_{3,i}$ we know how many components of V_i appear in the decomposition of $S^3(V_{n+1})$ for all n. For example $f_{3,2}=0$ means that there will never be a V_2 in the decomposition of $S^3(V_{n+1})$.

Lemma 2.7. Let $r=4$. Then $f_{4,i}=0$ if i is even,

$f_{4,4q+1} = (t^q - t^{2q+1})/(1-t)(1-t^2)(1-t^3)$ and

$f_{4,4q+3} = (t^{q+2} - t^{2q+2})/(1-t)(1-t^2)(1-t^3)$. Hence

$$\psi_4(t) = (1-t+t^2)/(1-t)^2(1-t^2)(1-t^3) = (1+t^3)/(1-t)(1-t^2)^2(1-t^3).$$

QED

We could struggle in this way to compute $f_{5,i}$ and $f_{6,i}$ but it would be very long and boring. By summing up the "tails" we can get both ψ_5 and ψ_6 with little further work.

Define, for all $j \in \mathbb{Z}$, the functions

$$U_{r,j}(t) = \sum_{i \geq j} f_{r,i}(t) .$$

Note that $U_{r,-j} = U_{r,j+1}$ if $j \geq 0$, since $f_{r,-j} = -f_{r,j}$. Using the recursion formula 2.4 we get the next result.

Proposition 2.8. (a) $U_{r,o} = U_{r,1} = \psi_r(t)$.

(b) $(1-t^2)U_{r,i} = \sum_{\nu} U_{r-2,i-r\nu} t^{|\nu|}$

(c) $(1-t^2)\psi_r(t) = \sum_{\nu} U_{r-2,r\nu} t^{|\nu|}$. QED

As an example of the usefulness of this result we compute, once again, $\psi_3(t)$. Since $f_{1,j} = t^{j-1}$ and $\psi_1(t) = (1-t)^{-1}$, we have

$$U_{1,3\nu} = t^{3\nu-1}(1-t)^{-1}$$

and $$U_{1,3\nu+1} = t^{3\nu}(1-t)^{-1}$$

and

$$(1-t^2)\psi_3(t) = \psi_1(t) + \sum_{\nu=1}^{\infty} (U_{1,3\nu} + U_{1,3\nu+1})t^{\nu} =$$

$$= (1-t)^{-1} + (1-t)^{-1} \sum_{\nu=1}^{\infty} (t^{3\nu-1} + t^{3\nu})t^{\nu} = \frac{1+t^3}{(1-t)(1-t^4)}$$

The functions $\psi_5(t)$ and $\psi_6(t)$ can be computed as well. In order to save space and to avoid boring, completely, the reader, we list the results below.

Theorem 2.9. The following identities hold.

$$\psi_1(t) = (1-t)^{-1} \quad , \psi_2(t) = (1-t)^{-1}(1-t^2)^{-1} \quad ,$$

$$\psi_3(t) = (1+t^3)/(1-t)(1-t^2)(1-t^4) \quad , \quad \psi_4(t) = \frac{1+t^3}{(1-t)(1-t^2)^2(1-t^3)} \quad ,$$

$$\psi_5(t) = \frac{1+t^2+3t^3+3t^4+5t^5+4t^6+6t^7+6t^8+4t^9+5t^{10}+3t^{11}+3t^{12}+t^{13}+t^{15}}{(1-t)(1-t^2)(1-t^4)(1-t^6)(1-t^8)}$$

$$\psi_6(t) = \frac{1+t^2+3t^3+4t^4+4t^5+4t^6+3t^7+t^8+t^{10}}{(1-t)(1-t^2)^2(1-t^3)(1-t^4)(1-t^5)} \quad . \qquad \text{QED}$$

For the coefficients in $\psi_r(t) = \sum_{n=o}^{\infty} b_{r,n}t^n$ we have the following special cases :

$$b_{1,n} = 1$$

$$b_{2,n} = \frac{2n+3+(-1)^n}{4} = [\tfrac{n+2}{2}]$$

$$b_{3,n} = \frac{2n^2+8n+9}{16} + \frac{3}{16}(-1)^n + \frac{1}{8}(i^n+(-i)^n)$$

$$(2.10) \quad \begin{cases} = [\frac{(n+2)^2}{8}] & \text{if } 4 \nmid n \\ = [\frac{(n+2)^2}{8}] + 1 & \text{if } 4 \mid n \ . \end{cases}$$

$$b_{4,n} = \frac{85}{144} + \frac{2n^3+15n^2+42n}{72} + \frac{3}{16}(-1)^n + \frac{2}{9(1-\lambda)}(\lambda^n-\lambda^{2n+1})$$

$$= 1 + [\frac{2n^3+15n^2+42n}{72}] \quad . \text{ where } \lambda = e^{\frac{2\pi i}{3}}$$

The explicit expressions for $b_{3,n}$ and $b_{4,n}$ (needed later) are found by solving the difference equations gotten from ψ_3 and ψ_4. The calculations are omitted.

Theorem 2.11. The function $\psi_r(t)$ is a rational function over $\mathbb{Z}$ with denominator of the form $\Pi(1-t^{\nu_i})$.

Proof. We go by induction from $r-2$ to r, the cases $r=1,2$ are done. So assume that $f_{r-2,q_1r_1+\ell_1}$ where $0\leq\ell_1<r_1$) is a linear combination over $\mathbb{Z}$ of terms of the type t^{aq_1+b}/N where N is a product of $(1-t^{\nu_i})$'s. We want to show that $f_{r,i}$ can be written in the same way. Then we are done since summing the $f_{r,i}$'s yields the desired form for $\psi_r(t)$.

Recall the formula from the proof of 2.4.

$$(1-t^2)f_{r,rq+\ell} = t^q \sum_{j=o}^{q} f_{r-2,jq+\ell}t^{-q} + t^{-q} \sum_{j=q+1}^{\infty} f_{r-2,jr+\ell}t^j$$
$$- t^q \sum_{j=1}^{\infty} f_{r-2,jr-\ell}\, t^j \quad \text{where} \quad 0\leq \ell <r.$$

Let $q = q_1r+\ell_1$ and $j = j_1r_1+\ell_2$ with $0\leq\ell_1,\ell_2\leq r_1$. We fix ℓ_2 but let j_1 be arbitrary. Put $\pi = rr_2$ Then $\lambda = \ell_1r+\ell$ will run through all residues (mod π) when ℓ and ℓ_1 run through residues (mod r) and (mod r_1) respectively.

If follows that $N(1-t^2)f_{r,q_1\pi+\lambda}$ is a linear combination of terms of the type.

$$t^{q_1r+\varepsilon_1} \sum_{j_1=o}^{q_1} t^{(ar_1-r_1)j_1} + t^{-q_1r_1+\varepsilon_2} \sum_{j_1=q_1+1}^{\infty} t^{(ar_1+r_1)j_1}$$
$$- t^{q_1r_1+\varepsilon_3} \sum_{j_1=1}^{\infty} t^{j_1(ar_1+r_1)}$$
$$= \frac{t^{\varepsilon_1}t^{r_1q_1}-t^{\varepsilon_1'}t^{ar_1q_1}}{1-t^{ar_1-r_1}} + \frac{t^{\varepsilon_2'}t^{ar_1q_1}}{1-t^{ar_1-r_1}} - \frac{t^{\varepsilon_3'}t^{ar_1q_1}}{1-t^{ar_1+r_1}}$$

where the ε's depend only on the residues ℓ, ℓ_1 and ℓ_2 and not on q_1. Hence $f_{r,q_1\pi+\lambda}$ is a linear combination of terms of the desired form. QED

<u>Remark 2.12</u>. The function $\psi_r(t) = \lim_{p\to\infty} \Phi_r(t)$ does not necessarily have the same denominator as $(1-t^p)\,\Phi_r(t)$.

<u>Remark 2.13</u>. Using 2.8. we can get very neat looking formulas for the ψ_r. As an example we have

$$\psi_6(t) = U_{6,0} = \frac{1}{1-t^2}\sum_{\mu} U_{4,6\mu}\, t^{|\mu|} =$$

$$= \frac{1}{(1-t^2)^2} \sum_{\mu} t^{|\mu|} \sum_{\nu} U_{2,6\mu-4\nu} t^{|\nu|} =$$

$$= \frac{1}{(1-t)(1-t^2)^3} \sum_{\mu,\nu} t^{|\mu|+|\nu|+|3\mu-2\nu|}$$

since $U_{2,2m} = \dfrac{t^{|m|}}{(1-t)(1-t^2)}$. The computation of the sum requires knowledge of the number of solutions of several diophantine equations and seems no easy to handle.

3. Computation of $H_t(S^{\cdot}(V_{n+1})^{\nu_p})$ for $n=1,2\ 3,4$.

In this section we compute $\phi_n(t) := H_t(S^{\cdot}(V_{n+1})^{\nu_p})$ for $n \leq 4$. At least ϕ_2 and ϕ_4 could be found from the general formulas in the next section. And ϕ_1 and ϕ_2 could be found from the calculation of the invariants as demonstrated in VI.1. But we believe it is instructive to see the direct calculations.

Theorem 3.1. The following equalities hold in $\mathbb{Z}[\![t]\!]$:

$$\phi_1(t) = (1-t)^{-1}(1-t^p)^{-1} \quad .$$

$$\phi_2(t) = (1-t)^{-1}(1-t^2)^{-1}(1-t^p)^{-2}(1-t^{2p}) \qquad \text{where} \quad p \geq 3 \quad .$$

$$\phi_3(t) = (1-t)^{-1}(1-t^2)^{-1}(1-t^4)^{-1}(1-t^p)^{-1} \begin{cases} (1+t^3+t^q+t^{q+1}+2t^{q+2}+2t^{q+3}) \\ \quad \text{where} \quad 2p = 3q+1 \ , \\ (1+t^3+2t^q+2t^{q+1}+t^{q+2}+t^{q+3}) \\ \quad \text{where} \quad 2q = 3q-1 \\ \text{and} \quad p \geq 5 \end{cases}$$

$$\phi_4(t) = (1-t)^{-1}(1-t^2)^{-2}(1-t^3)^{-1}(1-t^p)^{-1}(1+t^3+2t^{\frac{p+1}{2}}+4t^{\frac{p+3}{2}}+2t^{\frac{p+5}{2}}+t^p+t^{p+3})$$

$$\text{where} \quad p \geq 5$$

Proof. Suppose $n=1$. Then we know that $S^r(V_2) \cong V_{r+1}$ for $0 \leq r \leq p-1$ and that $S^{qp+r}(V_2) \cong F_q \oplus V_{r+1}$ for the same r and $0 \leq q$, where F_q is free of rank q. Hence $\dim_k S^{qp+r}(V_2)^{\nu_p} = q+1$. So

$$\phi_1(t) = \sum_{r_1=o}^{\infty} H_{r_1}(S^{\cdot}(V_2)^{\nu}P)t^{r_1} = \sum_{q=o}^{\infty}\sum_{r=o}^{p-1}(q+1)t^{qp+r}$$

$$= \sum_{q=o}^{\infty}\left(\sum_{r=o}^{p-1}(q+1)t^{r}\right)(t^{p})^{q} = \sum_{q=o}^{\infty}(q+1)\left(\sum_{r=o}^{p-1}t^{r}\right)(t^{p})^{q} \quad .$$

Thus

$$\phi_1(t) = \sum_{q=o}^{\infty}(q+1)\left(\frac{1-t^{p}}{1-t}\right)(t^{p})^{q} = \frac{1-t^{p}}{1-t}\sum_{q=o}^{\infty}(q+1)(t^{p})^{q}$$

$$= \frac{1-t^{p}}{1-t}\,\frac{1}{(1-t^{p})^{2}} = (1-t)^{-1}(1-t^{p})^{-1}, \text{ as desired .}$$

Suppose $n=2$. By Proposition 1.9, we have

$$(1-t^{p})\left\{\phi_2(t) - \frac{1}{p(1-t)^{3}}\right\} = \sum_{r=o}^{p-3} a_{2,r}t^{r} - p^{-1}\sum_{r=o}^{p-3}\binom{2+r}{2}t^{r} \quad .$$

Hence $\displaystyle (1-t^{p})\phi_2(t) = \sum_{r=o}^{p-3} a_{2,r}t^{r} + p^{-1}\left\{\frac{1-t^{p}}{(1-t)^{3}} - \sum_{r=o}^{p-3}\binom{r+2}{2}t^{r}\right\}$.

Using the fact that $\displaystyle \sum_{r=o}^{p-3}\binom{r+2}{2}t^{r} = \frac{1}{2}\frac{d^{2}}{dt^{2}}\left(\frac{1-t^{p}}{1-t}\right)$,

we can calculate

$$p^{-1}\left\{\frac{1-t^{p}}{(1-t)^{3}} - \sum_{r=o}^{p-3}\binom{r+2}{2}t^{r}\right\} = (1-t)^{-3}\left\{\left(\frac{p-1}{2}\right)t^{p-2}-(p-2)t^{p-1}+\left(\frac{p-3}{2}\right)t^{p}\right\}$$

Using III.2.6 and I.1.9, we get

$$S^{r}(V_3) \cong W_{2r+1} \oplus W_{2r-3} \oplus \ \ldots .$$

Since we want to calculate $a_{2,r}$ for $0 \leq r \leq p-3$ we have $2r+1 < 2p$.
As $W_{p+i} = 2V_p - V_{(p-i)}$ for $0 \leq i \leq p$, we see that the number of components in the decomposition is $\frac{1}{2}(r+2)$ if r is even and $\frac{1}{2}(r+1)$ if r is odd. Hence we compute

$$\sum_{r=o}^{p-3} a_{2,r}t = \sum_{r=2k=o}^{p-3}(k+1)t^{2k} + \sum_{r=2k+1=1}^{p-4}(k+1)t^{2k+1}$$

$$= \sum_{k=o}^{p-5/2}(k+1)(1+t)t^{2k} + \frac{p-1}{2}t^{p-3} = \frac{1-\frac{p-1}{2}t^{p-3}+\frac{p-3}{2}t^{p-1}}{(1-t)(1-t^{2})} + \frac{p-1}{2}t^{p-3}$$

$$= \frac{1-\frac{p-1}{2}\, t^{p-2} - t^{p-1} + \frac{p-1}{2}\, t^{p}}{(1-t)(1-t^2)}$$

Hence

$$(1-t^p)\phi_2(t) = (1-t)^{-2}\left\{\frac{1-\frac{p-1}{2}t^{p-2}-t^{p-1}+\frac{p-1}{2}t^p}{1+t}\right.$$

$$\left. + \frac{(p-1)t^{p-2}-2(p-2)t^{p-1}+(p-3)t^p}{2(1-t)}\right\}$$

$$= (1-t)^{-2}(1-t^2)^{-1}\{(1-t)(1+t^p)\}$$

Therefore

$$\phi_2(t) = (1-t)^{-1}(1-t^2)^{-1}(1-t^p)^{-1}(1+t^p) ,$$

a formula that is equivalent to the desired one.

Now suppose $n=3$. For $0\leqslant r\leqslant p-1$, we get $3r+1\leqslant 3p$, and hence the virtual decomposition

$$S^r(V_4) \cong S^3(V_{r+1}) = \sum_{j=1}^{3r+1} c_{3,j}(r)W_j$$

Now we use the identity $W_{2p\pm i} = 2V_p \pm V_i$ to get

$$a_{3,r} = \sum_{j=1}^{2p-1} c_{3,j}(r) + 2c_{3,2p}(r) + \sum_{j=2p+1}^{3r+1} c_{3,j}(r)$$

(for $r<p$). Hence $\phi_3(t)$ has the same coefficients up to degree $p-1$ as does

$$\sum_{j=1}^{3r+1}\ \sum_{r\geqslant 0} c_{3,j}(r)t^r + \sum_{j=2p}^{3r+1}\ \sum_{r\geqslant 0} c_{3,j}(r)t^r + \sum_{j=2p+1}^{3r+1}\ \sum_{r\geqslant 0} c_{3,j}(r)t^r .$$

But, using the notation from the previous section, this is

$$\psi_3(t) + U_{3,2p}(t) + U_{3,2p+1}(t) ,$$

where $U_{3,j} = \sum_{i\geqslant j} f_{3,i}$. We calculate

$$U_{3,j} = (1-t)^{-1}(1-t^2)^{-1}(1-t^4)^{-1}\ v_j , \quad \text{where}$$

$$v_j = \begin{cases} t^q + t^{q+1} + t^{q+3} - t^{j+1} & j = 3q \\ t^q + t^{q+2} + t^{q+3} - t^{j+1} & j = 3q+1 \\ t^{q+1} + t^{q+2} + t^{q+3} - t^{j+1} & j = 3q+2 \end{cases}$$

Hence

$$U_{3,2p} + U_{3,2p+1} \equiv (1-t)^{-2}(1-t^4)^{-1} \begin{cases} t^q + 2t^{q+2} \pmod{t^p} \\ \qquad \text{if} \quad 2p = 3q+1 \\ 2t^q + t^{q+2} \pmod{t^p} \\ \qquad \text{if} \quad 2p = 3q-1 \end{cases}$$

Now $\dfrac{1}{(1-t)^2} \cdot \dfrac{1}{1-t^4} = \sum\limits_{r=o}^{\infty} c_r t^r$ where

$$c_r = \frac{(r+3)^2}{8} - \frac{3}{16} + \frac{(-1)^r}{16} - \frac{i}{8}\,(i^r - (-i)^r) \quad .$$

This is shown by observing that

$$(1-t^4) \sum_{r=o}^{\infty} c_r t^r = (1-t)^{-2} = \sum_{r=o}^{\infty} (r+1)t^r$$

and then solving the difference equation

$$c_r - c_{r-4} = r+1 \quad .$$

By considerations above we get, for $2p = 3q+1$ that

$$a_{3,r} = b_{3,r} + c_{r-q} + 2c_{r-q-2} =$$

$$= \frac{(r+2)^p}{8} + \frac{1}{16} + \frac{3}{16}(-1)^r + \frac{1}{8}(i^r + (-i)^r) + \frac{(r+3-q)^2}{8} - \frac{3}{16} + \frac{(-1)^{r-q}}{16}$$

$$- \frac{i}{8}(i^{r-q} - (-i)^{r-q}) + \frac{2(r+1-q)^2}{8} - \frac{2.3}{16} + \frac{2}{16}(-1)^{r-q-2}$$

$$- \frac{2i}{8}(i^{r-q-2} - (-i)^{r-q-2}) = \frac{(r+2)(r+2-p)}{2} + \frac{p^2-1}{6}$$

when $q+2 \leqslant r < p$.

The case $2p = 3q-1$ is done similarly and gives the same result.

The coefficient of t^r in $(1-t^p)\phi_3(t)$ is (for $r \geqslant p$)

$$a_{3,r} - a_{3,r-p} = p^{-1}\left(\binom{r+3}{3} - \binom{r-p+3}{3} \right) = \frac{(r+2)(r+2-p)}{2} + \frac{p^2-1}{6} \quad ,$$

that is, the coefficient of t^r in $\psi_3 + U_{3,2p} + U_{3,2p+1}$.

Hence $(1-t^p)\phi_3(t) = \psi_3 + U_{3,2p} + U_{3,2p+1} =$

$$= (1-t)^{-1}(1-t^2)^{-1}(1-t^4)^{-1}(1+t^3+t^q+t^{q+1}+2t^{q+2}+2t^{q+3})$$

when $2p = 3q+1$.

The case $2p = 3q-1$ is done similarly. Thus we have the desired result.

For $n=4$ and $0 \leq r < p$, we have $4r+1<4p$. Just as in the previous case, we find that $\psi_4 + U_{4,2p} + U_{4,2p+1}$ will have the same coefficients up to degree $r = p-1$ as $(1-t^p)\phi_4(t)$. Using the formulas in the previous section we get

$$U_{4,2p} = U_{4,2p+1} = (1-t)^{-3}(1+t)^{-1}(1-t^3)^{-1} \left((1+t)t^{\frac{p+1}{2}}-t^{p+1}\right)$$

and

$$U_{4,2p} + U_{4,2p+1} \equiv (1-t)^{-3}(1-t^3)(2t^{\frac{p+1}{2}}) \qquad (\text{mod } t^p).$$

Using the notation

$$\psi_4(t) = (1-t)^{-1}(1-t^2)^{-2}(1-t^3)^{-1}(1+t^3) = \sum_{n=o}^{\infty} b_n t^n ,$$

$$\eta_4(t) = (1-t)^{-3}(1-t^3)^{-1} = \sum_{n=o}^{\infty} c_n t^n \qquad \text{and}$$

$$\phi_4(t) = \sum_{n=o}^{\infty} a_n t^n$$

we want to show

$$(1-t^p)\phi_4(t) = (1+t^p)\psi_4(t) + 2t^{\frac{p+1}{2}}\eta_4(t) .$$

We know this is correct (mod t^p). For $n \geq p$ we have to show that

$$b_n + b_{n-p} + 2c_{n-\frac{p+1}{2}} = a_n - a_{n-p} = p^{-1}\left(\binom{n+4}{4} - \binom{n+4-p}{4} \right) ,$$

where the last inequality follows from III.2.4.

Let $\lambda = e^{2\pi i/3}$. Then

$$b_n = \frac{85}{144} + \frac{2n^3+15n^2+42n}{72} + \frac{3}{16}(-1)^n + \frac{2}{9}\,\frac{\lambda^n-\lambda^{2n+1}}{1-\lambda}$$

and

$$c_n = \frac{n^3}{18} + \frac{n^2}{2} + \frac{4n}{3} + 1 + \frac{\lambda^{n+2}-\lambda^{2n+2}}{9(1-\lambda)} ,$$

when the computation for b_n follows from 2.10 and c_n is the solution of the difference equation

$$c_n - c_{n-3} = \binom{n+2}{2} \quad ,$$

which follows from the identity

$$(1-t^3) \sum c_n t^n = \sum \binom{n+2}{2} t^n \quad .$$

After some manipulation we get

$$b_n + b_{n-p} + 2c_{n-\frac{p+1}{2}} = \binom{n+4}{4} - \binom{n+4-p}{4} = a_n - a_{n-p}$$

which was desired. QED

<u>Corollary 3.2</u>. <u>For</u> $\frac{2p+5}{3} \leqslant n<p$ (resp. $\frac{2p+7}{3} \leqslant n<p$), <u>the integer</u>

$$a_{n,3} = p^{-1}\left(\binom{n+3}{3} + \binom{p-n-1}{3} \right) .$$

<u>Proof</u>. In case $2p = 3q+1$, we calculate

$$a_{3,n} = b_{3,n} + c_{n-q} + 2c_{n-q-2} = \frac{(n+2)(n+2-p)}{2} + \frac{p^2-1}{6}$$

$$= p^{-1} \left(\binom{n+3}{3} + \binom{p-n-1}{3} \right) .$$ QED

4. Fourier series and definite integrals. A general formula for $H_t\ (S^{\cdot}(V_{n+1})^{\nu_p})$.

In this section we use Fourier series techniques to get rather general expression for the $\phi_n(t)$. Most of them are given as definite integrals of products of Poisson Kernels, in the end we succeed in finding a general formula for $\phi_n(t)$ expressed as a sum of Gaussian polynomials evaluated at the p^{th} roots of unity.

By III.2.9 we have

$$(s-s^{-1})G_{n+r,r}(s^{-1},s) = \sum_{j=1}^{nr+1} c_{r,j}(n)(s^j-s^{-j})$$

where $S^r(V_{n+1}) = \bigoplus_{j=1}^{nr+1} c_{r,j}(n)V_j$ if $p>rn+1$

Set $s=e^{i\varphi}$ and get

$$\frac{\prod_{\nu=1}^{r} \sin(n+\nu)\varphi}{\prod_{\nu=1}^{r} \sin\nu\varphi} = \sum_{j=1}^{nr+1} c_{r,j}(n)\sin j\varphi \quad .$$

Observing that this is just the Fourier expansion of the trigonometric polynomial on the left, we get the next result.

Proposition 4.1.

$$c_{r,j}(n) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\prod_{\nu=1}^{r} \sin(n+\nu)\varphi}{\prod_{\nu=2}^{r} \sin\nu\varphi}\, d\varphi \ . \qquad \text{QED}$$

Remark 4.2. This formula could possibly be used for numerical computation of $c_{r,j}(n)$. The problem arising at the points where the denominator vanishes can be avoided by using steps of length π/q in the numerical integration, where q is a prime larger than r. It is "sufficient" to compute the integral with an error less than $1/2$ and then take the nearest integer.

For the remainder of this section we use the notation of §2 and §3.

Proposition 4.3. *Let*

$$g_r(\varphi) = (1-t)^{-1} \prod_{\nu=o}^{\frac{r}{2}-1} (1+t^2-2t\cos(r-2\nu)\varphi)^{-1} \quad \textit{if} \quad r \quad \textit{is even}$$

and

$$g_r(\varphi) = \prod_{\nu=o}^{\frac{r-1}{2}} (1+t^2-2t\cos(r-2\nu)\varphi)^{-1} \quad \textit{if} \quad r \quad \textit{is odd.}$$

Then

$$f_{r,j}(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g_r(\varphi)\sin\varphi\sin j\varphi\, d\varphi \ .$$

Proof. Set $s = e^{i\varphi}$ in the formula

$$(s-s^{-1})\prod_{\nu=o}^{r} (1-s^{r-2\nu}t) = \sum_{j=o}^{\infty} (f_{r,j}(t)(s^j-s^{-j})$$

and get

$$g_r(\varphi)\sin\varphi = \sum_{j=1}^{\infty} f_{r,j}(t)\sin j\varphi \quad .$$

Then take the $j^{\underline{th}}$ Fourier coefficient to get the result. QED

<u>Theorem 4.4. The series for "large p" is given by</u>

$$\psi_r(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g_r(\varphi)(1+\cos\varphi)\,d\varphi \quad ,$$

<u>where the</u> $g_r(\varphi)$ <u>are as in Proposition 4.3</u>.

<u>Proof</u>. We have

$$\psi_r(t) = \sum_{j=1}^{\infty} f_{r,j}(t) = \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} g_r(\varphi)\sin\varphi\sin j\varphi\,d\varphi$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g_r(\varphi)\sin\varphi\Big(\sum_{j=1}^{\infty}\sin j\varphi\Big)d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g_r(\varphi)(1+\cos\varphi)\,d\varphi$$

since $\sum_{j=1}^{\infty}\sin j\varphi = \frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi}$. To satisfy the analysts (see end of introduction) we have to justify this wild summation, which we do in the next lemma.

<u>Lemma 4.5. Let</u> $U(x)$ <u>be a continuous odd periodic function such that the integral</u>

$$\int_{-\pi}^{\pi} U(x)\cot\left(\frac{x}{2}\right)dx$$

<u>exists. Let</u>

$$U(x) = \sum_{1}^{\infty} c_n \sin nX$$

<u>be its Fourier series. Then</u>

$$\sum^{\infty} c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} U(x)\cot\frac{x}{2}dx \ .$$

<u>Proof</u>. We have

$$c_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} U(x)\ \sin nx\ dx$$

and $$\sum_{1}^{N} c_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} U(x)\Big(\sum_{1}^{N}\sin nx\Big)dx \ .$$

But $$\sum_{1}^{N}\sin nx = \frac{1}{2}\cot\frac{x}{2} - \frac{\cos(N+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}$$ and

hence $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} U(x)\cot\left(\frac{x}{2}\right)dx - \sum_{1}^{N} c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{U(x)}{\sin\frac{x}{2}}\cos\left(N+\frac{1}{2}\right)x\ dx \quad .$$

This last integral converges to 0 as $N \to \infty$ by the Riemann-Lebesgue lemma. Note that $\frac{U(x)}{\sin\frac{x}{2}}$ is integrable by assumption. QED

To get a formula for $\phi_n(t)$ we need formulas for $U_{n,2\nu p}$ and $U_{n,2\nu p+1}$.

Proposition 4.6.

$$U_{r,\nu}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g_r(\varphi)\cot(\tfrac{\varphi}{2})\,\{\sin(\nu\varphi)-\sin(\nu-1)\varphi\}d\varphi \quad .$$

Proof. As $U_{r,\nu}(t) = \sum_{j=\nu}^{\infty} f_{r,\nu}(t)$ we get, as above

$$U_{r,\nu}(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g_r(\varphi)\sin\varphi\,(\sum_{j=\nu}^{\infty}\sin j\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g_r(\varphi)\cot(\tfrac{\varphi}{2})(\sin\nu\varphi-\sin(\nu-1)\varphi)\,d\varphi \quad ,$$

since $\sum_{j=\nu}^{\infty}\sin j\varphi = \frac{\sin\nu\varphi - \sin(\nu-1)\varphi}{2(1-\cos\varphi)}$ QED

We now examine the (rational) function

$$\tilde{\phi}_n(t) := \psi_n(t) + \sum_{\nu=1}^{\infty} (U_{n,2\nu p}+U_{n,2\nu p+1}) \quad \text{which has the same}$$

coefficients as $\phi_n(t)$ (modulo t^p), by arguments similar to those in the previous section.

Proposition 4.7.

$$\tilde{\phi}_n(t) = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g_n(\varphi)(1+\cos\varphi)\,\frac{\sin(2m+1)p\varphi}{\sin p\varphi}\,d\varphi \quad .$$

Proof.Using the formulas in 4.3 and 4.6 we get

$$\tilde{\phi}_n(t) = \Psi_n(t) + \sum_{\nu=1}^{\infty}(U_{n,2\nu p}+U_{n,2\nu p+1}) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g_n(\varphi)(1+\cos\varphi)\,d\varphi$$

$$+ \lim_{m\to\infty}\sum_{\nu=1}^{m}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g_n(\varphi)\cot\tfrac{\varphi}{2}\,\{\sin(2\nu p+1)\varphi - \sin(2\nu p-1)\varphi\}\,d\varphi \quad .$$

But $\sum_{\nu=1}^{m}(\sin(2\nu p+1)\varphi - \sin(2\nu p-1)\varphi) = -\sin\varphi + \frac{\sin(2m+1)p\varphi}{\sin p\varphi}\sin\varphi$, and since $\sin\varphi\cot\frac{\varphi}{2} = 1+\cos\varphi$, the first integral cancels and we get the desired formula. QED

Fortunately $\tilde{\phi}_n$ is close to ϕ_n. In fact we will see that in case n is even they are equal. In any case we can compute the limit in the last proposition. We are indebted to Anders Melin who suggested the following helpful lemma.

Lemma 4.8. Let $f(\varphi)$ be an even periodic continuous function. Then

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\,\frac{\sin(2m+1)p\varphi}{\sin p\varphi} = \frac{f(\pi)-f(0)}{2p} + \frac{1}{p}\sum_{\mu=0}^{p-1} f\left(\frac{\mu\pi}{p}\right).$$

Proof. Make the substitution $x=p\varphi$ to get the integral (inside the limit)

$$\frac{1}{2\pi p}\int_{-p\pi}^{p\pi} f\left(\frac{x}{p}\right)\frac{\sin(2m+1)x}{\sin x}\,dx .$$

Split the interval $[-p\pi, p\pi]$ into several pieces. By the Riemann-Lebesgue lemma, for small $\delta>0$ and μ an integer

$$\lim_{m\to 0}\frac{1}{2\pi p}\int_{\mu\pi-\delta}^{(\mu+1)\pi-\delta} f\left(\frac{x}{p}\right)\frac{\sin(2m+1)x}{\sin x}\,dx = 0$$

Put $x = \mu\pi+y$ to get

$$\frac{1}{2\pi p}\int_{\mu\pi-\delta}^{\mu\pi+\delta} f\left(\frac{x}{p}\right)\frac{\sin(2m+1)x}{\sin x}\,dx = \frac{1}{2\pi p}\int_{-\delta}^{\delta} f\left(\frac{\mu\pi}{p}+\frac{y}{p}\right)\frac{\sin(2m+1)y}{\sin y}\,dy$$

which has $\frac{1}{2p}f\left(\frac{\mu\pi}{p}\right)$ as limit when $m\to\infty$, for $\mu = -p+1,\dots, p-1$ (see [Titchmarsh]).
For $\mu = \pm p$ and because f is continuous and periodic, we get

$$\frac{1}{2\pi p}\left(\int_{-p\pi}^{-p+\delta} + \int_{\mu\pi-\delta}^{p\pi}\right) = \frac{1}{2\pi p}\int_{-\delta}^{\delta} f\left(\pi+\frac{y}{p}\right)\frac{\sin(2m+1)y}{\sin y}\,dy$$

wich has $\frac{f(\pi)}{2p}$ as a limit when $m\to\infty$.

Adding up and using the fact that f is even gives the desired formula. QED

Remark 4.9. By using the last proposition and lemma with $f(\varphi) = g_n(\varphi)(1+\cos\varphi)$, we get

$$\tilde{\phi}_n(t) = -\frac{f(0)}{2p} + \frac{1}{p}\sum_{\mu=0}^{p-1} f\left(\frac{\mu\pi}{p}\right) .$$

Taking the limit as $p \to \infty$, we get the Riemann sum for the integral in Theorem 4.4 :

$$\lim_{p\to\infty} \phi_n(t) = \lim_{p\to\infty} \tilde{\phi}_n(t) = \psi_n(t) = \lim_{p\to\infty} \frac{1}{\pi}\sum_{\mu=0}^{p-1} \frac{\pi}{p} f\left(\frac{\mu\pi}{p}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(\varphi)d\varphi = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} g_n(\varphi)(1+\cos\varphi)d\varphi .$$

Now we can compute the Hilbert series $\phi_n(t)$ for even integers n in terms of a complex linear representation.

Theorem 4.10. Let $\underline{\mu}_p$ be the multiplicative group of $p^{\underline{th}}$ roots of unity. Then

$$H_t(S^\cdot(V_{2k+1})^{\nu_p}) = \phi_{2k}(t) = p^{-1}\sum_{\alpha\in\underline{\mu}_p} \left(\prod_{i=-k}^{k}(1-\alpha^i t)^{-1}\right.$$

Proof. By Proposition 4.7 we have

$$\tilde{\phi}_n(t) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (1+\cos\varphi)g_n(\varphi)\frac{\sin(2m+1)p\varphi}{\sin p\varphi}\, d\varphi .$$

Both the Dirichlet kernels $\frac{\sin(2m+1)p\varphi}{\sin p\varphi} = 1 + 2\sum_{\nu=1}^{\infty}\cos 2\nu p\varphi$ and the Poisson kernel $(1+t^2-2t\cos 2\mu\varphi)^{-1} = \frac{1}{1-t^2}(1+2\sum_{\nu=1}^{\infty} t^\nu \cos 2\nu\mu\varphi)$ involve only even cosine terms. Hence the same is true for

$$g_n(\varphi)\ \frac{\sin(2m+1)p\varphi}{\sin p\varphi} ,$$

so the term involving $\cos\varphi\, g_n(\varphi)$ integrates to zero. Thus

$$\tilde{\phi}_n(t) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g_n(\varphi)\ \frac{\sin(2m+1)p\varphi}{\sin p\varphi}\, d\varphi .$$

As $g_n(0) = g_n(\pi)$, we get, from Lemma 4.8 that

$$\tilde{\phi}_n(t) = \frac{1}{p}\sum_{\mu=0}^{p-1} g_n\left(\frac{\mu\pi}{p}\right) .$$

As

$$g_{2k}(\varphi) = (1-e^{2k\varphi i}t)^{-1}(1-e^{(2k-2)\varphi i}t)^{-1}\dots(1-e^{-2k\varphi i}t)^{-1} \quad ,$$

it follows that

$$\tilde{\Phi}_{2k}(t) = \frac{1}{p}\sum_{\mu=o}^{p-1}\left(\prod_{\nu=-k}^{k}(1-\beta^{\nu\mu}t)^{-1}\right)$$

where $\beta = e^{2\pi i/p}$

To finish the proof we show that

$$\phi_{2k}(t) = \tilde{\phi}_{2k}(t)$$

Noting that $\prod_{\nu=-q}^{\nu=q}(1-\alpha^{\nu}t) = 1-t^{p}$ if α is a $p^{\underline{th}}$ root of unity different from 1 and $p=2q+1$, we get

$$\tilde{\phi}_{2k}(t) = \frac{1}{p(1-t)^{n+1}} + \frac{1}{p(1-t^{p})}\sum_{\substack{\alpha\in\mu_p\\ \alpha\neq 1}}(1-\alpha^{k+1}t)(1-\alpha^{-(k+1)}t)\ \dots\ (1-\alpha^{q}t)1-\alpha^{-q}t)$$

Hence

$$(1-t^{p})\tilde{\phi}_{2k}(t) = \frac{1-t^{p}}{p(1-t)^{n+1}} + \frac{1}{p}\ (\text{polynomial of degree at most } 2(q-k\ )).$$

As $2(q-k) = p - n - 1$ and as

$$(1-t^{p})\phi_{2k}(t) = \frac{1-t^{p}}{p(1-t)^{n+1}} + \text{polynomial of degree } p-n-1$$

by Proposition 1.9, and as $\phi_{2k}(t)$ and $\tilde{\phi}_{2k}(t)$ agree modulo t^{p}, it is seen that these two polynomials on the right of the two expressions must be the same. Hence $\Phi_n(t) = \tilde{\Phi}_n(t)$ when n is even QED

Already this result takes the shape of Molien's Theorem 1.4. It is possible to formulate this more precisely. Whether or not this is accidental is unknown to us - it seems unlikely that it is.

<u>Corollary 4.11</u>. <u>Let</u> G <u>be the matrix group (over $\mathbb{C}$) with</u> p <u>elements generated by</u>

$$\begin{pmatrix} e^{\frac{n\pi i}{p}} & & \bigcirc \\ & e^{\frac{(n-2)\pi i}{p}} & \\ \bigcirc & & e^{\frac{-n\pi i}{p}} \end{pmatrix} \qquad n \text{ even}$$

Then $\phi_n(t) = H_t(S^{\cdot}(V_{n+1})^{\nu p}) = p^{-1} \sum_{g\in G} \frac{1}{\det(1-gt)}$

Proof. This follows directly from 4.10. QED

Using the Gaussian polynomials we can get yet another formulation of the result.

Corollary 4.12. Let $n = 2k$. Then

$$\phi_n(t) = p^{-1} \sum_{j=o}^{\infty} \Big(\sum_{\alpha\in\mu_p} G_{n+j,n}(\alpha^{1/2},\alpha^{-1/2})\Big)t^j$$

$$= \frac{1}{p(1-t)^{n+1}} + \frac{1}{p(1-t^p)} \sum_{j=o}^{p-n-1} \Big(\sum_{\substack{\alpha\in\mu_p \\ \alpha\neq 1}} G_{n+j,n}(\alpha^{1/2},\alpha^{-1/2})\Big)t^j .$$

Furthermore, with $A_\mu(n,j)$ denoting the number of partitions $I = (I_o,\dots,I_j)$ such that $|I| = n$ and $\|I\| = \mu$, we get

$$c_j = \sum_{\alpha\in\mu_p} G_{n+j,n}(\alpha^{1/2},\alpha^{-1/2}) = p \sum_{\nu=o}^{[\frac{nj}{p}]} A_{kj-\nu p}(n,j) \quad \text{and}$$

$$\sum_{\substack{\alpha\in\mu_p \\ \alpha\neq 1}} G_{n+j,n}(\alpha^{1/2},\alpha^{-1/2}) = c_j - \binom{n+j}{n}$$

Proof. These results follow from II.4. In fact

$$\prod_{\nu=-k}^{k} (1-\alpha^\nu t)^{-1} = \sum_{j=o}^{\infty} G_{n+j,n}(\alpha^{1/2},\alpha^{-1/2})t^j$$

As

$$G_{n+j,n}(\alpha^{1/2},\alpha^{-1/2}) = \frac{(\alpha^{\frac{n+1}{2}}-\alpha^{-\frac{n+1}{2}})\dots(\alpha^{\frac{j+1}{2}}-\alpha^{-\frac{j+1}{2}})}{(\alpha^{\frac{n}{2}}-\alpha^{-\frac{n}{2}})\dots(\alpha^{1/2}-\alpha^{-1/2})}$$

and as $(\alpha^{1/2})^p = -1$ if $\alpha \neq 1$ (where $\alpha\in\mu_p$), it follows that

$$G_{n+j+p,n}(\alpha^{1/2},\alpha^{-1/2}) = G_{n+j,n}(\alpha^{1/2},\alpha^{-1/2}) \quad \text{if } \alpha\neq 1 .$$

Furthermore $G_{n+j,n}(\alpha^{1/2},\alpha^{-1/2}) = 0$ if $\alpha \neq 1$ and $p-n \leq j < p$. Hence we get

$$\prod_{\nu=-k}^{k}(1-\alpha^\nu t)^{-1} = \frac{1}{1-t^p} \sum_{j=o}^{p-n-1} G_{n+j,n}(\alpha^{1/2},\alpha^{-1/2})t^j.$$

Summing over all $\alpha \neq 1$ in $\underline{\underline{\mu}}_p$ we get the second formula. (The first formula follows directly from the Theorem.)

Applying II.4.6 yields

$$G_{n+j,n}(\alpha^{1/2},\alpha^{-1/2}) = \sum_{\mu=0}^{nj} A_\mu(n,j)\alpha^{kj-\mu}$$

Summing over $\alpha\in\underline{\underline{\mu}}_p - \{1\}$ gives

$$\sum_{\substack{\alpha\in\underline{\underline{\mu}}_p \\ \alpha\neq 1}} G_{n+j,n}(\alpha^{1/2},\alpha^{-1/2}) = \sum_{\mu=0}^{nj} A_\mu(n,j)\Big(\sum_{\substack{\alpha\in\underline{\underline{\mu}}_p \\ \alpha\neq 1}} \alpha^{kj-\mu}\Big) .$$

As

$$\sum_{\substack{\alpha\in\underline{\underline{\mu}}_p \\ \alpha\neq 1}} \alpha^i = \begin{cases} -1 & \text{if } i \not\equiv 0 \pmod p \\ p-1 & \text{if } i \equiv 0 \pmod p \end{cases} ,$$

we get the results in the second part of the statement. QED

<u>Corollary 4.13</u>. <u>If</u> n <u>is even, then</u>

$$\phi_n(t^{-1}) = (-t)^{n+1}\phi_n(t) .$$

<u>Proof</u>. By the theorem

$$\phi_n(t^{-1}) = p^{-1}\sum_{\alpha\in\underline{\underline{\mu}}_p} \prod_{\nu=-n/2}^{n/2} (1-\alpha^\nu t^{-1})^{-1}$$

$$= p^{-1}\sum_{\alpha\in\underline{\underline{\mu}}_p} (1-t^{-1})^{-1} \prod_{\nu=1}^{n/2} (1-\alpha^\nu t^{-1})^{-1}(1-\alpha^{-\nu}t^{-1})^{-1}$$

$$= p^{-1}\sum_{\alpha\in\underline{\underline{\mu}}_p} -t(1-t)^{-1} \prod_{\nu=1}^{n/2} t^2(1-\alpha^\nu t)^{-1}(1-\alpha^{-\nu}t)^{-1}$$

$$= (-t)^{n+1}\phi_n(t).$$ QED

We turn now to the more difficult case in which n is odd. It happens that $\phi_n \neq \tilde{\phi}_n$, but we can get the correct ϕ_n anyway.

<u>Theorem 4.14. Let</u> $\underline{\underline{\mu}}_p$ <u>be the group of</u> $p^{\underline{th}}$ <u>roots of unity in</u> $\mathbb{C}$. <u>For</u> $\gamma\in\underline{\underline{\mu}}_p$ <u>define the matrix</u>

$$M(\gamma) = \begin{pmatrix} \gamma^n & & \bigcirc \\ & \gamma^{n-2} & \\ \bigcirc & & \gamma^{-n} \end{pmatrix}$$

. If n is odd, then

$$\phi_n(t) = H_t(S^{\cdot}(V_{n+1})^{\nu p} = \frac{1}{2p}\sum_{\gamma\in\underline{\mu}_p}\left(\frac{1+\gamma}{\det(1-M(\gamma)t)} + \frac{(1+t^p)(1-\gamma)}{(1-t^p)\det(1+M(\gamma)t)}\right) .$$

Proof. We begin by computing $\tilde{\phi}_n(t)$ using Proposition 4.7 and Lemma 4.8. So we have

$$\tilde{\phi}_n(t) = \frac{1}{p(1-t)^{n+1}} + \frac{1}{p}\sum_{\mu=1}^{p-1}\frac{1+\cos\frac{\mu\Pi}{p}}{\prod_{\nu\ \mathrm{odd}}(1-e^{\nu\mu\Pi i/p}t)(1-e^{-\nu\mu\Pi i/p}t)}$$

Set $\beta = e^{\Pi i/p}$. Then $\beta^2 = e^{2\Pi i/p} = \alpha$, which generates $\underline{\mu}_p$. Also $\beta^p = -1$. Set $p = 2k+1$. Split the sum above into two parts, one for even powers of β and one for odd powers getting

$$\tilde{\phi}_n(t) = \frac{1}{p(1-t)^{n+1}} +$$

$$\frac{1}{2p}\sum_{j=1}^{k}\frac{\alpha^j+2+\alpha^{-j}}{\prod_{\nu=1,3,\ldots,n}(1-\alpha^{j\nu}t)(1-\alpha^{-j\nu}t)} + \frac{1}{2p}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{\beta^{2j+1}+2+\beta^{-(2j+1)}}{\prod_{\nu=1,3,\ldots,n}(1-\beta^{(2j+1)\nu}t)(1-\beta^{-(2j+1)\nu}t)}$$

$$= \frac{1}{p(1-t)^{n+1}} + \frac{1}{2p}\sum_{j=1}^{k}\left\{\frac{\alpha^j+2+\alpha^{-j}}{\prod_\nu(1-\alpha^{j\nu}t)(1-\alpha^{-j\nu}t)} + \frac{2-\alpha^j-\alpha^{-j}}{\prod_\nu(1+\alpha^{j\nu}t)(1+\alpha^{-j\nu}t)}\right\}$$

this last since $\beta^{-(2j+1)} = -\beta^{p-(2j+1)} = -\beta^{2(k-j)}$

Taking common denominators in this sum yields

$$\tilde{\phi}_n(t) = \frac{1}{p(1-t)^{n+1}} + \frac{W_1}{1-t^p} + \frac{W_2}{1+t^p},$$ where

W_1 and W_2 are polynomials of degree at most $p-(n+1)$ (see the last part of the proof of 4.10). Set

$$\hat{\phi}_n(t) := \frac{1}{p(1-t)^{n+1}} + \frac{W_1+W_2}{1-t^p} .$$

Then $\phi_n(t) \equiv \tilde{\phi}_n(t) \equiv \hat{\phi}_n(t) \pmod{t^p}$. Furthermore

$(1-t^p)\hat{\phi}_n(t) = \dfrac{1-t^p}{p(1-t)^{n+1}} + W_1 + W_2$. Arguing just as in the case n even, we find that $\hat{\phi}_n = \phi_n$.

Hence

$$(4.15)\quad \phi_n(t) = \frac{1}{p(1-t)^{n+1}} + \frac{1}{2p}\sum_{j=1}^{k}\{\frac{2+\alpha^j+\alpha^{-j}}{\prod\limits_{\nu\ \mathrm{odd}}(1-\alpha^{\nu j}t)(1-\nu^{-\nu j}t)}$$

$$+ \frac{1+t^p}{1-t^p}\frac{2-\alpha^j-\alpha^{-j}}{\prod\limits_{\nu\ \mathrm{odd}}(1+\alpha^{\nu j}t)(1+\alpha^{-\nu j}t)}\}$$

If $M(\alpha^j) = \mathrm{diag}(\alpha^{nj},\alpha^{(n-2)j},\ldots,\alpha^{-nj})$, then

$$\det(1\pm M(\alpha^j)t) = \prod_{\nu=1,3,\ldots,n}(1\pm\alpha^{\nu j}t)(1\pm\alpha^{-\nu j}t)\ .$$

Note that $\alpha^{-j} = \alpha^{p-j}$ and that

$$\det(1\pm M(\alpha^j)t) = \det(1\pm M(\alpha^{-j})t).$$

Then (4.15) becomes

$$\phi_n(t) = \frac{1}{p(1-t)^{n+1}} + \frac{1}{2p}\sum_{\substack{\gamma\in\underline{\mu}_p\\ \gamma\neq 1}}\left(\frac{1+\gamma}{\det(1-M(\gamma)t)} + \frac{1-\gamma}{\det(1-M(\gamma)t)}\frac{1+t^p}{1-t^p}\right)$$

Note further that $\det(1-M(1)t = (1-t)^{n+1}$, so

$$\frac{1}{p(1-t)^{n+1}} = \frac{1+1}{2p\ \det(1-M(1)t)}\ .$$ Hence

$$\phi_n(t) = \frac{1}{2p}\sum_{\gamma\in\underline{\underline{\mu}}_p}\{\frac{1+\gamma}{\det(1-M(\gamma)t)} + \frac{1+t^p}{1-t^p}\ \frac{1-\gamma}{\det(1+M(\gamma)t)}\}$$ as desired. QED

<u>Corollary 4.16</u>. <u>If</u> n <u>is odd, then</u>

$$\phi_n(t) = p^{-1}\sum_{r\ \mathrm{even}}(\sum_{\gamma\in\underline{\underline{\mu}}_p} G_{n+r,n}(\alpha,\alpha^{-1})t^r + p^{-1}\sum_{r\ \mathrm{odd}}(\sum_{\gamma\in\underline{\underline{\mu}}_p}\alpha G_{n+r,n}(\alpha,\alpha^{-1})t^r$$

and

$$\phi_n(t) = \sum_{r=o}^{\infty} \Big(\sum_{|j| \leq [\frac{nr+1}{2p}]} A_{[\frac{nr+1}{2}]-jp} (r,n)\Big) t^r .$$

Proof. Set $p=2k+1$ and $\alpha=e^{2\pi i/p}$. Using the generating functions for $G_{n+r,r}$ in II.4 and formula (4.15) for $\phi_n(t)$ in the theorem we get

$$\phi_n(t) = \frac{1}{p(1-t)^{n+1}} + \frac{1}{2p} \sum_{\nu=o}^{\infty} \Big(\sum_{j=1}^{k} (\alpha^j+2+\alpha^{-j}) G_{n+\nu,n}(\alpha^j,\alpha^{-j})\Big) t^\nu$$

$$+ \frac{1}{2p} \sum_{\nu=o}^{\infty} (-1)^\nu \Big(\sum_{j=1}^{\infty} (2-\alpha^j-\alpha^{-j}) G_{n+\nu,n}(\alpha^j,\alpha^{-j})\Big) t^\nu$$

$$= \frac{1}{p} \sum_{\nu=o}^{\infty} \binom{n+\nu}{n} t^\nu + \frac{2}{p} \sum_{\nu \text{ even}} \Big(\sum_{j=1}^{k} G_{n+\nu,n}(\alpha^j,\alpha^{-j})\Big) t^\nu$$

$$+ \frac{1}{p} \sum_{\nu \text{ odd}} \Big(\sum_{j=1}^{k} (\alpha^j+\alpha^{-j}) G_{n+\nu,n}(\alpha^j,\alpha^{-j})\Big) t^\nu$$

$$= \frac{1}{p} \sum_{\nu \text{ even}} \Big(\sum_{\alpha \in \underline{\underline{\mu}}_p} G_{n+\nu,\nu}(\alpha,\alpha^{-1})\Big) t^\nu + \frac{1}{p} \sum_{\nu \text{ odd}} \Big(\sum_{\alpha \in \underline{\underline{\mu}}_p} \alpha G_{n+\nu,n}(\alpha,\alpha^{-1})\Big) t^\nu .$$

The second formula follows -- from the first we get

$$\phi_n(t) = \frac{1}{p} \sum_{\nu \text{ even}} \sum_{\mu=o}^{n\nu} A_\mu \Big(\sum_{\alpha \in \underline{\underline{\mu}}_p} \alpha^{n\nu-2\mu}\Big) t^\nu + \frac{1}{p} \sum_{\nu \text{ odd}} \sum_{\nu=p}^{n\nu} A_\mu \Big(\sum_{\alpha \in \underline{\underline{\mu}}_p} \alpha^{n\nu+1-2\mu}\Big) t^\nu$$

$$= \sum_{\nu=o}^{\infty} \Big(\sum_{|j| \leq [\frac{n\nu+1}{p}]} A_{[\frac{n\nu+1}{2}]-jp} \Big) t^\nu$$

since
$$\sum_{\alpha \in \underline{\underline{\mu}}_p} \alpha^\mu = \begin{cases} 0 & \text{if } \mu \not\equiv 0 \pmod p \\ p & \text{if } \mu \equiv 0 \pmod p \end{cases} .$$
QED

Letting $p \to \infty$ in these formulas for ϕ_n we get a combinatorial formula.

Theorem 4.17.

$$\psi_n(t) = \sum_{\nu=o}^{\infty} A_{[\frac{n\nu+1}{2}]} (\nu,n) t^\nu = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{\pi} (1+\cos\varphi) g_n(\varphi)\, d\varphi .$$
QED

Corollary 4.18. Let $\lambda = e^{2\pi i/3}$ Then

$$A_{2n}(n,4) = \frac{85}{144} + \frac{2n^3+15n^2+42n}{72} + \frac{3}{16}(-1)^n + \frac{2(\lambda^n-\lambda^{2n+1})}{9(1-\lambda)}$$

is the number of solutions $|J| = (J_o,J_1,J_2,J_3)$ of $|J| = 2n$ with $0 \leq J_i \leq n$ or equivalently the number of solutions $|I| = (I_o,I_1,I_2,I_3,I_4)$ with $|I| = n$ and $\|I\| = 2n$.

Proof. See the formulas 2.10. QED

5. Symmetry of the Hilbert series ; a conjecture of Stanley.

In this section we study the symmetry properties of the rational functions $H_t(S^{\cdot}(V_{n+1})^{\nu_P})$. Stanley used the Hilbert series of a graded ring to study such properties as Gorenstein, Cohen-Macaulay, etc. [Stanley (to appear)] . Among other results, we give many counter examples to a question he raised in that paper [Stanley, loc.cit, end of section 4] .

Definition 5.1. A rational function $F(t)$ is symmetric if there are integers d and r such that

$$F(t^{-1}) = (-1)^d t^r F(t) \quad .$$

When $F(t) = P(t)/Q(t)$ and $Q(t)$ is a polynomial of the form $\Pi(1-t^{a_i})$, and $P(t)$ has non-negative coefficients, then $F(t)$ is symmetric exactly when $P(t)$ has the same coefficients for t^i and t^{m-i} (where $\deg P = m$). The main result for the algebras under study is the next one.

Theorem 5.2. The function $H_t(S^{\cdot}(V_{n+1})^{\nu_P})$ is symmetric if and only if $n=1$ or n is even.

Proof. By Theorem 4.10, we can write

$$\phi_{2k}(t) = \frac{1}{p} \sum_{\alpha \in \mu_p} \prod_{\nu=-k}^{k} (1-\alpha^\nu t)^{-1} \quad . \qquad \text{Hence}$$

$$\phi_{2k}(t) = (-t)^{2k+1}\phi_{2k}(t) \qquad \text{as in Corollary 4.13.}$$

If $n = 1$, then $\phi_1(t) = \dfrac{1}{(1-t)(1-t^p)}$, which is also symmetric.

If n is odd, it follows from formula (4.15) that $\phi_n(t^{-1})$ obtains a factor of t^{n+1} in the first two terms and a factor of $-t^{n+1}$ in the last term. Hence $\phi_n(t)$ is not symmetric. QED

The result of Stanley's, mentioned above, can now be related to this material. We state his result [Stanley (to appear) §4] . We suppose $A = \bigoplus_{r\geq o} A_r$ is a positively graded k-algebra.

Proposition 5.3. (a) Let A be a Gorenstein k-algebra of Krull dimension d . Then there is an integer r such that

$$H_{t^{-1}}(A) = (-1)^d t^r H_t(A).$$

(b) If A is a Cohen-Macaulay integral domain then A is a Gorenstein ring if and only if $H_t(A)$ is symmetric.

Thus Proposition 5.2 together with this result of Stanley's yields yet another proof that the rings of invariants $S^{\cdot}(V_{n+1})^{\nu_p}$ are not Gorenstein in case n is odd. (Compare with the proof in Chapter IV.) Combining these with a further result, due to Murthy, shows that these rings are not Cohen-Macaulay.

Proposition 5.4.[Murthy(1969)] . If the local (resp. graded) unique factorization domain A is a homomorphic image of a Gorenstein ring, then A is Cohen-Macaulay if and only if it is Gorenstein.

The proof is quite simple - Since A is a homomorphic image of a Gorenstein ring it has a dualizing complex. If A is Cohen-Macaulay the complex reduces to a module that is isomorphic to a reflexive ideal. Thus if A is a unique factorization domain, then the dualizing module is free. Hence A is Gorenstein.

Since the rings $S^{\cdot}(V_{n+1})^{\nu_p}$ are unique factorization domains (see IV) and are homomorphic images of polynomial rings, they are Gorenstein if and only if they are Cohen-Macaulay. But they are never Cohen-Macaulay for $n \geq 3$.

At the end of Section 4 in his paper Stanley conjectured that Hilbert series for unique factorization domains are symmetric. These provide counter-examples to the conjecture. But as seen in Section 1 of this chapter there are other counter examples. See also Problem 3.11.

Counter-example 5.5. The Hilbert series for the factorial rings $S^{\cdot}(V_{n+1})^{\nu_p}$; n odd$\geq$3 ; $S^{\cdot}(V_{p^m-1})^{\nu_{p^m}}$; p odd, and $S^{\cdot}(V_{2^\alpha})^{\nu_{p^\alpha}}$ are not symmetric.

The proof for V_{n+1} is in Theorem 5.2. For the other cases the result follows from the calculations in Section V.1.

There are other interesting aspects of these series found in Stanley's paper. For example we state his 4.6 [Stanley (to appear)] which is due to [Popoviciu (1953)] .

Proposition 5.6. Let $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ be distinct complex numbers and $P_1,\ldots,P_m$ be polynomials in $\mathbb{C}[X]$. Define

$$H(\mu) := \sum_{i=1}^{m} P_i(\mu)\alpha_i^{\mu} \quad \text{for} \quad \mu \in \mathbb{Z} . \qquad \text{Set}$$

$$F(t) = \sum_{\mu=0}^{\infty} H(\mu)t^{\mu} \in \mathbb{C}[[t]]; \quad \text{and} \quad \overline{F}(t) = \sum_{\mu=q}^{\infty} H(-\mu)t^{\mu} .$$

Then $\overline{F}(t) = -F(t^{-1})$.

Using this we can make some calculations of the integers $a_{n,r} = \dim_k S^r(V_{n+1})^{\nu_p}$.

Proposition 5.7. (a) If n is odd, if $\nu > n$ and $n(\nu-n-1)+1 < p$, then

$$a_{n,p-\nu} = p^{-1}\{\binom{p-\nu+n}{n} + \binom{\nu-1}{n}\} .$$

(b) If n is even and $\nu > n$, then

$$a_{n,p-\nu} = a_{n,\nu-n-1} + p^{-1}\{\binom{p-\nu+n}{n} - \binom{\nu-1}{n}\} .$$

Proof. (b) Suppose n is even. Then $\phi_n(t)$ is symmetric. Set $\phi_n(t) = \sum_{r=0}^{\infty} H(r)t^r$. Then the $H(r)$ satisfy the conditions of Popoviciu's Theorem 5.6, as $H(r)$ satisfies a difference equation whose characteristic polynomial is the denominator of $\phi_n(t)$. Hence

$$\overline{\phi}_n(t) := \sum_{r=1}^{\infty} H(-r)t^r = -\phi_n(t^{-1}) = t^{n+1}\phi_n(t) = \sum_{r=0}^{\infty} H(r)t^r .$$

It follows that $H(-r) = H(r-n-1)$. By III.2.5, we know that

$$(*) \qquad H(r+p) - H(r) = p^{-1}\left\{\binom{r+n+p}{n} - \binom{r+n}{n}\right\}$$

as functions of $r \in \mathbb{Z}$. Set $r = -s$ to get

$$H(p-s) - H(-s) = p^{-1}\left\{\binom{p-s+n}{n} - \binom{n-s}{n}\right\}$$

As $H(-s) = H(s-n-1)$ and as $\binom{n-s}{n} = \binom{s-1}{n}$ as polynomials in s, we have

$$a_{n,p-s} - a_{n,s-n-1} = p^{-1}\left\{\binom{p-s+n}{n} - \binom{s-1}{n}\right\} \qquad \text{for } s>n .$$

<u>Remark 5.8</u>. By [Stanley (to appear) 4.7] it follows that $H(-s) = 0$ if $s\leq n$. Putting this in $(*)$ above we have

$$a_{n,p-s} = p^{-1}\binom{p-s-n}{n}$$

and we have again proved that $S^r(V_{n+1})$ is a free $k\nu_p$-module when $r+n\geq p$ (see III.2.).

a) The rational function $\phi_n(t)$ is not symmetric when n is odd and $n>1$. But we can write

$$\phi_n(t) = F_1(t) + F_2(t)$$

where $F_1(t^{-1}) = _\infty t^{n+1}F_1(t)$ and $F_2(t^{-1}) = - t^{n+1}F_2(t)$.

Set $F_i(t) = \sum_{r=o} H_i(r)t^r$ for $i=1,2$.

Setting $r = -s$ in the formula

$$H_1(r+p) + H_2(r+p) - H_1(r) - H_2(r) = p^{-1}\left\{\binom{r+n+p}{n} - \binom{r+n}{n}\right\}$$

we see that the formula is true if and only if

$$H_1(-s) + H_2(-s) = 0$$

Using 5.6 again applied to F_1 and to F_2 we find

$$H_1(-s) = H_1(s-n-1) \qquad \text{and}$$

$$H_2(-s) = - H_2(s-n-1)$$

Set $r = s-n-1$. Then we must show that $H_1(r) = H_2(r)$ for small r .

Using the expression in Corollary 4.16, we find

$$H_1(r) = p^{-1}\binom{n+r}{r} + \frac{1}{2p}\sum_{j=1}^{k}(\alpha^j+2+\alpha^{-j})\, G_{n+r,n}(\alpha^j,\alpha^{-j})$$

and

$$H_2(r) = \frac{1}{2p}\sum_{j=1}^{k}(2-\alpha^j-\alpha^{-j})\, G_{n+r,n}(\alpha^j,\alpha^{-j})(-1)^r,$$

where $p = 2k+1$.

Hence $H_1(r) = H_2(r)$ is equivalent to

(1) $\displaystyle\sum_{\alpha\in\underline{\underline{\mu}}_p} G_{n+r,n}(\alpha,\alpha^{-1}) = 0$ if r is odd

(2) $\displaystyle\sum_{\alpha\in\underline{\underline{\mu}}_p} \alpha\, G_{n+r,n}(\alpha,\alpha^{-1}) = 0$ if r is even.

But using the expression

$$G_{n+r,n}(\alpha,\alpha^{-1}) = \sum_{m=o}^{nr} A_m\, \alpha^{nr-2m}$$

we get

(1) $\displaystyle\sum_{\alpha\in\underline{\underline{\mu}}_p} G_{n+r,n}(\alpha,\alpha^{-1}) = \sum_{m=o}^{rn} A_m \sum_{\alpha\in\underline{\underline{\mu}}_p}\alpha^{nr-2m} = 0$

if $rn<p$ (since r and n are both odd, we have $rn-2m \neq 0$).

(2) $\displaystyle\sum_{\alpha\in\underline{\underline{\mu}}_p} \alpha\, G_{n+r,n}(\alpha,\alpha^{-1}) = \sum_{m=o}^{rn} A_m \sum_{\alpha\in\underline{\underline{\mu}}_p}\alpha^{rn+1-2m} = 0$

if $rn+1<p$, since r is even QED

Next we wish to compute $H_t(S^{\cdot}(V_{n+1})^{\nu_p})$ when n is close to p. This is achieved in the next result.

<u>Theorem 5.9</u>. <u>If</u> $p> s^2/4$, <u>then</u>

$$H_t(S^{\cdot}V_{p-s+1})^{\nu_p}) = \phi_{p-s}(t) = \frac{(1-t)^{s-1}}{p}\left\{\frac{1}{(1-t)^p} - \frac{1}{1-t^p}\right\} +$$

$$+ \frac{1}{(1-t)^p}\sum_{2r+j=s-1} a_{2r,j}\, t^{2r} .$$

<u>Proof</u>. By Proposition 1.11 and the last proposition above we have

$$\phi_{p-s}(t) = \frac{1}{p(1-t)^{p-s+1}} + \frac{1}{(1-t)^p}\sum_{r=o}^{s-1}\left(a_{p-s,r} - \frac{1}{p}\binom{p-s+r}{r}\right)t^r$$

$$= \frac{1}{p}\left\{\frac{1}{(1-t)^{p-s+1}} - \frac{1}{(1-t)^{p}}\sum_{r=0}^{s-1}\binom{s-1}{r}t^{r}\right\} + \frac{1}{1-t^{p}}\sum_{r=0}^{[\frac{s-1}{2}]} a_{2r,s-2r-1}t^{2r}$$

This last equality holds provided

$$\left(\frac{s-1}{2}\right)^2 = \max\{n(s-1-n)+1 \quad : \quad 0\leq n\leq s-1\} < p$$

(the hypothesis in 5.7) and this is true if $p > \frac{s^2}{4}$ QED

Now we list 15 examples of $\phi_{p-s}(t)$ for large p. In order to write these explicitly we need a table for the $b_{n,r}$ (which are $a_{n,r}$ for "large" p). Then it will be easy to read off $\phi_{p-s}(t)$.

<u>TABLE OF</u> $b_{n,r} = \dim_k S^r(V_{n+1})^{\nu_p}$ <u>FOR</u> $p > n+1$.

r \ n	0	1	2	3	4	5	6
0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	2	2	3	3	4
3	1	1	2	3	5	6	8
4	1	1	3	5	8	12	18
5	1	1	3	6	12	20	32
6	1	1	4	8	18	32	58
7	1	1	4	10	24	49	94
8	1	1	5	13	33	73	163
9	1	1	5	15	43	102	268
10	1	1	6	18	55	141	382
11	1	1	6	21	69	190	582
12	1	1	7	25	86	252	783
13	1	1	7	28	104	325	1082
14	1	1	8	32	126	414	1417
15	1	1	8	36	150		1816
16	1	1	9	41	177		2310
17	1	1	9	45	207		
18	1	1	10	50	241		
19	1	1	10	55	277		
20	1	1	11	61	318		

TABLE OF $H_t(S^{\cdot}(V_{p-s+1})^{\nu p})$ FOR $p > s^2/4$

$$H_t(S^{\cdot}(V_{p-s+1})^{\nu p}) = \frac{(1-t)^{s-1}}{1}\left\{\frac{1}{(1-t)^p} - \frac{1}{1-t^p}\right\} + \frac{1}{1-t^p} W_s(t)$$

where $W_s(t)$ is given below :

s	$W_s(t) =$
1	1
2	1
3	$1 + t^2$
4	$1 + t^2$
5	$1 + 2t^2 + t^4$
6	$1 + 2t^2 + t^4$
7	$1 + 3t^2 + 3t^4 + t^6$
8	$1 + 3t^2 + 5t^4 + t^6$
9	$1 + 4t^2 + 8t^4 + 4t^6 + t^8$
10	$1 + 4t^2 + 12t^4 + 5t^6 + t^8$
11	$1 + 5t^2 + 18t^4 + 18t^6 + 5t^8 + t^{10}$
12	$1 + 5t^2 + 24t^4 + 32t^6 + 13t^8 + t^{10}$
13	$1 + 6t^2 + 33t^4 + 58t^6 + 33t^8 + 6t^{10} + t^{12}$
14	$1 + 6t^2 + 43t^4 + 94t^6 + 73t^8 + 18t^{10} + t^{12}$
15	$1 + 7t^2 + 55t^4 + 163t^6 + 163t^8 + 55t^{10} + 7t^{12} + t^{14}$

Example 5.10. To see how the second table is obtained from the first we do the calculation for $\phi_{p-12}(t)$. By the proposition

$$\phi_{p-12}(t) = \frac{(1-t)^{11}}{p}\left\{\frac{1}{(1-t)^p} - \frac{1}{1-t^p}\right\} + \frac{1}{1-t^p}\sum_{2r+j=11} a_{2r,j}t^{2r}$$

The polynomial under the summation is denoted by $W_{12}(t)$. Then

$$W_{12}(t) = 1 + a_{2,9}t^2 + a_{4,7}t^9 + a_{6,5}t^6 + a_{8,3}t^8 + a_{10,1}t^{10}$$

If $p > (12)^2/4 = 36$, then $a_{n,r} = b_{n,r}$, so we read off the coefficients from the table for $b_{n,r}$ to get the desired result.

Remark 5.11. It is seen that $\phi_{p-s}(t)$ is symmetric if and only if $p-s$ is even. If $s>6$ and $p-s$ odd, then $W_s(t)$ is not symmetric. For $s=2,4,6$ it is easily checked directly.

Considering the case $n=2,3,..,6$ it seems that

$$\psi_n(t^{-1}) = (-1)^n t^{n+1}\psi_n(t)$$

This cannot be demonstrated by using the fact that

$$g_n(t^{-1},\varphi) = (-t)^{n+1} g_n(t,\varphi)$$

and then integrating and sending $p \to \infty$, since the operations do not commute with the operation $t \longrightarrow t^{-1}$. (Even the wrong sign appears if this is attempted). The validity of the formula would have the following consequence :

Let

$$\psi_n(t) = \sum_{r=o}^{\infty} H(r)t^r \qquad \text{where} \qquad H(r) = A_{rk}(r,2k)$$

when $n = 2k$. Then

$$H(-r) = H(r-2k-1) \qquad \text{if} \quad r > 2k+1 \quad \text{and}$$

$$H(-r) = 0 \qquad \text{if} \quad r = 1,2,..,2k.$$

VI. Examples and problems.

In this chapter we study the examples in small dimension, we prove that $\operatorname{depth}(S^{\cdot}(V_4)^{\nu_4}) = 3$ and consider many of the open problems.

1. Examples in small dimension.

In this section we study the invariants of V_1, V_2, V_3. Since the operation of ν_p on V_1 is trivial, we obtain the immediate result

$$S^{\cdot}(V_1)^{\nu_p} = S^{\cdot}(V_1)$$

Slightly more interesting is the action on V_2.

Proposition 1.1. *In $S^{\cdot}(V_2)^{\nu_p}$ there is an invariant $u_o=X_o$ of degree 1 and an invariant $u_1=N$ of degree p such that*

$N = X_1^p - X_1X_o^{p-1}$ *and*

$$S^{\cdot}(V_2)^{\nu_p} = k\,[u_o,u_1] \ .$$

(Consequently u_o, u_1 are algebraically independent and this is a polynomial ring).

<u>Proof</u>. Clearly $u_o = X_o$ is invariant. Also

$$N = X_1(X_1+X_o)(X_1+2X_o)\ldots(X_1+(p-1)X_o) = \prod_{j=o}^{p-1}\sigma^j(X_1)$$

is invariant. Since $S^r(V_2) \cong V_{r+1}$ for $0 \leqslant r < p$, we know there is exactly one invariant in each dimension up to $p-1$ and as u_o^r is invariant, we see that it is the only one.

Then $S^p(V_2) = V_p \oplus V_1$. So there are two invariants that are linearly independent. As u_1 and u_o^p are linearly independent they must span the invariants in degree p.

It is clear that u_o, u_1 is a system of parameters and that

$$[k(X_o,X_1) : k(u_o,u_1)] = p$$

since $T^p - u_oT - u_1 = 0$ is a separable polynomial over $k(u_o,u_1)$. The remainder of the proof is clear, either by counting dimension or by looking at Galois extensions.

<u>Proposition 1.2. In $S^\cdot(V_3)^{\nu_p}$ there are 4 invariants</u>

$$u_o = X_o \qquad M = X_1^p - X_o^{p-1}X_1$$

$$u_1 = X_1^2 - X_2X_o \qquad N = \prod_{r=o}^{p-1}(X_2+2rX_1+r^2X_o)$$

<u>such that</u> $S^\cdot(V_3)^{\nu_p} = k[u_o,u_1,M,N]$. <u>The elements</u> u_o,u_1,M,N <u>are related by one equation</u>

$$M^2 - u_o^pN + \text{terms of the form } u_o^iu_1^j = 0 \text{ (where } i+2j = 2p).$$

<u>Proof</u>. These elements are invariant if we take the group action to be

$$\sigma(X_2) = X_2 + 2X_1 + X_o$$

$$\sigma(X_1) = X_1 + X_o \qquad \sigma(X_o) = X_o \quad .$$

It is clear that u_o,u_1,V are algebraically independent.

Consider $M^2-u_o^pN-u_1^p$ and note that those terms involving X_1^{2p} and $X_2^pX_o^p$ vanish and that X_o^{p-1} divides the result.

As $\dim S^{\cdot}(V_3) = \dim S^{\cdot}(V_3)^{\nu_p} = 3$ and as u_o, u_1 and N form a system of parameters in $S^{\cdot}(V_3)$, they are algebraically independent If $p \neq 2$ (which it must be by our assumption that ν_p acts on V_3) the ring $k[W_1, W_2, W_3]$ $[Z]$ with $Z^2 \in k[W_1, W_2, W_3]$ and $T^2 - Z^2$ irreducible, is normal. Hence $k[u_o, u_1, N, M]$ is normal. Consider the extension $k(X_o, X_1, X_2) \supsetneq k(u_o, u_1, N, M)$. We know that $X_1^p - u_o^{p-1} X_1 - M = 0$ and $\frac{X_2}{X_o} = (\frac{X_1}{X_o})^2 - \frac{u_1}{X_o^2}$.

Thus $\qquad k(X_o, X_1, X_2) = k(u_o, u_1, N, M)[X_1]$

and so $\qquad [k(X_o, X_1, X_2) : k(u_o, u_1, N, M)] \leq p$

Hence $\qquad k(u_o, u_1, N, M) = k(X_o, X_1, X_2)^{\nu_p}$.

As $k[X_o, X_1, X_2]$ is integral over $k[u_o, u_1, N, M]$ and this last ring is normal, it follows that

$$k[u_o, u_1, N, M] = k[X_o, X_1, X_2]^{\nu_p}$$

QED

The only case where it is possible to study $S^{\cdot}(V_4)$ is treated in the next section.

2. Bertin's Example.

In this section we study what we call Bertin's example [Bertin (1967)]. Let k be a field with $\mathrm{char}(k) = 2$ and let V_4 be the regular representation of $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, with indecomposable factor V_3. Suppose

$$V_4 = kX_o + kX_1 + kX_2 + kX_3$$

and

$$V_3 = k\bar{X}_1 + k\bar{X}_2 + k\bar{X}_3 = V_4 / kX_o \quad .$$

The action of a generator σ of $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ is, as usual,

$$\sigma(X_i) = X_i + X_{i-1} \quad .$$

<u>Proposition 2.1</u>. <u>The following elements are</u> $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ <u>invariants in</u> $S^{\cdot}(V_4)$ <u>and</u> $S^{\cdot}(V_3)$ <u>respectively</u>.

$S^{\cdot}(V_4)$	$S^{\cdot}(V_3)$
$u_1:=X_o$	$v_1:=\overline{X}_1$
$u_2:=X_1(X_1+X_o)$	$v_2:=\overline{X}_2(\overline{X}_2+\overline{X}_1)$
$u_3:=X_3X_o+X_2X_1+X_2(X_2+X_o)$	$v_3:=\overline{X}_3\overline{X}_1(\overline{X}_3+\overline{X}_1)+\overline{X}_2^2(\overline{X}_2+\overline{X}_1)$
$y_1:=X_2(X_2+X_o)X_o+X_1^2(X_1+X_o)$	
$y_2:=X_3^2X_o+X_2X_1^2+X_2X_1(X_2+X_o)$	
$u_4:=N:=X_3(X_3+X_2)(X_3+X_1)(X_3+X_2+X_1+X_o)$	$v_4:=\overline{X}_3(\overline{X}_3+\overline{X}_2)(\overline{X}_3+\overline{X}_1)(\overline{X}_3+\overline{X}_2+\overline{X}_1)$
$y_3:=X_3(X_3+X_1)X_1(X_1+X_o)+X_2(X_2+X_o)u_3$	
$y_4:=X_3\{X_3^2X_o^2+X_2X_1X_o(X_2+X_1+X_o)+X_1^2(X_1+X_o)^2+X_3X_1(X_2X_o+X_1^2+X_o^2)+X_o^4\}$ $+X_2X_1(X_2+X_1)(X_2X_1+X_o^2)+X_1^4(X_1+X_o)$.	

<u>Proof</u>. A direct calculation shows that each of the elements is invariant. QED

Let the homomorphism $S^{\cdot}(V_4)\to S^{\cdot}(V_3)$ be denoted by $\overline{}$. Its kernel is the principal ideal generated by the invariant X_o . It then follows that

$$X_oS^{\cdot}(V_4)\ \cap\ S^{\cdot}(V_4)^{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} = X_oS^{\cdot}(V_4)^{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}$$

<u>Proposition 2.2. The ring</u> $S^{\cdot}(V_3)^{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} = k[v_1,v_2,v_3,v_4]$ <u>with the one relation</u>

$$v_3^2 + (v_1v_2)v_3 + (v_1^2v_4+v_2^3) = 0$$

<u>Proof</u>. It is clear, almost by observation, that the elements v_1,v_2,v_4 form a system of parameters in $k[\overline{X}_1,\overline{X}_2,\overline{X}_3] = S^{\cdot}(V_3)$. Hence the algebra $k[v_1,v_2,v_4]$ has Krull dimension 3. In fact $k[\overline{X}_1,\overline{X}_2,\overline{X}_3]$ is integral over $k[v_1,v_2,v_4]$ with

$$\overline{X}_1 = v_1$$
$$\overline{X}_2^2 + v_1\overline{X}_2 + v_2 = 0$$

and $$\overline{X}_3^4 + (v_1^2+v_2)\overline{X}_3^2 + (v_1v_2)\overline{X}_3 + v_4 = 0 \quad ,$$

another proof that $k[v_1,v_2,v_4]$ has Krull dimension 3. Therefore $k[v_1,v_2,v_4]$ is isomorphic to a ring of polynomials in the three variables v_1,v_2,v_4.

The relation $v_3^2 + (v_1v_2)v_3 + (v_1^2v_4+v_2^3) = 0$ is irreducible since

$T^2 + (v_1v_2)T + (v_1^2v_4+v_2^3) = f(T)$ is irreducible by Eisenstein's criterion applied to the prime ideal (v_2,v_4). It is also easy to check that the ring

$$k[v_1,v_2,v_3,v_4] \cong k[v_1,v_2,v_4][T]/(f(T))$$

is normal. As

$$\mathrm{rk}_{k[v_1,v_2,v_4]} k[\overline{X}] = 8$$

and

$$\mathrm{rk}_{k[v_1,v_2,v_4]} k[v_1,v_2,v_3,v_4] = 2,$$

we see that

$$[k(\overline{X}_1,\overline{X}_2,\overline{X}_3) : k(v_1,v_2,v_3,v_4)] = 4 \quad .$$

Hence

$$k(v_1,v_2,v_3,v_4) = k(\overline{X}_1,\overline{X}_2,\overline{X}_3)^{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}$$

and as $k[v_1,v_2,v_3,v_4]$ is normal with $k[\overline{X}_1,\overline{X}_2,\overline{X}_3]$ integral over it it follows that $k[v_1,v_2,v_3,v_4] = k[\overline{X}_1,\overline{X}_2,\overline{X}_3]^{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}$ QED

We now write the images of $u_1,\ldots,y_4$, in $S^{\cdot}(V_3)$ in terms of these algebra generators.

$$\begin{aligned}
\overline{u}_1 &= 0 & \overline{y}_1 &= v_1^3 \\
\overline{u}_2 &= v_1^2 & \overline{y}_2 &= v_1v_2 \\
\overline{u}_3 &= v_2 & \overline{y}_3 &= v_1v_3 + v_2^2 \\
\overline{u}_4 &= v_4 & \overline{y}_4 &= v_1^2v_3 + v_1^5 \quad .
\end{aligned}$$

Thus the image of the algebra $k[u_1,u_2,u_3,u_4,y_1,y_2,y_3,y_4]$ in $S^{\cdot}(V_3)^{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}$ is generated by v_1^2, v_2, v_1^3, v_1v_2, $v_1v_3, v_1^2v_3$ and v_4. Let D denote this algebra. Also let

$$B := D[v_1] = k[v_1,v_2,v_4,v_1v_3] \quad .$$

Then

$$B[v_3] = k[v_1,v_2,v_3,v_4] \quad .$$

Since $\dim B = 3$, the ring B is also a complete intersection, but is not normal.

<u>Proposition 2.3. The ring of invariants</u>

$$S^{\cdot}(V_4)^{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} = k[u_1,u_2,u_3,u_4,y_1,y_2,y_3,y_4]$$

<u>and depth</u> $S^{\cdot}(V_4)^{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} = 3.$

<u>Proof</u>. The ring $k[v_1,v_2,v_3,v_4] = D + Dv_1 + Dv_3$. We want to show that each invariant f is in the ring generated by $u_1,\dots,y_4$. We can suppose f is homogeneous and that it is of least degree not in $k[u_1,\dots,y_4]$. Consider its image $\overline{f}$ in $k[v_1,v_2,v_3,v_4]$. The element X_1 in $S^\cdot(V_4)$ has image v_1 in $S^\cdot(V_3)$ while $X_3(X_3+X_1)X_1 + X_2^2(X_2+X_1)$ has image v_3 in $S^\cdot(V_3)$. Thus there are homogeneous elements d_o, d_1, d_3 in $k[u_1,\dots,y_4]$ and a homogeneous g in $S^\cdot(V_4)^{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}$ such that the invariant

$$f = d_o + d_1X_1 + d_2(X_3(X_3+X_1)X_1 + X_2^2(X_2+X_1)) + X_og \quad .$$

Since $\deg g < \deg f$, we can assume that $g \in k[u_1,\dots,y_4]$, so the term X_og can be omitted. Now apply the generator σ to f to get

$$0 = \sigma(f)-f = (d_1+d_2(X_3^2+X_3X_o+X_1^2+X_2X_o))X_o \quad .$$

Hence $\quad d_1 + d_2(\cancel{X_3^2}+\cancel{X_3}X_o+\cancel{X_1^2}+\cancel{X_2}X_o) = 0.\quad$ Apply σ to get

$$d_1 + d_2(\cancel{X_3^2}+X_2^2+\cancel{X_3}X_o+X_2X_o+\cancel{X_1^2}+X_o^2+\cancel{X_2}X_o+X_1X_o) = 0,$$

and then substract, to get

$$d_2(X_2^2+X_2X_o+X_1X_o+X_o^2) = 0$$

Hence $d_2 = 0$ and so $d_1 = 0$. Therefore

$$k[u_1,\dots,y_4] = S^\cdot(V_4)^{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} \quad .$$

We now have the following data :

a) depth $S^\cdot(V_4)^{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} = 1 +$ depth D.

b) $D \subset D[v_1] = B \subset S(V_3)^{Z/4Z} = B[v_3]$.

c) $\operatorname{depth}_B B = \operatorname{depth} B[v_3] = 3$.

d) $\operatorname{depth}_D B = \operatorname{depth}_B B = 3$.

Consider the long exact sequence of local cohomology at the irrelevant maximal ideal $\mathfrak{m}$ of D :

$$0 \to H^o_{\mathfrak{m}}(D) \to H^o_{\mathfrak{m}}(B) \to H^o_{\mathfrak{m}}(B/D) \to H^1_{\mathfrak{m}}(D) \to \dots \to H^3_{\mathfrak{m}}(B/D) \to 0.$$

Since $\operatorname{depth}_D B = 3$, we get that $H^i_{\mathfrak{m}}(B) = 0$ for $i \neq 3$. Hence

$$\operatorname{depth}_D D = \operatorname{depth}_D B/D + 1 \quad .$$

But $B = D + Dv_1$, hence $B/D = D/\mathfrak{C}$ where $\mathfrak{C}$ is the conductor of B in D ; $\mathfrak{C} = \{f : fB \subset D\} = \{f \in D : fv_1 \in D\}$

So we calculate $\mathfrak{C}$. Clearly the elements v_1^2, v_2, v_1^3, v_1v_2, v_1v_3 and $v_1^2v_3$ are in $\mathfrak{C}$. The ideal generated by these elements is contained in the ideal $v_1B + v_2B$ of B. As (v_1,v_2,v_4) is a regular sequence in B, no power of v_4 is contained in $v_1B + v_2B$ and hence no power of v_4 is contained in the ideal generated by these elements in D. Now we show that no power of v_4 is contained in $\mathfrak{C}$. For suppose $v_4^rv_1 \in \mathfrak{C}$. Now $\deg(v_4^rv_1) = 4r + 1$. A general monomial in D of the form

$$\bar{u}_2^{e_2}\ \bar{u}_3^{f_2}\ \bar{y}_1^{e_3}\ \bar{y}_2^{f_3}\ \bar{u}_4^{e_4}\ \bar{y}_3^{f_4}\ \bar{y}_4^{e_5}$$

has degree $2(e_2+f_2) + 3(e_3+f_3) + 4(e_4+f_4)+5e_5$. Therefore any expression homogeneous of degree $4r+1$ would have at least one of e_3,f_3,e_5 different from zero. But then v_1 would divide this expression in B and would imply that $v_4^r \in v_1B + v_2B$.

We now continue by showing that v_4 is regular on $D/\mathfrak{C}$. Suppose that there is a homogeneous ω in D such that $v_4\omega v_1 \in D$. Write

$$\omega = \text{terms in } (v_1^2,v_2v_1^3,v_1v_2,v_1v_3,v_1^2v_3)D + \text{constant } v_4^t$$

which we can do since $(v_1^2,\ldots,v_4)$ generated the irrelevant maximal ideal. Then

$$v_4\omega v_1 \in D$$

implies $(\text{constant})v_4^{t+1}v_1 \in D$, a contradiction.

Hence $\operatorname{depth}_D D/\mathfrak{C} = \operatorname{depth}_D B/D \geq 1$.
Therefore $\operatorname{depth}_D D \geq 2$. Since $D = S^{\cdot}(V_4)^{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}/(X_o)$ we get

$$\operatorname{depth} S^{\cdot}(V_4)^{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} \geq 3 \quad .$$

But $$H_t(S^{\cdot}(V_4)^{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}) = (1+2t^3+t^4)/(1-t)1-t^2)^2(1-t^4)$$

by Proposition V.1.9, and as mentioned, by [Stanley (to appear)], the ring $S^{\cdot}(V_4)^{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}$,which is factorial, cannot be Gorenstein, and hence not Cohen-Macaulay. So

$$\operatorname{depth} S^{\cdot}(V_4)^{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} \leq \dim S^{\cdot}(V_4) - 1 = 3$$

<u>Remark 2.4</u>. This method for calculating the depth of this ring clearly cannot be used by sane humans. The number of invariants of degree 5 in the Bertin example is 14. The 7 invariant generators of degree at most 4 give 14 monomials of degree 5. But there is one relation : $u_1y_3 + u_2y_2 + u_3y_1 = 0$. This relation can be used to show that $S^{\cdot}(V_4)^{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}$ is not Cohen-Macaulay - for (u_1,u_2,u_3,u_4) is clearly a system of parameters. While (u_1,u_2,u_4) is a maximal regular sequence. In any case, there must then be at least one "new" invariant of degree 5. This one was found by many hours of hand calculations.

Many more hours have been spent trying to find the ideal of relations. Computations can proceed as follows,

$$h_t(S^{\cdot}(V_4)^{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}) = 1 + t + 3t^2 + 5t^3 + 10t^4 + 14t^5 + 22t^6 + 30t^7 + \\ + 43t^8 + 55t^9 + 73t^{10} + \ldots.$$

$$((1-t)(1-t^2)^2(1-t^3)^2(1-t^4)^2(1-t^5))^{-1} = 1 + t + 3t^2 + 5t^3 + 10t^4 + \\ + 15t^5 + 26t^6 + 38t^7 + 60t^8 + 85t^9 + 125t^{10} + \ldots$$

So the (number of monomials in the generators) -

(number of invariants)

$$= \quad t^5 + 4t^6 + 8t^7 + 17t^8 + 30t^9 + 52t^{10} + \ldots$$

There is one relation of degree 5 which gets repeated in the higher degrees, so at least one takes these away by multiplying h_t by t^5 to get

excess of monomials over
invariants - relations $= 3t^6 + 5t^7 + 12t^8 + 20t^9 + 38t^{10} + \ldots$
generated by one of degree 5

Hence there are 3 relations of degree 6. There are

$$y_2^2+u_1u_3y_2+u_2u_3^2+u_1^2u_4 = 0$$

$$y_1y_2+u_1u_3y_2+u_1y_4+u_1u_2y_2+u_2^2u_3+u_1^4u_3+u_1u_2y_1+u_1^3y_1+u_1^2u_2^2 = 0$$

$$y_1^2+u_1u_2y_1+u_1^3y_2+u_1^2u_3^2+u_2^3 = 0$$

Take these away to get the series $2t^7 + 3t^8 + 5t^9 + 8t^{10} + \ldots$

There are two relations of degree 7. These <u>start</u> with

$$y_4u_3 + y_2y_3 + (\ldots.)u_1 = 0$$

$$y_1y_3 + u_2y_4 + (\ldots.)u_1 = 0$$

Then we get the series $t^8 - t^9 - 22t^{10} - \ldots$
so there is one more relation of degree 8, and that should be enough But we have completed the main part of the computations - sufficient to show that depth(Bertin) = 3, and we don't care to do any more.

Remark 2.5. By Corollary(2.7) of [Fossum, Foxby, Griffith and Reiten (1975)] (which is due really to Hartshorne and Ogus) we conclude that there is a prime ideal P in $S^{\cdot}(V_4)^{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}$ such that $ht(P) = 3$ and for localization,

$$\operatorname{depth}((S^{\cdot}(V_4)^{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}})_P) = 2$$

This holds since $S^{\cdot}(V_4)^{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}$ cannot be Gorenstein and Serre condition (S_3) + Factorial, would imply the hypotheses of Corollary (2.7) of [Fossum, Foxby, Griffith and Reiten (1975)] .

3. Problems.

In this section we list problems that appear naturally.

Problem 3.1. What are the decompositions of $\Lambda^r(V_n)$ and $S^r(V_{n+1})$ for the indecomposable ν_p-modules V_n, for $n>p$?

Problem 3.2. The representation rings $R\nu_{p^m}$ have λ-operations, and $R\nu_p$ is close enough to being a λ-ring so that the decompositions of $\Lambda^r(V_n)$ can be accomplished. What properties, short of being a λ-ring, but stronger than admitting λ-operations, does $R\nu_{p^m}$ enjoy? [This was suggested by Rentschler] .

Problem 3.3. What is the relation between decompositions of $\Lambda^r(V_n)$, $S^r(V_{n+1})$ and representations of the symmetric groups in characteristic p ?

Problem 3.4. Compute $\operatorname{depth}(S^{\cdot}(V_{n+1})^{\nu_{p^m}})$.

Problem 3.5. Are the completions $S^{\cdot}(V_{n+1})^{\nu_{p^m}}$ factorial ? It was this question that started us on our investigation of the decompositions. As seen in Chapter IV, the decomposition of $S^r(V_{p^m})$ allow the computation of the divisor class group $Cl(S^{\cdot}(V_{p^m})^{\nu_{p^m}}) = 0$. It was hoped that the decomposition would be of use for the other indecomposables. As yet this hasn't helped.

Problem 3.6. Is there a formal relation between decompositions of $S^r(V_{n+1})$ and semi-invariants of Schur [Schur, Satz 2.21] ?

Problem 3.7. Does the Hilbert series of a graded algebra give any information about its depth ? (Partial answer - probably not because a (Hilbert) series can be the Hilbert series for a Cohen-Macaulay ring and a non-Cohen-Macaulay ring).

Problem 3.8. What is the generalization to $R\nu_{p^m}$ of the Valby Bodega Theorem ?

Problem 3.9. Work out the Adam's operations for the representation ring. (We started, but they did not fit directly into the subject matter. The elements $\mu^r + \mu^{-r}$ are Adam's operations, for example).

Problem 3.10. What are the combinatorial properties of the triangles of numbers in III.4 ?

Problem 3.11. Show that the Hilbert series $H_t(S^{\cdot}(V_{n+1})^{\nu_{p^m}})$ is not symmetric provided n is odd and $n \geq p^{m-1}+2$.

Problem 3.12. (See V.5.11) Is $\psi_n(t^{-1}) = (-1)^n t^{n+1} \psi_n(t)$?

Problem 3.13. When is $S^{\cdot}(V_{n+1})^{\nu_{p^m}}$ Cohen-Macaulay ? In particular are $S^{\cdot}(V_{p^m-1+1})^{\nu_{p^m}}$ and $S^{\cdot}(V_{p^m+2})^{\nu_{p^m}}$ Cohen-Macaulay ?

Problem 3.14. Is there a factorial local ring A with A not Cohen-Macaulay, dim $A = 5$ and which satisfies Serre's S_3 condition ?

Problem 3.15. It is shown in Chapter III that $S^r(V_{n+1}) \cong \text{Free} \oplus V_s$ for $r+n = p-1$. Show that $S^r(V_{n+1}) \cong \text{Free} \oplus V_s$ for $r+n = p-2$.

4. Final remarks. (July 1977). After the handwritten version of this paper was completed we found that Sylvester and Franklin, a century ago, computed $\psi_n(t)$ for $n=1,2,..,10$ and 12 Sylvester (1973) . There it is the "counting function" of the covariants (or "differentiants") of a binary form of degree n (in characteristic zero). This (remarkable ?) coincidence will be the subject of a forthcoming paper.

Problem 3.12 has been solved by R.P. Stanley (private communication) but the result was used by Sylvester in his computations, so certainly known to him.

VII. Notation.

In this chapter is listed, in order of appearance, the notation used in the manuscript, with chapter and section references :

Standard notation :

$\mathbb{Z}$: Integers.

$\mathbb{N}$: Positive integers.

$\mathbb{N}_o$: Non-negative integers.

$\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$: Field of rational, real and complex numbers.

$\mathbb{P}(V)$: Projective variety of lines through 0 in the vector space V.

nV : Direct sum of n copies of V.

$V^{\otimes n}$: Tensor product of n copies of V.

V^n : $V^{\otimes n}$

$\mathbb{A}^n_k$: Affine n-space over k.

$\mathbb{P}^n_k$: Projective n-space over k.

$\Lambda^n(V)$: $n^{\underline{th}}$ exterior power of V.

$S^n(V) = \mathrm{Sym}^n(V)$: $n^{\underline{th}}$ Symmetric power of V.

T,U,V,X,Y : Indeterminates (sometimes multi-indexed).

Chapter 0.

$\nu_{p^m} = \mathbb{Z}/_{p^m}\mathbb{Z}$: The cyclic group of order p^m.

σ : Generator of ν_{p^m}.

Chapter I.

$Rk\nu_{p^m}$: Representation ring of ν_{p^m}.

Chapter II.

S_r : The symmetric group acting on r letters (II,1)

$I = (I_1,..,I_n)$: A partition of $|I|$. (II,1)

$|I| = I_1 + I_2 + .. + I_n$. (II,1)

$\|I\| = I_1 + 2I_2 + .. + nI_n$ (II.4)

A_r : Symmetric polynomials of degree r . (II.4)

a_r : $r^{\underline{th}}$ elementary symmetric polynomial (II.4)

h_r : $r^{\underline{th}}$ complete symmetric function. (II.5)

k_r : $r^{\underline{th}}$ monomial symmetric function. (II.5)

s_r : (II.6)

$\mathbb{Z}_f = \mathbb{Z}[f^{-1}]$: (II.7)

$W(V)$: (II.8)

sym_r: (II.9)

e_I : $I^{\underline{th}}$ Schur function. (II.11)

I' : Partition conjugate to I (II.11)

λ-ring : Section 3

λ-operations : Section 3

$G_{n,r}(X,Y)$: Homogeneous Gaussian Polynomial. (II.25)

<u>Chapter IV</u>.

$\mathbb{G}_m(B)$: Groups of units of B. (IV.7)

<u>Chapter V</u>.

$H.(A)$: The Hilbert function $H_n(A) = \dim_k A_n$ (V.1)

$H_t(A)$: The Hilbert series (V.1)

$\phi_n(t)$: The Hilbert series $\phi_n(t) = H_t(S^{\cdot}(V_{n+1})^{\nu_p})$ (V.8)

$\phi_n(t)$: $\sum_{r=o}^{\infty} a_{n,r} t^r$.

$\psi_r(t) := \sum_{n=o}^{\infty} a_{n,r} t^n$: The Hilbert series for "large p" (V.13)

$= \lim_{p\to\infty} \phi_r(t)$, $|t|<1$.

$g_{2r}(\varphi) = (1-t)^{-1} \prod_{\nu=o}^{r-1} (1+t^2-2t\cos(2r-2\nu)\varphi)^{-1}$ (V.29)

$g_{2r+1}(\varphi) = \prod_{\nu=o}^{r} (1+t^2-2t\cos(2r-2\nu+1)\varphi)^{-1}$ (V.29)

$\underline{\underline{\mu}}_p$: The group of $p^{\underline{th}}$ roots of unity (V.35)

VIII. References.

In addition to the citations in the text some of the other works from which we have taken ideas appear in this list of references. There are also listed some papers or books which we hope to study in the future. There are many further reference in each of the listed titles that are of use.

ALMKVIST, G : Endomorphisms of finitely generated projective modules over a commutative ring. Arkiv för matematik 11, 263-301 (1973).

ATIYAH,M.F. and I.G. MAC DONALD : "Introduction to Commutative Algebra". Reading, Massachusetts : Addison-Wesley 1969.

BASS,H : Algebraic K-theory. New York : Benjamin 1968.

BERTIN,M.J. : Anneaux d'invariants d'anneaux de polynômes, en caractéristique p. C.R. Acad. Sci. Paris ser. A.246.

BURNSIDE,W : "Theory of groups of Finite Order". sec. ed. Cambridge Univ. Press. New York .

CARTER,R.W. and G. LUSZTIG : On the modular representations of the general linear and symmetric group. Math. Zeit 136,193-242 (1974).

DE CONCINE,C. and C. PROCESI : A characteristic free approach to invariant theory. Adv. Math. 19, 306-381 (1976).

DIEUDONNE, J. and J.B. CARRELL : Invariant Theory, old and new. New York : Academic Press 1971.

DOUBILET,P and G-C ROTA : Skew-Symmetric Invariant Theory. Advances in Math. 21,196-201 (1976).

DOUBILET,P, G-C ROTA and J. STEIN : On the foundations of combinatorial theory.IX, Combinatorial Methods in invariant theory. Studies in Applied Math. 53.185-216 (1974).

EVANS,R.J. and I.M. ISAACS : Generalized Van der Monde Determinants and roots of unity of prime order. Proc.Amer. Math. Soc.58 (1976)

FOSSUM,R.M. : The Divisor Class Group of a Krull Domain. Ergeb der Math. Band 74 : Bertin. Heidelberg-New York : Springer Verlag 1973.

FOSSUM,R, HANS- BJØRN FOXBY, P.GRIFFITH and I.REITEN : Minimal Injective Resolutions with Applications to Dualizing Modules and Gorenstein Modules. Pub. Math. I.H.E.S. n°45, 193-215 (1975).

FOSSUM,R and P. GRIFFITH : Complete local factorial rings which are not Cohen-Macaulay in characteristic p. Annales scient. Ec. Norm. Sup. (4) 8,189-200 (1975).

FAA DE BRUNO : Théorie des formes binaires : Turin 1876.

GREEN,J.A. : The modular representation algebra of a finite group. Illinois J. Math. 6,607-619 (1962).

GROTHENDIECK, A. et J. DIEUDONNE. Elements de géométrie algébrique. I.H.E.S.[EGA].

GUREVICH,G.B.: Foundations of the theory of algebraic invariants. Translated by J.R.M. Radok and A.J.M. Spencer : Groningen : P. Noordhoff 1969.

HANNULA,T.A., T.G. RALLEY and I. REINER : Modular representation algebras. Bull. American Math. Soc. 73, 100-101 (1967).

HEGMAN,D.G.: Indecomposable representations at characteristic p. Duke Math. J. 21, 377-381 (1954).

HOCHSTER, M. and Joel L. ROBERTS : Rings of invariants of reductive groups acting on regular rings are Cohen-Macaulay. Advances in Math. 13, 115-175 (1974).

HILBERT, D.: Über die vollen Invariantsysteme. Ges. Abh. II^2. 287-344 : Springer 1970.

JAMES, Gorden : A characteristic free approach to the representation theory of S_n. J. of Algebra (to appear).

KLEIN, Felix : Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften. Grade. Leipzig : B.G. Teubner 18.

KNUTSON,D. : λ -rings and the Representation Theory of the Symmetric Group. L.N.M. No.308. Berlin-Heidelberg - New York : Springer Verlag 1973.

LASCOUX, Alain : Puissances extérieures déterminants et cycles de Schubert. Bull. Soc. Math. France 102, 161-179 (19).

LASCOUX, Thèse de l'U.E.R. de Mathématiques de l'Université de Paris VII, 1977.

LIPMAN,J.: Unique factorization in complete local rings. Proc. Symp. Pure Math. 29,531-546. (Algebraic Geometry, Arcata 1974. Providence : Amer. Math. Soc. 1975).

LITTLEWOOD : The theory of group characters. Oxford 1952.

MAC MAHON,P.A. : "Combinatory Analysis" Vol. 1,2. Cambridge Univ.Press 1915/1916.reprinted New York : Chelsea.

MITCHELL,O.H.: Note on determinants of powers. Amer. J. Math. 4, 341-344 (1881).

MOLIEN,T.: Uber die Invarianten der Linearen Substitutionsgruppen Setz.König.Preuss.Akad. Wiss, 1152-1156 (1897).

MORI,S.: On affine cones associated with Polarized varieties. Japan J. Math.1,301-309 (1975).

MUMFORD,D.: Geometric invariant theory. Erg. d. Math. Bd 34. Berlin-Heidelberg - New York : Springer 196 .

MURTHY,P.M.: A note on factorial rings. Arch.Math. 15, 418-420 1964).

NAGATA,M.: On the $14^{\underline{th}}$ problem of Hilbert. Am.J.Math. 81; 766-772 (1959).

NAGATA,M.: Invariants of a group in an affine ring. J. Math. Kyoto Univ.3, 369-377 (1969).

NAGATA, M. and T. MIYOTA : Note on semi-reductive groups. J. Math. Kyoto Univ.3, 379-382 (1964).

POPOVICIU.T. : Studie si cercetari stiitifice. Acad. R.P.R. Filiala Cluj 4,8 (1953).

RALLEY,T.: Decomposition of products of modular representation J. London Math. Soc. 44, 480-484 (1967).

RENAUD, J.C. : The Homomorphisms of a modular representation algebras.Manuscript. University of Papua, New Guinea.

RENAUD, J.C. : The decomposition of products in the modular representation ring of a cyclic group of prime power order.Manuscript.

RENAUD, J.C. : The decomposition of products in the modular ring of a cyclic p-group. M.Sc.Thesis. University of Papua, New Guinea 1976.

RIORDAN,John : Combinatorial Identities. New York : Wiley 1968.

ROBERTS, Paul : A minimal free complex associated to the minors of a matrix. Manuscript University of Utah (1977).

ROBINSON, G.de B : Representation theory of the symmetric group. Toronto : Univ. of Toronto press. 1961.

SAMUEL, P. : Lectures on Unique Factorization Domains. Tata Institute, Bombay, 1964.

SCHUR,I. : Vorlesungen über Invariantentheorie. Grundl. der Mat. Wiss. Bd 143 : Springer 1968.

SERRE, J-P. : Sur la topologie des variétés algébriques en caractéristique p. International symposium on algebraic topology. Univ. Nacional Autonoma de Mexico and UNESCO.

SERRE,J-P. : Cours d'arithmétique. Paris : Presses Universitaires de France. 1970.

SPRINGER,T.A. : Invariant theory. Lecture Notes in Mathematics. No. 585. Berlin-Heidelberg-New York : Springer 1977.

SRINIVASAN,B : The modular representation ring of a cyclic p-group. Proc. London Math. Soc. (3) 14, 677-688 (1964).

STANLEY,R. : Theory and application of plane partitions. Studies in Applied Math. 50. Part 1, 167-188;Part 2, 259-279 (1971).

STANLEY, R.(1974) : Combinatorial Reciprocity Theorems. Advances in Math.14, 194-253 (1974).

STANLEY, R.: Cohen-Macaulay Rings and constructible polytopes. Bull. Amer. Math. Soc. 81, 133-135 (19).

STANLEY,R : The upper bound conjecture and Cohen-Macaulay rings. Studies in Applied Math. 54, 135-142 (1975).

STANLEY, R.: Cohen-Macaulay Complexes Higher Combinatories, ed. Martin Arger. Proc. NATO Advanced Study Institute. Dordrecht-Boston; D. Reidel 1977.

STANLEY, R: Hilbert functions of graded algebras. Advances in Math.(to appear).

SYLVESTER, J.J.: Collected Mathematical Papers : Chelsea 1973.

1) Proof of the hitherto undemonstrated fundamental theorem on invariants.

2) Tables of the generating functions and ground forms of the binary quantics of the first ten orders.

TITCHMARSH,E.C. : Introduction to the theory of Fourier integrals. Oxford : Oxford University Press 1937.

TOWBER,J : Two new functors from modules to algebras. Manuscript DePaul (1976).

TOWBER,J : Young symmetry, the flag manifold and representations of GL(n). Manuscript DePaul University 1976.

WEYL, H.:"The Classical groups". Princeton University Press 1946.

Gert Almkvist
P.L.500
S-24300 HÖÖR
SWEDEN

Robert Fossum
University of Illinois
Department of Mathematics
URBANA, IL 61801
U.S.A.

THE USE OF REPRESENTATIONS IN THE INVARIANT THEORY OF NOT NECESSARILY REDUCTIVE GROUPS

by

Ulrich Oberst

I - Statement of the problems and theorems

The following theorems give positive solutions in connection with Hilbert's fourteenth problem and the existence of affine quotients of affine algebraic schemes by not necessarily reductive linear groups.

I make the following assumptions. Let k be a not necessarily algebraically closed field of arbitrary characteristic and $X = \mathrm{Spec}\,(B) = \mathrm{Sp}(B)$ an affine algebraic scheme over k. Here B is a commutative k-algebra of finite type. I identify $X = \mathrm{Sp}(B)$ with the representable functor

$$X = \mathrm{Sp}(B) = \mathrm{Al}_k(B,-) : \underline{\mathrm{Al}}_k \longrightarrow \underline{\mathrm{Ens}}.\ R \longmapsto X(R) = \mathrm{Al}_k(B,R)$$

where $\underline{\mathrm{Al}}_k$ denotes the category of commutative k-algebras. I write $x \in X$ for $x \in X(R)$, $R \in \underline{\mathrm{Al}}_k$. Let $G = \mathrm{Sp}(A)$ be an affine algebraic group scheme over k (shortly : a k-group) which operates on X form the right by an operation $x \times G \xrightarrow{\mathrm{Op}} X$. The operation is given by the following equivalent data.

(i) Operations

$$X(R) \times G(R) \xrightarrow{\mathrm{Op}} X(R) : (x,s) \longmapsto xs$$

of the abstract groups $G(R)$ on the sets $X(R)$, functorial in $R\in \underline{Al}_k$, or

(ii) Operations

$$G(R)\times(B\otimes R)\longrightarrow B\otimes R : (s,b)\longmapsto sb$$

of the abstract groups $G(R)$ on the R-algebras $B\otimes R := B\otimes_k R$ by R-algebra automorphisms, functorial in $R\in\underline{Al}_k$ - One says that G operates rationally on B from the left or that B is a G-algebra, or

(iii) a k-algebra homomorphism $\Delta : B\otimes_k A$ which makes B into a right A-comodule.

The connection between these data is given by $Op = Sp(\Delta)$ and

$$s(b\otimes 1) = (B\otimes s)\ \Delta(b)\ ,\ b\in B\ ,\ s\in G(R) = Al_k(A,R).$$

Let

$$C := {}^GB := \{b\in B\ ;\ s(b\otimes 1) = b\otimes 1\ ,\ s\in G(R)\ ,\ R\in\underline{Al}_k\} = \mathrm{Ker}(B \underset{\mathrm{inj}}{\overset{\Delta}{\rightrightarrows}} B\otimes A)$$

be the k-algebra of invariant elements and $Y := Sp(C)$ the corresponding affine scheme. The exact sequence

$$C\subset B \underset{\mathrm{inj}}{\overset{\Delta}{\rightrightarrows}} B\otimes A$$

of k-algebras gives rise to a commutative diagram

$$(1.1)\qquad X\times G \underset{\mathrm{proj}}{\overset{Op}{\rightrightarrows}} X \xrightarrow{p} Y$$

of affine k-schemes, exact in the category of affine k-schemes. The exactness means that Y is the quotient of X by G in this category. In this situation the following well-known problems arise :

(1.2) <u>Hilbert's fourtheenth problem</u> : When is the algebra C of invariants again of finite type over k , i.e. when is Y k-algebraic ? ∥

(1.3) <u>Existence of affine quotients</u> : When is the sequence (1.1) exact in the most often used categories of algebraic geometry, i.e. when is Y the quotient of X by G in these bigger categories too ? ∥

The best results concerning (1.2) are due to Nagata [Nag], see also [Fog], Th. 5.56 : The answer is negative in general, but positive for smooth k-groups which are linearly reductive or at least semi-reductive. (see below for the definitions of these terms). An important result in this context is Haboush's theorem (= Mumford's conjecture) that reductive groups are semi-reductive in all characteristics [Hab] . Concerning (1.3), Y is the quotient of X by G in the Category or all k-schemes if G is smooth and semi-reductive (Mumford [Mum], Th. 1.1, Seshadri [Ses], Th. 2).

My theorems give positive solutions for (1.2) and (1.3) with reductivity assumptions on the operation of G on B instead of assumptions on G alone. I need the following notions. A G-module V or a rational representation of G in V is a k-vector space V together with R-linear operations $G(R) \times (V \otimes R) \longrightarrow V \otimes R$: $(s,v) \longmapsto sv$ functorial in $R \in \underline{Al}_k$. A G-module structure on V is the same as a right A-comodule structure $\Delta : V \longrightarrow V \otimes A$ on V . As always ${}^{G}V$ denotes the submodule of invariant elements. The G-modules form the locally finite Grothendieck category G-Mod.

The group G is called linearly reductive if the following equivalent conditions are satisfied :

(i) all rational representations of G are completely reducible.

(ii) the trivial G-module k is projective in G-Mod.

(iii) the functor G-Mod $\longrightarrow$ k-Mod : $V \longmapsto {}^{G}V$ is exact, i.e. preserves surjections.

(iv) for every finite dimensional G-module V and every non-zero invariant element $x \in V$ there is a G-invariant (i.e. G-linear) k-linear function $f : V \longrightarrow k$ such that $f(x) = 1$.∎

The group is called semi-reductive if condition (iv) above can be satisfied with an arbitrary G-invariant homogeneus polynomial f of positive degree.

A (G,B)-module after Voigt [Vo] is a vector space V with a G- and a B-module structure such that $s(bv) = (sb)\ (sv)$ for $s \in G(R)$, $b \in B$, $v \in V \otimes R$, $R \in \underline{Al}_k$. Then G operates also on the k-algebra $B \oplus V$, $V^2 = 0$, obtained from ${}_{B}V$ by "idealization" and $B \subset B \oplus V$ is a G-algebra morphism, i.e. $Sp(B \oplus V)$ is an affine G-scheme over $X = Sp(B)$. This explains the origin of the notion of a (G,B)-module. These modules form a locally noetherian Grothendieck category (G,B)-Mod. In particular B itself is a (G,B)-module and induces the important functor

(1.4) $$ {}^G(-) = \mathrm{Hom}_{G,B}(B,-) : (G,B)-\underline{\mathrm{Mod}} \longrightarrow C-\underline{\mathrm{Mod}} : V \longmapsto {}^G V . $$

This functor is left exact and admits the left adjoint functor $B \otimes_C (-) : C\text{-}\underline{\mathrm{Mod}} \longrightarrow (G,B)-\underline{\mathrm{Mod}}$ where G operates on $B \otimes_C W$ diagonally.

(1.5) Theorem A - Situation as above. Assume that G operates freely on X, i.e. $xs = x$, $x \in X$, $s \in G$, implies $s=1$. The following assertions are equivalent :

(i) The functor (1.4) is exact, i.e. preserves surjections.

(ii) The functor (1.4) is an equivalence.

(iii) The morphism $p : X \longrightarrow Y$ is a principal bundle with group G, i.e.

(a) $C \subset B$ resp. $p : X \longrightarrow Y$ are faithfully flat, and

(b) The morphism

$$ X \times G \longrightarrow X \times_Y X : \quad (x,s) \longmapsto (x,xs) $$

is an isomorphism.

If the conditions (i) to (iii) are satisfied, C is of finite type over k, and Y is the quotient of X by G in the categories of locally k- ringed spaces and the category of all sheaves w.r.t. the faithfully flat topology. Moreover B is even a projective C-module .‖

An easier variant of theorem A is the :

(1.6) Remark. The statements of theorem A remain true without the freeness assumption if G is a unipotent group. The freeness of the operation is then a consequence.‖

If the functor (1.4) is exact, i.e. if the condition (i) of theorem A is satisfied, I say that G operates reductively on B .

(1.7) Theorem B. Situation as above. Assume that G operates reductively, but not necessarily freely on X. Then C is of finite type over k, and Y is the quotient of X by G in the category of all k-schemes. Moreover $p : X \longrightarrow Y$ is a surjective map and Y carries the final topology, induced from X via p. These proporties are universal, i.e. preserved under base extensions $Y' \longrightarrow Y$.‖

If the group G is linearly reductive, then in particular G operates reductively on B. Thus theorem B is a generalization of the corresponding result of Mumford [Mum], Th. 1.1, where linear reductivity is assumed.

If the operation of G on B is free, the exactness of the functor (1.4) is <u>equivalent</u> to the existence of a (very well behaved) quotient by theorem A. If the operation is not free, this is not the case. E.g. if G operates trivially on $X = \emptyset$, then G operates reductively if and only if, G is linearly reductive, but always $X = X/G$. However without loss of generality one may assume that the operation is faithful. For let

$$N := \mathrm{Ker}(G \xrightarrow{f} \underline{\mathrm{Aut}}(B/k))$$

be the kernel of the representation of G in B where $\underline{\mathrm{Aut}}(B/k)$ denotes the automorphism functor. Then N is a k-closed subgroup of G and f factorizes as

$$G \xrightarrow{can} G/N \xrightarrow{f_1} \underline{\mathrm{Aut}}(B/k)$$

where f_1 is injective, i.e. where G/N operates faithfully on B. Then ${}^{N}B = B$ and ${}^{G}E = {}^{G/N}B$. Hence if G/N operates reductively on B then ${}^{G}B$ is of finite type and $Y = Sp({}^{G}B)$ is the quotient of X by G in the category of k-schemes by theorem B.

The next theorem contains conditions, equivalent to the exactness of the functor (1.4) and easier to verify. For this purpose let $\underline{K}$ be a class of G-modules such that (s.t.) each finite dimensional (f.d.) G-module is up to isomorphism a G-submodule of a finite product of quotients of representations in $\underline{K}$. There are two standard examples :

(1.8) <u>Example</u> : $\underline{K} = \{A\}$. If V is an n-dimensional representation, $\Delta : V \longrightarrow V \otimes A \cong A^n$ is an embedding of G-modules.

(1.9) <u>Example</u> : Let W be a faithful, f.d. G-module. Without loss of generality (wlog) I assume that $G \subseteq \underline{G\ell}(W)$ is a closed subgroup of the general linear group of W. For $n \in \mathbb{N}$ and $r \in \mathbb{Z}$ let $W_{n,r} := W^{\otimes n}$ be the n-fold tensor product with the operation

$$s(w_1 \otimes \ldots \otimes w_n) = d(s)^r (sw_1 \otimes \ldots \otimes sw_n),\ s \in G,$$

where $d(s)$ denotes the determinant. The class of all $W_{n,r}$ has the required properties.//

(1.10) <u>Theorem</u> C : Situation as above. The following assertions are equivalent :

(i) G operates reductively on B , i.e. B is a projective (G,B)-module.

(ii) The functor

$$G\text{-}\underline{\mathrm{Mod}} \longrightarrow k\text{-}\underline{\mathrm{Mod}} : V \longmapsto {}^G(B \otimes V)$$

is exact. Here G operates diagonally on $B \otimes V$.

(iii) For every $V \in \underline{K}$ and every f.d. G-submodule U of V the map

$${}^G(B \otimes V) \longrightarrow {}^G(B \otimes V/U) : b \otimes v \longmapsto b \otimes \overline{v}$$

is surjective.

(iv) For every f.d. G-module V and every G-and B-linear epimorphism $f : B \otimes V \longrightarrow B$ there is an $x \in {}^G(B \otimes V)$ s.t. $f(x) = 1$.

(v) For every (G,B)- module V and every $x \in {}^GV$ s.t. V is free of finite type as B-module and s.t. Bx is free and a B-direct summand of V , there is a G- and B- linear map $f : V \longrightarrow B$ with $f(x) = 1$.∎

The preceding theorem incorporates in particular a "Baer"-criterion for "coflatness"

Generalizing the notion of a reductive operation, I say that G operates <u>semi-reductively</u> on B if in condition (v) of theorem C there is a G-invariant homogeneus polynomial f of positive degree xith $f(x) = 1$. The coefficients of this polynomial lie in B , the indeterminates are a dual basis of V as B-module and G operates both on the coefficients and the indeterminates. The corresponding theorems have still to be worked out.

(1.11) <u>Example</u> : If the "additive" group G_a, $G_a(R) = R^+$, with affine algebra $A = k[T]$ operates on B via $\Delta : B \longrightarrow B \otimes k[T] = B[T]$, then the following assertions are equivalent :

(i) G_a operates reductively on B .

(ii) $X \longrightarrow Y$ is a trivial G_a - bundle, i.e. $X \cong Y \times G_a$ as G_a-schemes over Y .

(iii) There is a $z \in B$ with $\Delta(z) = z + T$.

If $z \in B$ is an element with $\Delta(z) = z + T$, then

$$C \otimes k[T] = C[T] \cong B : T \longmapsto z$$

is a C-algebra isomorphism and G_a-linear and induces the isomorphism from (ii).

(1.12) Example : Let k be a field of characteristic $p>0$. Let $G := \alpha$ be the kernel of the Frobenius map $F : G_a \longrightarrow G_a : x \longmapsto x^p$, i.e.

$$\alpha(R) = \{x \in R ; x^p = 0\} \subseteq R^+ = G_a(R), \; R \in \underline{Al}_k .$$

Then $A = A(\alpha) = k[t]$ with $t^p = 0$. An operation of α on B is given by a k-derivation d of B with $d^p = 0$. The corresponding Δ is

$$\Delta : B \longrightarrow B \otimes k[t] = B[t] : b \longmapsto \sum_{i=0}^{p-1} (i!)^{-1} d^i(b) t^i , \; t^p=0 .$$

In this situation the following assertions are equivalent :

(i) α operates reductively on B.

(ii) There is a $z \in B$ with $d(z) = 1$.

If (i) and (ii) are satisfied, the element z^p is invariant and the map

$$C[Z]/\langle Z^p - z^p \rangle \longrightarrow B : \bar{Z} \longmapsto z$$

is a C-algebra isomorphism. In particular, B is a free C-module of dimension p.

If, on the other side, C is any k-algebra and $c \in C$, then the C-algebra $B = C[z]$ with the relation $z^p = c$ is a k-algebra on which the group α operates reductively via the C-derivation $d : z \longmapsto 1$, and $C = \operatorname{Ker} d = {}^{\alpha}B$. ||

(1.13) Corollary : If α operates nontrivially on B, i.e. $d \neq 0$, there is a non-zero $t \in C = {}^{\alpha}B$ such that α operates reductively on $B_t := \{bt^{-n} ; b \in B , n \geq 0\}$. ||

(1.14) Example : Let k be a field of characteristic $p>0$. Let $G = (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p)_k$ be the constant cyclic group with p elements. An operation of $(\mathbb{Z}/p\,\mathbb{Z})_k$ on B is given by a k-algebra automorphism s of B with $s^p = \mathrm{Id}$. Then the following assertion are equivalent :

(i) $(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p)_k$ operates reductively on B.

(ii) There is a $z \in B$ with $s(z) = 1+z$.

If (i) and (ii) are satisfied, the element $c := z^p - z$ is invariant and the map

$$C[Z]/\langle Z^p - Z - c \rangle \longrightarrow B : \bar{Z} \longmapsto z$$

is a C-algebra isomorphism. In particular, B is a free C-module of dimension p .

If, on the other side, C is any k-algebra and $c \in C$, then the C-algebra $B = C[z]$ with the relation $z^p - z = c$ is a k-algebra on which $(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p)_k$ operates reductively via the C-algebra automorphism s with $s(z) = 1+z$, and C is the ring of invariants.‖

(1.15) <u>Corollary</u> : If $(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p)_k$ operates non-trivially on B , i.e. $s \neq \mathrm{Id}$, there is a non-zero $t \in C$, $s(t) = t$, such that $(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p)_k$ operates reductively on B_t .‖

A consequence of parts of theorems A dans C is the following affinity criterion for homogeneous spaces. Assume in addition to the earlier requirements that $X = Sp(B)$ is itself a k-group and that $G = Sp(A)$ is a closed subgroup of X . In this case X and hence G operate on B from both sides. If V is a G-module, then $B \otimes V$ is a G-X-bimodule with the operations :

$$s(b \otimes v) = bs^{-1} \otimes sv \ , \ t(b \otimes v) = tb \otimes v \ , \ s \in G \ , \ t \in X \ .$$

Thus $I(V) := {}^G(B \otimes V)$ is also an X-module, called the X-module coinduced from V . One obtains adjoint functors

$$G\text{-}\underline{\mathrm{Mod}} \underset{\text{scalar restriction}}{\overset{I}{\rightleftarrows}} X\text{-}\underline{\mathrm{Mod}}$$

where I is the right adjoint. One has ${}^G(-) = {}^X(-) \circ I$.

(1.16) <u>Corollary</u> : The homogeneous space X/G is affine if and only if the functor "coinduced representation" is exact.

In particular, X/G is affine if G is linearly reductive. If X is linearly reductive, then G is too if and only if X/G is affine.‖

A special case of the second half of the preceding corollary is due to Bialynicki-Birula [BB]. This corollary can also be proven by applying Serre's criterion for affinity to X/G since the existence of X/G as algebraic k-scheme is known a priori.

II - Proofs

I only give outlines of the proofs. The details will appear in a forth-coming paper in the J. of Alg. The situation and notations are those from part I .

The following two lemmas are used for reduction purposes.

(2.1) Lemma : Let $k \subset \ell$ be a field extension. Then G operates reductively on B if and only if $\ell \otimes_k G$ operates reductively on $\ell \otimes_k B$.||

The preceding lemma is applied with ℓ an algebraic closure of k .

Let $N \trianglelefteq G$ be a normal k-subgroup of G . Then G/N operates on ${}^N B$.

(2.2) Lemma : The group G operates reductively on B if and only if N resp. G/N operate reductively on B resp. ${}^N B$.||

In characteristic zero every k-group is smooth, in positive characteristic every k-group is an extension of a smooth by a finite k-group [D-Gr] , Exp. XVII, Prop. 3.1, p. 625. Since both theorems A and B are known for finite k-groups (see e.g. [D-Ga], III. 2, 6.1) the preceding lemmas permit the reduction of the proofs to the essential case of a smooth k-group over an algebraically closed field.

(2.3) Proof of theorem A : (iii) $\Longrightarrow$ (ii) This is a special case of the theorem of faithfully flat descent (see e.g. [D-Ga], III.4 , 6.3). One has only to notice that a (G,B)-module V gives rise to the G-scheme $Sp(B \oplus V)$ over X . The details are due to Voigt [Vo].

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Since the functors

$$(G,B) - \underline{\mathrm{Mod}} \underset{B \otimes_C (-)}{\overset{G(-)}{\rightleftarrows}} C\text{-}\underline{\mathrm{Mod}}$$

are adjoint to each other and hence quasi-inverse equivalences under the assumption (ii), in particular $B \otimes_C (-)$ is faithfully exact, and hence $C \subset B$ is faithfully flat. The map $(inj, \Delta) : B \otimes_C B \longrightarrow B \otimes A$, induced from $X \times G \longrightarrow X \times X : (x,s) \longmapsto (x,xs)$, is bijective since

$${}^G(B \otimes_C B) \cong B \xrightarrow{{}^G(inj,\Delta) \cong id} {}^G(B \otimes A) \cong B$$

is bijective and ${}^G(-)$ is an equivalence. Here $B \otimes_C B$ and $B \otimes A$ are considered as (G,B)- modules in a suitable way.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) clear.

(i) $\Longrightarrow$ (ii), (iii) This is the difficult part of the proof. Since

$$^G(-) = \mathrm{Hom}_{G,B}(B,-) : (G,B) - \underline{\mathrm{Mod}} \longrightarrow C\text{-}\underline{\mathrm{Mod}},\ C = \mathrm{Hom}_{G,B}(B,B) ,$$

${}^G(-)$ is an equivalence if and only if B is a projective generator of finite type in (G,B) - $\underline{\mathrm{Mod}}$. But B is obviously of finite type and by (i) projective. Hence one need only show that for every non-zero (G,B)-module V the C-module ${}^GV = \mathrm{Hom}_{G,B}(B,V)$ is non-zero too. After the reductions mentioned above I may assume that G is smooth and k is algebraically closed. By indirect proof and noetherian induction I may further assume that the statements (ii) and (iii) are valid for all pairs $(G,B/\underline{b})$ where $\underline{b}$ runs over the non-zero G-invariant ideals of B, but not for (G,B) itseld. However since G operates free on B there is an open dense G-invariant subset U' of X and a morphism $p' : U' \longrightarrow V'$ of algebraic, but not necessarily affine k-schemes such that $p' : U' \longrightarrow V'$ is a principal G-bundle [D-Gro], Exp. V, Th. 8.1. Since X is non-empty, so are U' and V'. Let then V be a non-empty, open, affine subset of V' and $U := p'^{-1}(V)$. Then $U \xrightarrow{p'} V$ is a principal G-bundle of affine k-schemes. By construction resp. assumption on X one has $\emptyset \neq U \neq X$. Then the ideal $\underline{b}$ with $\mathrm{Sp}(B/\underline{b}) = (X-U)_{red}$ is G-invariant and non-zero since $U \neq \emptyset$.

Let then V be a non-zero (G,B)-module, of finite type over B (w.l.o.g.) ${}^GV \neq 0$. If $\underline{b}V \neq V$, then by induction hypothesis ${}^G(V/\underline{b}V) \neq 0$ since $V/\underline{b}V$ is a non-zero $(G, B/\underline{b})$-module. This implies ${}^GV \neq 0$ since ${}^G(-)$ is exact on (G,B)-$\underline{\mathrm{Mod}}$. If, on the contrary, $V = \underline{b}V$, then

$$\emptyset = \mathrm{Supp}(V/\underline{b}V) = \mathrm{Supp}(V) \cap \mathcal{V}(b) = \mathcal{V}((0:V)) \cap (X-U) \quad (\mathcal{V} = \text{zero set})$$

Since $U \neq X$ this implies $\mathcal{V}((0:V)) \subsetneq X$ and thus $(0:V) \neq 0$. But then again by induction hypothesis ${}^GV = {}^G(V/(0:V)V) \neq 0$ since $(0:V)$ is a non-zero G-invariant ideal and V is a non-zero $(G,B/(0:V))$ - module.

The finite generation of $C = {}^GB$ over k will be dealt with in the proof of theorem B .∎

(2.4) <u>Proof of theorem</u> B : I shall only indicate the proof for the finite generation of C. The proof of the fact that Y is the quotient of X by G in the category of k-schemes and of the other properties is inspired by that of the corresponding result for linearly reductive groups and proceeds along the same lines (see [Mum], Th. 1.1).

Assume first that G operates freely on B so that the equivalent conditions of theorem A are satisfied. The k-algebra A is of finite presentation, the same holds for the B-algebra $B \otimes_C B \cong B \otimes A$. Since $C \subset B$ is faithfully flat this implies that B is a C-Algebra of finite presentation too [D-Ga], I.3, 1.4. Thus B is faithfully flat and of finite presentation over C , and of finite type over k by assumption. These data imply the finite generation of C over k by [D-Gro], Exp. V, Prop. 9.1. In particular, by remark (1.6), C is of finite type over k if G is unipotent.

For arbitrary G and not necessarily free operation let $N \trianglelefteq G$ be a normal k-subgroup. Then

$$G_B = {}^{G/N}({}^{N}B) \ . \tag{2.5}$$

Moreover N (resp. G/N) operate reductively on B (resp. ${}^{N}B$). Hence the finite generation over k of the invariant ring for the pair (G,B) follows from that for the pairs (N,B) and (G/N,${}^{N}B$). This argument is used three times with N or G/N finite or unipotent where the finite generation holds by [D-Ga], III.2 , 6.1, (resp. the above argument). For there is a finite normal subgroup N such that G/N is smooth. If G is smooth then the 1-component G^{o} of G is smooth and connected and G/G^{o} is finite. If G is smooth and connected and $R_u(G)$ denotes the unipotent radical of G then $G/R_u(G)$ is reductive. Thus one reduces the problem to the case where G is reductive. Modulo Haboush's theorem [Hab], finite generation of the invariant ring in this case is due to Nagate (see e.g. [Fog], Th. 5.56).∎

III - <u>Non-affine quotients of non-affine algebraic schemes</u>

This part is new and was not mentioned during my talk in Paris. I indicate how the theorems of the first section can be generalized to the non-affine case. The results are inspired by the corresponding theorems for linearly reductive groups, due to Mumford [Mum], Ch.I, §4.

The following assumptions remain in force throughout this section. As in section I, k denotes a field of arbitrary characteristic, $\bar{k}$ an algebraic closure of k and G a k-group with affine algebra $A = A(G)$. Let X be an algebraic k-scheme which is neither necessarily affine nor separated. The sheaf of k-algebras on X is as usual denoted by O_X. Let $\mu : X \times G \longrightarrow X$ be an operation of G on X from the right. If X is affine and if G operates reductively on $A(X)$ (compare section I) then I shall also speak of a <u>reductive operation of</u> G <u>on</u> X. Theorem A (1.5) of I can then be generalized to the following result.

(3.1) <u>Theorem</u> : Situation as above. If the operation of G on X is free, the following assertions are equivalent :

(i) There is a principal bundle $p : X \longrightarrow Y$ with group G, i.e. a k-scheme Y and a faithfully flat morphism p such that $\mu : X \times G \longrightarrow X$ and $pr : X \times G \longrightarrow X$ induce an isomorphism

$$(\mu, pr) : X \times G \xrightarrow{\cong} X \times_Y X .$$

(ii) There is a covering $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ of X by affine, open, G-invariant subschemes U_i on which G operates reductively.

If (i) and (ii) are satisfied, then Y is algebraic, p is affine and

$$X \times G \underset{\mu}{\overset{pr}{\rightrightarrows}} X \xrightarrow{p} Y$$

is exact in the category of all locally ringed spaces. In particular $p : X \longrightarrow Y$ is a universal geometric quotient of X by G in the sense of Mumford [Mum], Def. 0.7 .||

Condition (ii) of the preceding theorem keeps its meaning if the operation is not necessarily free, and gives rise to the next result.

(3.2) <u>Theorem</u> : Situation as above. Let $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ be a covering of X by open, affine, G-invariant subschemes U_i such that G operates reductively on the U_i, $i \in I$. Let $p_i : U_i \longrightarrow V_i := U_i/G$ be the quotient of U_i by G in the sense of theorem B (1.7).

(i) Assume that in addition the following condition is satisfied :

(3.3) For all $i,j \in I$ the subset $p_i(U_i \cap U_j)$ is open in U_i/G and $U_i \cap U_j = p_i^{-1}\, p_i(U_i \cap U_j)$.

Then a universal categorical quotient $p : X \longrightarrow Y$ of X by G exists (compare [Mum], Def. 0.7). Moreover Y is algebraic and p is affine and universally submersive. The sets $p(U_i)$ are open in Y and $U_i = p^{-1}\, p(U_i)$.

(ii) The condition (3.3) of (i) is satisfied if for all $i \in I$ the morphism $p_i : U_i \longrightarrow V_i = U_i/G$ is even a geometric quotient, i.e. if $U_i \times G \xrightarrow{(\mu,pr)} U_i \underset{V_i}{\times} U_i$ is surjective or, equivalently, if p_i induces a bijection $U_i(\bar{k})/G(\bar{k}) \cong V_i(\bar{k})$. Then the morphism p from (i) is also a universal geometric quotient.∎

For the next result I need the notion of G-linearized O_X-module. [Mum], Ch. I, §3 . Consider the groupoid of k-schemes

$$X \times G \times G \;\begin{array}{c}\xrightarrow{pr_{1,2}}\\ \xrightarrow{X \times \mu}\\ \xrightarrow{\mu \times G}\end{array}\; X \times G \;\underset{\mu}{\overset{pr}{\rightrightarrows}}\; X .$$

Let $\underline{V}$ be a quasi-coherent O_X-module. A G-linearization of $\underline{V}$ is an isomorphism

$$F : \mu^*(\underline{V}) \xrightarrow{\;\cong\;} pr^*(\underline{V})$$

of $O_{X\times G}$-modules which satisfies the cocycle condition

$$(X \times \mu)^*\,(F) = (pr_{1,2})^*(F)\;(\mu \times G)^*\,(F) \quad .$$

If $X = Sp(B)$ is affine the equivalence $V \longmapsto \tilde{V}$ between B-modules and quasi-coherent O_X-modules induces an equivalence between (G,B)-modules and G-linearized quasicoherent O_X-modules. This is due to the fact that a (G,B)-module structure on the B-module V is given by a comultiplication $\Delta : V \longrightarrow V \otimes_k A$ which is semilinear w.r.t. the diagonal $\Delta : B \longrightarrow B \otimes A$, i.e. by a $B \otimes A$ -linear map

$$V \underset{B,\Delta}{\otimes} (B \otimes A) \longrightarrow V \otimes A = V \underset{B,inj}{\otimes} (B \otimes A) ,$$

i.e. by an $O_{X \times G}$-linear map

$$F : \widetilde{V \underset{B,\Delta}{\otimes} (B \otimes A)} = \mu^*\,(\tilde{V}) \longrightarrow \widetilde{V \underset{B,inj}{\otimes} (B \otimes A)} = pr^*\,(\tilde{V}) \quad .$$

In particular, in the affine case a G-linearized invertible O_X-module is just a (G,B)-module which is projective of rank one as B-module.

In the non-affine case the operation $\mu : X \times G \longrightarrow X$ induces a comultiplication

$$A(\mu) : A(X) \longrightarrow A(X \times G) = A(X) \otimes A$$

which is a G-algebra structure on $A(X)$. Here $A(X) := O_X(X)$ denotes the k-algebra of global sections of O_X. Similarly, if $\underline{V}$ is a G-linearized quasi-coherent O_X-module then $F : \mu^*(\underline{V}) \longrightarrow pr^*(\underline{V})$ induces a $(G,A(X))$-module structure on $V = \underline{V}(X)$ via

$$V = \underline{V}(X) \xrightarrow{\text{can}} \mu^*(\underline{V}) \quad (X \times G) \xrightarrow{F} pr^*(\underline{V}) \quad (X \times G) = \underline{V}(X) \otimes A = V \otimes A$$

(see [Mum], p. 32).

If moreover $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ is a covering as in theorem (3.2) then the modules $\underline{V}(U_i)$ are $(G,A(U_i))$-modules and the restriction maps $\underline{V}(X) \longrightarrow V(U_i)$ are G-linear, i.e. A-colinear. Since X is algebraic I assume I finite w.l.o.g. Then

$$\underline{V}(X) \subset \prod_i \underline{V}(U_i) : v \mapsto (v|U_i)_{i \in I} \qquad (v = (v\,|\,U_i)_{i \in I}$$

when identified) is a G-submodule and

$$^G\underline{V}(X) = \underline{V}(X) \cap (\prod_i {}^G\underline{V}(U_i)).$$

If $\underline{L}$ is an invertible O_X-module and $\ell \in \underline{L}(X)$ let

$$X(\ell) := \{x \in X \,;\, \ell(x) \neq 0\}.$$

Here $\ell(x) = \overline{\ell}_x \in L_x/\underline{m}_x L_x$.

(3.4) Theorem - Situation as above. Let $\underline{L}$ be a G-linearized invertible O_X-module, and let

$\mathcal{L} := \{\ell \in {}^G\underline{L}(X) \,;\, X(\ell)$ is affine (and of course G-invariant) and G operates reductively on $X(\ell)\}$.

Assume that X is covered by the $X(\ell)$, $\ell \in \mathcal{L}$. (In particular then $\underline{L}$ is ample and X is quasiprojective).

(i) The covering $X = \cup\{X(\ell) \,;\, \ell \in L\}$ satisfies the conditions, in particular (3.3), of theorem (3.2), hence a universal categorical quotient $p : X \longrightarrow Y$ exists, p is affine and universally submersive and Y is algebraic.

Moreover $p(X(\ell)) = X(\ell)/G = \mathrm{Sp}({}^G A(X(\ell)))$ is an open, affine subscheme of Y and $X(\ell) = p^{-1}\, p(X(\ell))$.

(ii) There is a unique invertible 0_Y-submodule $\underline{M}$ of $p_*(\underline{L})$ with

$$\underline{M}(p(X(\ell))) = {}^G A(X(\ell))\ (\ell | X(\ell)) = {}^G [A(X(\ell))\ (\ell | X(\ell))] =$$

$$= {}^G \underline{L}(X(\ell)) \subset \underline{L}(X(\ell)) = p_*(\underline{L})\ (p(X(\ell))).$$

One has $\underline{M}(Y) = {}^G \underline{L}(X)$, and $\underline{M} \subset p_*(\underline{L})$ induces an isomorphism $p^*(\underline{M}) \cong \underline{L}$ of G-linearized 0_X-modules.

(iii) For $\ell \in \mathcal{L} \subseteq {}^G \underline{L}(X) = \underline{M}(Y)$ one has $Y(\ell) = p(X(\ell))$ which is affine. Thus $\underline{M}$ is ample and Y is quasiprojective.∎

(3.5) Main application : Let $\underline{L}$ be a G-linearized invertible 0_X-module and

$$\mathcal{L} := \bigcup_{n \geq 1} \{\ell \in {}^G \underline{L}^{\otimes n}(X)\ ;\ X(\ell) \text{ is affine and } G \text{ operates reductively on } X(\ell)\}.$$

Let

$$X^{ss}(\underline{L}) := \cup \{X(\ell)\ ;\ \ell \in L\}$$

be the set of "semi-stable points of X w.r.t. L" . This is an open subscheme of of X . Since X is algebraic, $X^{ss}(\underline{L})$ is covered by finitely many $X(\ell_i)$, $\ell_i \in L$, $i = 1,\dots,r$. Since $X(\ell_i) = X(\ell_i^m)$ for all $m \geq 1$.

I assume w.l.o.g. that $\ell_i \in {}^G \underline{L}^{\otimes N}(X)$ for the same $N \geq 1$, $i = 1,\dots,r$. Then $\underline{L}^{\otimes N} | X^{ss}(\underline{L})$ is a G-linearized invertible module on $X^{ss}(\underline{L})$ which satisfies the hypothesis of the preceding theorem. Hence the universal categorical quotient

$$p : X^{ss}(\underline{L}) \longrightarrow X^{ss}(\underline{L})/G$$

exists, p is affine and universally submersive and $X^{ss}(\underline{L})/G$ is quasi-projective.∎

(3.6) Corollary : If the equivalent assertions of theorem (3.1) hold true, the following assertions are equivalent :

(i) $Y = X/G$ is quasi-projective.

(ii) There is a G-linearized invertible 0_X-module $\underline{L}$ such that $X = X^{ss}(\underline{L})$.

(iii) There is a G-linearized invertible O_X-module $\underline{L}$ such that $X = \bigcup\{X(\ell) ; \ell \in \mathcal{L}\}$ where

$$\mathcal{L} := \{\ell \in {}^G\underline{L}(X) ; X(\ell) \text{ is affine and } G \text{ operates reductively on } X(\ell)\} .$$

These equivalent conditions are satisfied if G is a k-subgroup of a k-group X and X/G denotes the homogeneous space.||

Literature

[BB] Bialynicki-Birula - On homogeneous affine spaces of linear algebraic groups, Amer. J. Math. 85 (1963), 577-582

[D- Ga] M. Demazure and P. Gabriel - "Groupes algébriques", Masson, Paris, North-Holland, Amsterdam, 1970

[D-Gro] M. Demazure and A-Grothendieck - "Schémas en groupes I and II", Lecture Notes in Mathematics N° 151, 152, Springer Verlag 1970

[Fog] I. Fogarty - "Invariant theory" - Mathematics Lecture Notes, W.A. Benjamin, Inc. 1969

[Hab] W.I. Haboush - Reductive groups are semi-reductive, Ann. Math. 102 (1975) 67-84

[Mum] D. Mumford - "Geometric invariant theory", Erg. d. Math. 34, Springer 1965

[Nag] M. Nagata - "Lectures on the fourtheenth problem of Hilbert", Tata Institute Bombay 1965

[Ses] C.S. Seshadri - Mumford's conjecture for $G\ell(2)$ and applications, in "Algebraic Geometry", Oxford University Press 1969

[Vo] D. Voigt - Endliche algebraische Gruppen, Habilitationsschrift, Bonn 1975.

Manuscrit reçu le 10 Janvier 1977

M. Ulrich OBERST
Institut für Mathematik
Universität Innsbruck

Innrain 52
A - 6020 Insbruck

LES BASES DE HODGE DANS LA THEORIE DES INVARIANTS

by

Claudio PROCESI

§1 - The Grassman variety

The theory of combinatorial bases in invariant theory has its origins buried in the invariant theory of last century.

The main starting point is the study of the Grassman variety and more precisely the quadratic equations satisfied by its coordinates, in the canonical projective embedding.

Let therefore V be a vector space of dimension n over a field K (but in fact, as it will be clear, we can work always over the integers) and $\overset{k}{\Lambda} V$ the k-th exterior power. We select a basis $e_1, \dots, e_n$ of V and thus the basis $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$ $(i_1 < i_2 < \dots < i_k)$ of $\overset{k}{\Lambda} V$.

The Grassman variety embedded in $\mathbb{P}(\overset{k}{\Lambda} V)$ (the associated projective space) is obtained as the points in $\mathbb{P}(\overset{k}{\Lambda} V)$ corresponding to non zero products $v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k$.

It will be convenient in the sequel to display the vectors $v_1, \dots, v_k$ in a matrix X

$$\begin{array}{ccccc} v_1 = & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ v_2 = & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & & & & \\ v_k = & x_{k1} & x_{k2} & \dots & x_{kn} \end{array}$$

Given $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$, we will denote by $(i_1 \; i_2 \; \dots \; i_k)$ the minor of X formed by the corresponding columns ; $(i_1 \; i_2 \; \dots \; i_k)$ (a Plücker coordinate) is thus the restriction to the Grassman variety of the corresponding coordinate in $\mathbb{P}(\overset{k}{\Lambda} V)$.

The study of the equations satisfied by these coordinates is our next goal. Various kinds of quadratic relations were found by Sylvester, D'Ovidio etc... . We will give the ones which lead more rapidly to our conclusions.

Consider two Plücker coordinates $(i_1 \; i_2 \; \dots \; i_k)$ $(j_1 \dots j_k)$; given an index s , $1 \leq s \leq k$, we fix our attention on the $k+1$ indices $i_s \; i_{s+1} \dots i_k \; j_1 \; j_2 \; \dots \; j_s$. Next we take the function in the variables X_{ij} . given by the product $(i_1 \dots i_k)(j_1 \dots j_k)$ of the two minors. We want to think of this function as depending on the column vectors of the matrix X , which we will call $\xi_1 , \xi_2 , \dots , \xi_n$, (thus $\xi_i = (X_{1i} , X_{2i} , \dots , X_{ki})$). With this notation it is usual to write :

$$(i_1 \; i_2 \dots i_k) = [\xi_{i_1} , \xi_{i_2} , \dots , \xi_{i_k}]$$

Finally we alternate this function with respect to the chosen indices $i_s \; i_{s+1} \dots i_k \; j_1 \, j_2 \dots j_s$.

The conclusion of this process is the zero function, since we alternate $k+1$ vector variables of dimension k .

To display the alternation process we first procede formally, in characteristic 0 , summing with sign over all $(k+1)!$ permutations of the chosen indices. Since the two coordinates $(i_1 \dots i_k)$, $(j_1 \dots j_k)$ are already alternating in their variables the effect of a permutation on the indices depends only on the right coset with respect to the subgroup $\mathcal{S}_{k-s+1} \times \mathcal{S}_s$, permuting separately the indices $i_s \; i_{s+1} \dots i_k$ and $j_1 \dots j_s$ ($\mathcal{S}_t$ will always denote the symmetric group on t letters).

Thus rather than dividing by $(k-s+1)! \; s!$ the formal alternation, we may sum over cosets representatives. Such representatives are obtained by :

i) selecting any t indices out of $i_s \; i_{s+1} \dots i_k$ and other t indices out of $j_1 \dots j_s$

ii) exchanging them in order.

If we apply this process, which is characteristic free, we obtain a quadratic relation with coefficients ± 1 satisfied by the Plüker coordinates on the Grassman variety.

It would be easy to prove that the variety defined by these quadratic relation is in fact the set of points which we had called, without sufficient justification, the Grassman variety. Rather that doing this we procede with some consequences proved by Hodge [3]. Consider, purely formally, the ring R generated by variables $(i_1 \ldots i_k)$, subject to :

i) the given quadratic equations

and ii) skew symmetry in the indices.

Given a monomial :

$$M = (i_1 \ldots i_k)\ (j_1 \ldots j_k)\ (s_1 \ldots s_k)\ \ldots\ (u_1 \ldots u_k)$$

we display it in two different ways :

as a row $\overline{M} = [i_1 \ldots i_k \;\; j_1 \ldots j_k \ldots u_1 \ldots u_k]$

and as a rectangular table :

$$M = \left|\begin{array}{cccc} i_1 & i_2 & \ldots & i_k \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_k \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_k \end{array}\right|$$

We order lexicographically the rows and hence the monomials and finally we define :

<u>Definition</u> 1.1 - A table is <u>standard</u> if the indices appear strictly increasing in each row and non decreasing in each column. A monomial M is <u>standard</u> if the corresponding table is such.

Our objective is to prove the following :

<u>Theorem</u> 1.2 (Hodge)

i) <u>The standard monomials are a basis of</u> R

ii) R <u>is the coordinate ring of the Grassman variety</u>.

<u>Proof</u> - Clearly the theorem will be proved if we show :

a) the standard monomials span linearly R ,

b) the standard monomials are linearly independant as functions of $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

a) We work by descending induction on the lexicographic order of monomials, proving that any monomial M can be written as a linear combination of standard monomials M' with $M' \leq M$. First of all notice that, using the skew symmetry to write each row in increasing order, certainly lowers any monomial in the lexicographical order. Next assume that in a table, corresponding to M , there appear two indices in a column in wrong order (a violation to standardness) :

$$\begin{vmatrix} i_1 & \cdots & i_s & \cdots & i_k \\ j_1 & \cdots & j_s & \cdots & j_k \end{vmatrix} \qquad i_s > j_s \qquad .$$

We then apply the quadratic equation relative to this pair of Plücker coordinates and to the $k+1$ indices $i_s \dots i_k \; j_1 \dots j_s$. The net result of this equation is to replace the product $\begin{vmatrix} i_1 & \dots & i_k \\ j_1 & \dots & j_k \end{vmatrix}$ by a sum of similar products which are necessarily lower in the lexicographical ordering. In fact : $j_1 < j_2 < \dots < j_s < i_s \;\; \dots < i_k$. Thus in each actual exchange some indices in the top row have been replaced by lower indices. At the level of the complete monomial we have thus replaced M by a linear combination of lower monomials. Clearly the process has eventually to stop and this happens exactly when all monomials involved are standard,

a) is thus completely proved

b) suppose that a linear combination $f(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sum a_i M_i$ of standard monomials is 0 as a function of $\xi_1, \dots, \xi_n$. We work by induction on n . If $n=k$ the only coordinate is the determinant $d = [\xi_1, \dots, \xi_k]$ and the statement is clear. In general it is clear that we may assume that the relation is homogeneous in each variable $\xi_1, \dots, \xi_n$ and, by induction, that all variables appear. Consider a parameter λ and compute $0 = f(\xi_1 + \lambda \xi_2, \xi_2, \dots, \xi_n)$. We expand each standard monomial M_i with respect to λ and collect the various coefficients of the powers of λ . Since the result is identically zero every coefficient will vanish ; we give our attention to the highest λ which one can possibly obtain. A Plücker coordinate is linear in each index ; therefore :

$$(\xi_1 + \lambda \xi_2 \;\; \xi_{i_2} \dots \xi_{i_k}) = (\xi_1 \;\; \xi_{i_2} \dots \xi_{i_k}) + \lambda (\xi_2 \;\; \xi_{i_2} \dots \xi_{i_k})$$

and if $i_2 \neq 2$ this gives a contribution in λ formally non zero. Thus the highest power of λ is achieved as follows. For a given standard monomial M , let $h_1(M)$ be the number of 1's appearing which is not followed by 2 ; let j be the largest amony all the $h_1(M)$ appearing. For these monomials substitute 1 with 2 in the corresponding j boxes. The result is again a standard monomial and distinct standard monomials remain distinct. By the remarks made the resulting linear combination is identically zero. Since we are working by induction we would have lowered the degree in 1 unless $j = 0$ i.e. each 1 is followed by 2 . Next we substitute $\xi_1 \longrightarrow \xi_1 + \lambda \xi_3$ etc... The net result is that we can always lower the degree in ξ_1 unless we are in the trivial case $k = n$ already treated.

§2 - Double Tableaux

The next important formal step is due to Doubilet, Rota, Stein [2] and it is given by the theory of double standard tableaux.

We consider a special case of the previous construction i.e. $n = 2k$. In the resulting Grassmanian we consider the affine part defined by setting equal to 1 the last coordinate $(k+1 \; k+2 \; \dots \; 2k)$. It is clear that this affine variety W has, as affine coordinate ring, the ring with basis the standard monomials in the remaining coordinates. Furthermore W is canonically isomorphic to affine k^2 dimensional space by the map that (for notational reasons) we construct as follows. We think of affine k^2 dimensional space as having coordinates X_{ij} ; $i,j = 1,\dots,k$, the entires of a $k \times k$ matrix X and map a point $X = (X_{ij})$ to the point in W given by the Plücker coordinates of the following $k \times 2k$ matrix :

$$\left|\begin{matrix} X_{k1} & X_{k2} & \dots & X_{kk} & 1 & 0 & & 0 \\ X_{k-1\,1} & X_{k-1\,2} & \dots & X_{k-1\,k} & 0 & 1 & & \\ \vdots & & X_{ij} & & 0 & & 1 & 0 \\ X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1k} & 0 & & \dots & 1 \end{matrix}\right|$$

The fact that this gives an isomorphism between W and the affine space is easily verified by constructing the inverse, noticing that

$$X_{ij} = (-1)^{k-i} \frac{(j \; k+1 \; \dots \; 2k-i+1 \;\; 2k-i+2 \; \dots \; 2k)}{(k+1 \;\; k+2 \; \dots \dots \; 2k)}$$

Therefore the theory of standard monomials developed for the Grassman variety reflects into a theory of standard monomials for the ring $K[X_{ij}]$.

We thus interpret in this case the quadratic equations and the standard monomials.

First of all let $a = (i_1 \dots i_t \;\; i_{t+1} \dots i_k)$ be a Plücker coordinate with $i_t \leq k < i_{t+1}$.

We see immediately that a is a minor of the $k \times k$ matrix ; in fact it is the $t \times t$ minor having as columns $i_1 \;\; i_2 \dots i_t$ and rows $s_1 \; s_2 \dots s_t$ where these indices are obtained as follows :

Write down the table of indices :

$$\begin{array}{cccc} k+1 & k+2 & \dots & 2k \\ k & k-1 & \dots & 1 \end{array}$$

erase on the bottom line the indices corresponding to $i_{t+1} \; i_{t+2} \dots i_k$ on the top line and take as $s_t \;\; s_{t-1} \dots s_1$ the remaining indices in decreasing order.

We will denote $(s_t \;\; s_{t-1} \dots s_1 \mid i_1 \;\; i_2 \dots i_t)$ the resulting minor.

A product of minors will be displayed always in decreasing order of the sizes of minors and in a double table

$$\begin{array}{|ccc|ccc|} a_{t_1} \dots & a_2 & a_1 & i_1 & \dots\dots & i_{t_1} \\ \dots\dots\dots & & & s_1 & s_2 \; \dots & s_{t_2} \\ \dots\dots\dots & & & \dots\dots\dots & & \\ \dots\dots & & & c_1 & \dots & c_{t_k} \end{array}$$

Given such a double table $(T \mid T')$ we will call its "<u>shape</u>" the decreasing sequence $t_1 \;\; t_2 \dots t_r$ of the lengths of its rows. We order always the shapes lexicographically. The <u>degree</u> of a table is its degree as a polynomial ; we remark that in fact a table is homogeneous and of degree $t_1 + t_2 + \dots + t_r$.

We now read off the quadratic equations in terms of these minors as follows : let

$$(i_1 \dots i_t \;\; i_{t+1} \dots i_k) \;, \quad i_k \leq k < i_{k+1} \;,$$

$$\text{and} \qquad (j_1 \dots j_s \;\; j_{s+1} \dots j_k) \;, \quad j_s \leq k < j_{s+1} \;,$$

be two Plücker coordinates corresponding to minors $(q_1 \dots q_t \mid i_1 \dots i_t)$, $(p_1 \dots p_s \mid j_1 \dots j_s)$. Assume $t \geq s$ and $z \leq s$ an index ; the corresponding quadratic relation splits in two parts. In the first part we collect all terms in which some h elements among $j_1 \; j_2 \dots j_z$ are exhanged with h elements among $i_z \; i_{z+1} \dots i_t$. In the second part we put the remaining terms. Now the first part of the sum is a sum with signs of products of minors :

$$\begin{array}{llll|llll} (q_z & q_{z-1} & \cdots & q_1 & i_1 & i_2 & \dot{\cdots} & i_t) \\ (\ldots & p_s & \cdots & p_1 & j_1 & \dot{\cdots}\, j_2 & \cdots & j_s) \end{array}$$

where we put the dots on top of the indices to be exchanged. The remaining sum is a product of two minors of size t', s', respectively, with $t' + s' = t+s$ but $t' > t$.

Clearly there must be a similar quadratic equation acting on the left indices. These are the relevant quadratic equations for the theory to be developed.

Next we read off the standard monomials. Given

$$M = \begin{vmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_t & i_{t+1} & \cdots & i_k \\ & & & & & & \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_s & j_{s+1} & \cdots & j_k \end{vmatrix}$$

$i_t \leq k < i_{t+1}$, $j_s \leq k < j_{s+1}$ we display it as a product of two minors

$$M' = \begin{array}{llll|llll} (s_t & \cdots & s_2 & s_1 & i_1 & i_2 & \cdots & i_t) \\ & & & & & & & \\ (h_s & \cdots & h_2 & h_1 & j_1 & j_2 & \cdots & j_s) \end{array}$$

Proposition 2.1 - M is standard if and only if $t \geq s$ and the double table is standard on the right and left i.e. $i_w \geq j_w$ $w = 1, \ldots, s$, and $s_w \geq h_w$, $w = 1, \ldots, s$.

Proof - If M is standard $j_{t+1} \geq i_{t+1} > k$, so that $s \leq t$; the fact that the double table is stantard is easily verified from the definitions given. The converse is similarly dealt with.

We deduce then the following :

Theorem 2.2

i) The ring $K[X_{ij}]$ has a linear basis formed by the standard double tableaux.

ii) The subspace of $K[X_{ij}]$ generated by the tableaux of degree n and shape $\geq$ than a fixed shape $t_1\, t_2 \ldots t_r$ has itself a basis formed by the double standard tableaux of shapes $\geq t_1\, t_2 \ldots t_r$.

i) This is a translation of Theorem 1.2 according to proposition 2.1

ii) This is seen by the special quadratic equations which we have displayed. By these equations we can write a table of shape $t_1\ t_2\ \dots\ t_r$ in terms of standard tables of the same or higher shape.

We want to deduce some corollaries of this theorem. First of all we remark that the theorem extends immediately to a set of variables X_{ij} , $i = 1,\dots,n$ $j = 1,\dots,m$ with m and n not necessarily equal. In fact it is sufficient to set 0 some of the variables of the given matrix X to make it into a rectangular matrix. As a consequence, all tables disappear which contain the (column and row) indices of the variables set equal to zero.

Next we consider the natural action of the groups $Gl(n, K)$ and $Gl(m, K)$ on the variables X_{ij} . But then the space spanned by the double tableaux of a given shape is invariant under both groups.

We will call $P_{t_1 t_2 \dots t_r}$ the space spanned by all tables of shape $\geq t_1\ t_2\ \dots\ t_r$ and degree $p = t_1 + t_2 + \dots + t_r$. We thus obtain on the space of homogeneous polynomials of degree p a canonical filtration ordered by the decreasing sêquences $t_1, t_2, \dots, t_r$ with $\sum t_i = p$ of subspaces invariant under both groups $Gl(n,K)$, $Gl(m,K)$ (If char $K = 0$, it can be shown that the space $P_{t_1 t_2 \dots t_r}$ is in fact spanned by the double tableaux of shape exactly $t_1\ t_2\ \dots\ t_r$).

Finally consider again $n=m$. The special linear group $Sl(n,K)$ is defined by setting equal to 1 the determinant of the matrix (X_{ij}). Thus the theory of standard monomials gives an induced theory for the coordinate ring $A = \dfrac{K[X_{ij}]}{(d-1)}$ of the group $Sl(n,K)$.

<u>Proposition</u> 2.3 - A <u>has a basis formed by all double standard tableaux in the indices</u> $1, 2, \dots, n$ <u>with rows of length</u> $\leq n-1$.

The meaning of this basis should be apparent considering A as a representation of $Sl(n,K)$ acting on the right and on the left and remarking that the canonical filtration in $K[X_{ij}]$ induces an analogous filtration on A .

We explain in more detail the representation theoretical meaning of this filtration as follows.

Consider a standard Young table T of shape $t_1\, t_2\, \dots\, t_r$. We define ${}_TM$ the following module. Consider the subspace $P_{t_1 \dots t_r}$. Let also $P'_{t_1 \dots t_r}$ by the subspace spanned by double tableaux of strictly higher shape and $\overline{P}_{t_1 \dots t_r}$ the quotient. Thus $\overline{P}_{t_1 \dots t_r}$ has as basis the classes of double standard tableaux of the given shape. ${}_TM$ will be the subspace of $\overline{P}_{t_1 \dots t_r}$ spanned by the double standard tableaux of type $(T \mid T')$ T' varying over all standard tableaux.

<u>Lemme</u> 2.4 - <u>${}_TM$ is a</u> $Gl(m,K)$ <u>submodule</u>.

<u>Proof</u> - Acting with $Gl(m,K)$ on a tableau $(T \mid T')$ we obtain a linear combination of tableaux $(T \mid \overline{T})$, $\overline{T}$ not necessarily standard. But the quadratic equations show how, modulo $P'_{t_1 \dots t_r}$, such a tableau can be expressed as a linear combination of standard tableaux of type $(T \mid T')$.

Consider the canonical Young table of shape $t_1\, t_2\, \dots\, t_r$

$$U = \begin{array}{|lll}
1 & 2 & 3 \\
1 & 2 & 3 \\
1 & 2 & \\
1 & & \\
\vdots & & \\
1 & &
\end{array}$$

(with i on the i-th column).

<u>Theorem</u> 2.5 - <u>If</u> K <u>is an infinite field</u>, <u>every</u> $Gl(m,K)$-<u>submodule</u> <u>of</u> T^M <u>contains the table</u> $(T \mid U)$.

<u>Proof</u> - Let $a = \sum \alpha_i \, (T \mid T_i) \in {}_TM$, $\alpha_i \neq 0$. We must show that $(T \mid U)$ is in the submodule N generated by a . We make the linear transformation which we write directly on the indices (thought as basis vectors)

$$\varphi_\lambda : \begin{cases} m \longmapsto m + \lambda(m-1) & \\ i \longmapsto i & i < m . \end{cases}$$

$\varphi_\lambda(a) = \sum_{i=0}^{k} \lambda^i a_i$; clearly $a_i \in N$ $\forall i$. The highest coefficient a_k appearing comes from all the tables T_i which have the maximum number, say k , of m's not preceded by any $m-1$. In this case all the m's are replaced by $m-1$'s . Next we make the substitution $m \longmapsto m + \lambda(m-2)$, etc... Once we have exausted these steps

m will appear only on the m^{th} column. Next we act on $m-1$ etc... The final result is in fact $\alpha(T \mid U)$, $\alpha \neq 0$. As a corollary we see that, in characteristic 0 , ${}_TM$ is irreducible, because $Gl(m,K)$-modules are semi-simple (this can be done quite simply in this context by introducing an Hermitian form explicitely). Since also all the analogous modules $M_T = \{(T' \mid T) \; ; \; T' \text{ varying}\}$ are irreducible for $Gl(n,K)$, we see that all ${}_TM$ are isomorphic as $Gl(m,K)$-modules, similarly all the M_T , finally $\overline{P}_{t_i \ldots t_r}$ is isomorphic to ${}_TM \otimes_K M_T$.

§3 - The Flag variety

Recall that, given a flag in n-dimensional space V :

$$V = V_n \supset V_{n-1} \supset \ldots \supset V_o = \{0\} \quad ,$$

we associate to this flag the Plücker coordinates obtained by picking a basis $v_1 \, v_2 \ldots v_n$ of V such that $v_1 \ldots v_i$ is a basis of V_i and associating to the flag the Plücher coordinates of $v_1 \wedge \ldots \wedge v_i$ for each i .

We may as well associate all the coordinates for $i = 1, \ldots, n-1$, since the last coordinate is inessential.

If we display the coordinates of the vectors $v_1, \ldots, v_n$ in a matrix :

$$\begin{array}{llll} v_1 = X_{11} & X_{12} & \ldots & X_{1n} \\ \vdots & & & \\ v_n = X_{n1} & X_{n2} & \ldots & X_{nn} \end{array}$$

we see that a typical Plücker coordinate for the flag is a minor $(i \ldots 2 \;\; 1 \mid j_1 \, j_2 \ldots j_i)$. We deduce immediately from the various theorems proved in the previous paragraph that the ring generated by these Plücker coordinates has a standard basis of type : $(U \mid T)$, U a canonical table with each row of length at most $n-1$, T any standard table.

We have thus the theorem that the coordinate ring of the flag variety decomposes into the sum of the modules ${}_UM$ for all canonical tables U (given just by assigning the shape). This in characteristic 0 is easily seen to be the main part of the Borel-Weil theorem for the special linear group.

The point that we want to stress now is the fact that the coordinate rings of the Grassman and flag varieties are in fact rings of invariants.

Theorem 3.1 -

1) The ring generated by the Plücker coordinates $(i_1 \dots i_k)$ is the invariant ring of the n column vectors $\xi_1 \dots \xi_n$ under the action of $Sl(n,K)$.

2) The coordinate ring generated by the Plücker coordinates of the flag manifold $(k \dots 2\ 1 \mid i_1\ i_2 \dots i_k)$, $k = 1, \dots, n-1$, is the invariant ring of the coordinate ring A of $Sl(n,K)$ under the action of the group of strictly lower triangular matrices.

Proof

1) We invert the element $d = [\xi_1\ \xi_2 \dots \xi_k]$; then if $f(X_{ij})$ is invariant it does not change if we act with a linear transformation which turns the first k vectors $\xi_1\ \xi_2 \dots \xi_n$ into $(d\ \ 0 \dots 0)$ $(0\ 1 \dots 0)$ ... $(0\ 0 \dots 0\ 1)$. But now with these vectors write the other vectors :

$$\xi_i = \sum \frac{[\xi_1 \dots \xi_{j-1}\ \xi_i\ \xi_{j+1} \dots \xi_k]}{d}\ \xi_j$$

Then coordinates are expressed in terms of such Plücker coordinates. It follows that, after localizing at d , the invariant ring is in fact generated by the Plücker coordinates. But now one has just to show that, if $g = df$ is a polynomial in Plücker coordinates $(i_1 \dots i_k)$ then so is f . This is achieved by the standard basis noticing that by an argument absolutely analogous to the one used in 1.2, if a polynomial g in the Plücker coordinates $(i_1 \dots i_k)$ vanishes when the first k vectors $\xi_1 \dots \xi_k$ are dependent, then each standard monomial appearing in g has $(1\ 2 \dots k)$ on the first row.

2) It is clear that the minors $(k \dots 2\ 1 \mid i_1 \dots i_k)$ are invariant under (left action) of the strictly lower triangular group. Conversely let g be such an invariant and we write it as a sum of double standard tableaux : $g = \sum \alpha_i\ (T_i \mid T_i')$. We must show that T_i is of the canonical shape with 1 on the first column, 2 on the second etc... We make, as in 2.4, the sequence of substitution $n \longmapsto n + \lambda(n-1)$, $i \longmapsto i$ (for $i < n$) ; $n \longmapsto n + \lambda(n-2)$ etc... Since g is invariant each substitution gives a polynomial constant in λ . This implies that every m appearing in each standard monomial of g is preceded by an $n-1$, an $n-2$, etc... Continuing in this fashion we see finally that each T_i is a canonical table.

We could treat similarly the other quotients by parabolic subgroups but we leave it.

§4 - Mixed invariants and determinantal varieties

We consider now n vector variables : $X_1 = (X_{11}, \dots, X_{1k})$, $\dots X_n = (X_{n1}, \dots, X_{nk})$ and n form variables : $\xi_1 = (\xi_{11}, \dots, \xi_{1k})$ $\dots \xi_n = (\xi_{n1}, \dots, \xi_{nk})$. We act with the general linear group $Gl(n,K)$ on the vectors by the canonical action and on the forms by the contragredient action. The "scalar product" : $< \xi_j , X_i > = \sum_{t=1}^{k} \xi_{jt} X_{it}$ are clearly invariants.

Theorem 4.1

a) The ring $K[<\xi_j , X_i>]$ is the full ring of invariants ;

b) It is isomorphic to the ring of polynomials $K[Y_{ji}]$ modulo the ideal generated by the $(k+1)\times(k+1)$ determinants ;

c) It has thus a basis of double standard monomials.

Proof - We sketch the proof, for details see [1]. We first remark that by obvious properties of determinants every $(k+1)\times(k+1)$ determinant in the $<\xi_j , X_i>$ is zero. Thus the ring $K[<\xi_j , X_i>]$ is certainly spanned by the double tableaux with first row of length $\leq k$. Now the general linear group $Gl(n,K)$ acts on $K[<\xi_j , X_i>]$ in two ways , i.e. on the ξ_j' s and on X_i' s . Thus $K[<\xi_j , X_i>] \simeq \frac{K[Y_{ji}]}{I}$, where I is invariant under both actions.

By Theorem 2.4 we see that if I were different from the ideal spanned by the double tableaux with first row of length $\geq k+1$ then I would contain a canonical table with first row of length $\leq k$. This is clearly absurd. So the second part of the Theorem is proved. To prove the first part one procedes as in 3.1 ; first one localizes at the element $d = (k \dots 2\ 1 | 1\ 2 \dots k)$ and shows that the invariant ring after this localisation is generated by such scalar products. Then one has to prove that d can be cancelled in a similar way as the one used in 3.1.

In a similar way one can prove that the $Sl(n,K)$ invariants are generated by the $<\xi_j , X_i>$ and the determinants $[X_{i1} \dots X_{ik}]$, $[\xi_{j1} \dots \xi_{jk}]$ and produce a standard basis Theorem for such invariants.

The other classical groups can be similarly treated once one finds standard basis for some other representations of the general linear group $Gl(V)$, in particular for the second symmetric and alternating power of the vector space V .

In coordinates one considers first a symmetric matrix $X = (X_{ij})$, $X_{ij} = X_{ji}$ $i,j = 1, \ldots, n$ and the coordinate ring $R = K[X_{ij}]$ (as a representation of $Gl(n,K)$).

Then the ring R has a basis formed by special kinds of standard tableaux. Let in fact $(i_1 \ldots i_k \mid j_1 \ldots j_k)$ denote the corresponding minor in the matrix X. A product of such minors $(i_1 \ldots i_{k_1} \mid j_1 \ldots j_{k_1})(s_1 \ldots s_{k_2} \mid t_1 \ldots t_{k_2}) \ldots$ $\ldots (z_1 \ldots z_{k_r} \mid w_1 \ldots w_{k_r})$ ordered by decreasing size will be disployed in a unique table :

$$\begin{array}{|lll}
i_1 & \cdots & i_{k_1} \\
j_1 & \cdots & j_{k_1} \\
s_1 & \cdots & s_{k_2} \\
t_1 & \cdots & t_{k_2} \\
\vdots & & \\
z_1 & \cdots & z_{k_r} \\
N_1 & \cdots & w_{k_F}
\end{array}$$

We have thus a notion of standard monomial and we get :

<u>Theorem</u> 4.2 - <u>The standard monomials are a K-basis of the ring</u> $K[X_{ij}]$.
(For the proof we refer to [1]).

Notice that again the canonical filtration induced by lexicographical order of shapes is made of $Gl(n,K)$-invariant submodules and also a Theorem like 2.4 holds giving in characteristic 0 the decomposition of R into irreducible submodules.

The relation with invariant theory comes from the study of orthogonal invariants. Let $u_1, \ldots, u_n$ be vectors (with k coordinates) and consider the usual scalar product $(u_i, u_j) = \sum_{t=1}^{k} u_{it} u_{jt}$. Then we have a corresponding orthogonal group and the scalar products are invariant.

Theorem 4.3

a) The ring $K[(u_i, u_j)]$ is the full ring of orthogonal invariants for n vectors ;

b) $K[(u_i, u_j)]$ is isomorphic to the polynomial ring $K[X_{ij}]$ $(X_{ij} = X_{ji})$ modulo the ideal generated by the $(k+1) \times (k+1)$ minors ;

c) $K[(u_i, u_j)]$ has a basis of standard monomials.

See [1].

As for the symplectic group we consider a skew symmetric matrix $X = (X_{ij})$, $X_{ij} = - X_{ji}$, $X_{ii} = 0$. Given an even number of indices $i_1\, i_2 \ldots i_{2n}$ we denote $[i_1\, i_2 \ldots i_{2n}]$ the Pfaffian of the special skew symmetric matrix extracted from X taking as rows and columns the ones of indices $i_1\, i_2 \ldots i_{2n}$. Then we can deduce a theory of standard monomials : a product

$$[i_1\, i_2 \ldots i_{2n_1}]\,[j_1\, j_2 \ldots j_{2n_2}] \;\ldots\; [s_1\, s_2 \ldots s_{2n_k}]$$

is displayed in a unique Young table :

$$\begin{array}{|llll}
i_1 & i_2 & \ldots\ldots & i_{2n_1} \\
j_1 & j_2 & \ldots & j_{2n_2} \\
\vdots & & & \\
s_1 & \ldots & s_{2n_k} & \\
\hline
\end{array}$$

Again we have the notion of standard monomials, the canonical filtration invariant under the action of $Gl(n,K)$ and the theorem :

Theorem 4.4 – The standard monomials are a basis of $K[X_{ij}]$.

Finally one identifies again the invariants, under the symplectic group, of n vectors $u_1,\dots,u_n$ in $2k$ dimensional space with a skew form $\langle u_i,u_j\rangle$ with the scalar products just defined and proves :

Theorem 4.6 -

a) The ring of symplectic invariants of n vectors $u_1,\dots,u_n$ is generated by the products $\langle u_i,u_j\rangle$;

b) $K[\langle u_i,u_j\rangle]$ is isomorphic to the polynomial ring $K[X_{ij}]$ ($X_{ij}=-X_{ji}$, $X_{ii}=0$) modulo the ideal generated by the Pfaffians of the submatrices of size $2k+2$.

c) The ring $K[\langle u_i,u_j\rangle]$ has a basis of standard monomials.

Of course also in this case we have in characteristique 0 the description in terms of irreducible representations of $Gl(n,K)$.

§5 - The symmetric group and the Brauer-Weyl algebra

The theory developed can be used to deduce the commutation theorems, classical in characteristic zero, for the classical groups acting on tensor spaces, in a characteristic free approach and a theory of standard tableaux for the symmetric group.

The main point is that, if G is a group acting on a vector space W, then

$$\mathrm{End}(W) \cong W \otimes W^* \simeq (W \otimes W^*)^* \quad \text{and}$$

$$\mathrm{End}_G(W) \simeq (W \otimes W^*)^G \simeq (W \otimes W^*)^{*G},$$

the invariant elements. Furthermore if $W = V^{\otimes m}$ then $(W \otimes W^*)^{*G}$ is identified to the multilinear invariants under G of m vectors and m forms.

The theorems proved in the previous paragraph can then be interpreted in the following way. First of all consider the polynomial ring $K[Y_{ij}]$ in m^2 variables Y_{ij}. $i,j = 1,\dots,m$. Let now M be the subspace of $K[Y_{ij}]$ spanned by the monomials of type $Y_{i_1 j_1} Y_{i_2 j_2} \dots Y_{i_m j_m}$ where both $i_1 i_2 \dots i_m$ and $j_1 \dots j_m$ are a permutation of $1,\dots,m$. It is immediately seen that M is spanned by the double standard monomials of type $(T \mid T')$ where T and T' are Young tables with m rows filled in a standard way by all the indices $1,2,\dots,m$. We identify M with the group algebra of the symmetric group $\mathcal{S}_m$ by associating to a permutation

σ the monomial $Y_{1\sigma(1)} Y_{2\sigma(2)} \cdots Y_{m\sigma(m)}$; multiplication by a permutation on the right or left corresponds to permuting the indices either on T' or on T (by σ or σ^{-1}). The canonical filtration gives a filtration of ideals in $K[\mathcal{S}_m]$ and in characteristic 0 one has that each ideal in the filtration has a complement in the next filtration step which is a minimal ideal (corresponding to the representation given by the Young tableau). One recovers thus Young's Theorem on the basis for the representation of $\mathcal{S}_m$ in terms of standard Young tableaux.

We then map M to the multilinear invariants of m vectors and forms :

$$Y_{ij} \longmapsto \langle \xi_j , X_i \rangle$$

and obtain :

<u>Theorem</u> 5.1

a) <u>The symmetric group</u> $\mathcal{S}_m$ <u>spans the centralizer of</u> $Gl(V)$ on $V^{\otimes m}$;

b) <u>The kernel of the map</u> : $K[\mathcal{S}_m] \longrightarrow End(V^{\otimes m})$ <u>is the ideal</u> I <u>generated by the (undivided) antisymmetrizer on</u> $n+1$ <u>elements</u> ($\dim V = n$) ;

c) $K[\mathcal{S}_m]/I$ <u>has a standard basis</u>.

As for the other classical groups one has similar results. Given $V^{\otimes m}$ and two indices i,j we can define a map : $V^{\otimes m} \longrightarrow V^{\otimes m-2}$ by contraction on the given indices but we have also a map : $V^{\otimes m-2} \longrightarrow V^{\otimes m}$ given tensoring (in the two given indices) by the invariant element $I \in V^{\otimes 2}$ corresponding to the form. The result is a map $\tau_{ij} : V^{\otimes m} \longrightarrow V^{\otimes m}$. If G is the group of the form I we have :

<u>Theorem</u> 5.2 - $End_G(V^{\otimes m})$ <u>is generated but the elements</u> τ_{ij} <u>and the symmetric group</u>.

One can give a (somewhat obscure) description of this ring (the Brauer-Weyl algebra) by standard bases.

References

[1] C. De Concini, C. Procesi - A characteristic free approach to invariant theory- Advances in Math. 21, 330-354 (1976)

[2] P. Doubilet, G.C. Rota, J. Stein - On the foundation of Combinatorial theory - Vol IX , pp. 185-216. Studies in Applied Mathematics - Vol 53 (1974)

[3] W.V.D. Hodge - Some enumerative results in the theory of forms, Proc Cambridge Philos. Soc. 39 (1943) - 22-30

[4] J. Igusa - On the arithmetic normality of the Grassmann variety - Proc. Nat. Acad. Sc. U.S.A. 40 (1954), 309-313

[5] H. Weyl - The classical groups. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1946

Manuscrit reçu le 14 Février 1977

INTEGRAL REPRESENTATIONS OF FINITE GROUPS

Irving REINER

Introduction

Let G be a finite group, and ZG its integral group ring. By a ZG-lattice we mean a left ZG-module which is finitely generated and projective as Z-module. A basic problem in the theory of integral representations is as follows : given a group G , classify (up to isomorphism) all ZG-lattices. It is easily seen that every lattice is expressible as a finite direct sum of indecomposable lattices, though usually not in a unique way, since the Krull-Schmidt Theorem need not hold true for ZG-lattices. The basic problem may be split into three parts :

I) For which groups G is the number n(ZG) of isomophism classes of indecomposable ZG-lattices finite ?

II) When n(ZG) is finite, determine a full set of indecomposable ZG-lattices.

III) When are two direct sums of indecomposable lattices isomorphic ?

The solution to (I) has been known for many years (see the discussion in [2, Chapter XI]), and is as follows :

Theorem - *There are finitely many isomorphism classes of indecomposable ZG-lattices if and only if for each rational prime* p *dividing* $|G|$, *the Sylow p-subgroups of* G *are cyclic of order* p *or* p^2 .

Jacobinski [6] has generalized this result to the case of RG-lattices, where R is the ring of algebraic integers in a number field.

Problem (II) is much harder, and its solution usually requires knowledge of ideal class groups in algebraic number fields, as well as congruence properties of units in such fields. The problem has been solved only for the following few cases :

i) G cyclic of prime order p (see[2 , Chapter XI], or [3],[12])

ii) G dihedral of order 2p , where p is prime [9]

iii) G metacyclic of order pq , where p,q are prime [11]

iv) G cyclic of order p^2 , where p is prime (see [14]-[16]).

To complete the list, we mention the work of Nazarova[10], who solved problem (II) for the case where G is an elementary abelian (2,2) group, even though n(ZG) is infinite for this case. She also treated the case where G is the alternating group A_4 .

We turn finally to the most difficult problem (III), which is almost untouched. For cyclic groups of prime order, the solution has been known for many years (see (3.2) below) ; the problem has also been solved for case ii) above.

In this article, we shall describe the solution of (II) and (III) for cyclic groups of order p^2 ; detailed calculations may be found in [16].

Let us recall the definition of genus : two ZG-lattices M, N are in the same genus (notation : $M \vee N$) if their p-adic completions M_p and N_p are Z_pG-isomorphic for each prime p dividing $|G|$. In trying to classify ZG-lattices up to isomorphism, one usually begins by giving a full set of genus invariants. One must then find additional invariants which distinguish the isomorphism classes within a fixed genus. Often, these additional invariants are ideal classes of some kind. In the cases considered below, we shall find an invariant lying in some factor group of the group of units in some finite ring. Furthermore, a Legendre symbol will also appear as a possible invariant of a ZG-lattice.

§1 - Extensions of lattices

Throughout, let R denote a Dedekind ring whose quotient field K is an algebraic number field ; let Λ be an R-order in a finite dimensional semisimple K-algebra A . For each maximal ideal P of R , let R_P denote the P-adic completion of R , and Λ_P the completion of Λ , etc... We may choose a finite non-empty set $S(\Lambda)$ of P's , such that Λ_P is a maximal R_P-order in A_P for each

$P \notin S(\Lambda)$. (For example, when Λ is an integral group ring RG, it suffices to choose for $S(\Lambda)$ any set which includes all prime ideal divisors of $|G|$). For M a Λ-lattice, let $\mathrm{End}_\Lambda(M)$ denote its ring of Λ-endomorphisms, and $\mathrm{Aut}_\Lambda(M)$ the group of Λ-automorphisms of M, acting from the left on M. We use $M^{(n)}$ to denote the external direct sum of n copies of M.

Let us begin with a simple lemma (see [1] or [5]) :

(1.1) <u>Lemma</u> - <u>For</u> $i = 1,2$, <u>let</u> M_i <u>and</u> N_i <u>be</u> Λ-<u>modules, and let</u> $\xi_i \in \mathrm{Ext}^1_\Lambda(N_i, M_i)$ <u>determine a</u> Λ-<u>module</u> X_i. <u>Assume that</u> $\mathrm{Hom}_\Lambda(M_1, N_2) = 0$. <u>Then</u> $X_1 \cong X_2$ <u>if and only if</u> :

$$\gamma \xi_1 = \xi_2 \delta \quad \underline{\text{for some}}\ \Lambda\text{-}\underline{\text{isomorphisms}}\ \gamma : M_1 \cong M_2\ ,\ \delta : N_1 \cong N_2\ .$$

(1.2) <u>Corollary</u> - <u>Let</u> M, N <u>be</u> Λ-<u>modules such that</u> $\mathrm{Hom}_\Lambda(M,N) = 0$. <u>For</u> $i = 1,2$, <u>let</u> $\xi_i \in \mathrm{Ext}^1_\Lambda(N,M)$ <u>determine a</u> Λ-<u>module</u> X_i. <u>Then</u> $X_1 \cong X_2$ <u>if and only if</u> :

$$(1.3) \qquad \gamma \xi_1 = \xi_2 \delta \quad \underline{\text{for some}}\ \gamma \in \mathrm{Aut}_\Lambda(M)\ ,\quad \delta \in \mathrm{Aut}_\Lambda(N)\ .$$

Let us call ξ_1 and ξ_2 <u>strongly equivalent</u> when condition (1.3) is satisfied, and write $\xi_1 \approx \xi_2$. The isomorphism classes of extensions of N by M are thus in bijection with the strong equivalence classes in $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(N,M)$, that is, with the orbits of $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(N,M)$ under the actions of $\mathrm{Aut}_\Lambda(M)$ and $\mathrm{Aut}_\Lambda(N)$.

For each maximal ideal P of R, we have

$$R_P \otimes_R \mathrm{Ext}^1_\Lambda(N,M) \cong \mathrm{Ext}^1_{\Lambda_P}(N_P, M_P)\ .$$

The right hand expression is zero for each $P \notin S(\Lambda)$, since for such P we know that Λ_P is a maximal order, and thus the Λ_P-lattice N_P is Λ_P-projective. This shows that $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(N,M)$ is a torsion R-module, whose torsion occurs only at the primes P in $S(\Lambda)$. It follows at once that if $M' \vee M$ and $N' \vee N$, then

$$\mathrm{Ext}^1_\Lambda(N,M) \cong \mathrm{Ext}^1_\Lambda(N',M')\ .$$

Indeed, we may give such an isomorphism explicitly, as follows : by Roiter's Lemma (see [13, (27.1)]), we can find Λ-exact sequences

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} M' \longrightarrow T \longrightarrow 0\ ,\quad 0 \longrightarrow N' \xrightarrow{\psi'} N \longrightarrow U \longrightarrow 0$$

in which both T_P and U_P are zero for each $P \in S(\Lambda)$. The pair (φ, ψ') then induces an isomorphism

$$(1.4) \qquad t : \mathrm{Ext}^1_\Lambda(N,M) \cong \mathrm{Ext}^1_\Lambda(N',M') \quad ,$$

which we shall call a <u>standard</u> isomorphism

We wish to show that under certain mild hypotheses, the strong equivalence classes in $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(N,M)$ depend only on the genera of M and N. A Λ-lattice M is called an <u>Eichler</u> lattice if $\mathrm{End}_A(K \otimes_R M)$ satisfies the Eichler condition over R (see [13, (38.1)]). When R is the ring of all algebraic integers in K, M is an Eichler lattice if and only if no simple component of $\mathrm{End}_A(K \otimes_R M)$ is a totally definite quaternion algebra. Certainly M is an Eichler lattice whenever $\mathrm{End}_\Lambda(M)$ is a matrix ring over a commutative ring.

The following result is established in [16]:

(1.5) <u>Theorem</u> - <u>Let</u> M <u>and</u> N <u>be Eichler</u> Λ-<u>lattices such that</u> $\mathrm{Hom}_\Lambda(M,N) = 0$, <u>and let</u> $M' \vee M$, $N' \vee N$. <u>Let</u> t <u>be a standard isomorphism as in (1.4) and let</u> $\xi_1, \xi_2 \in \mathrm{Ext}^1_\Lambda(N,M)$. <u>Then</u>

$$\xi_1 \approx \xi_2 \quad \text{if and only if} \quad t(\xi_1) \approx t(\xi_2) \quad .$$

<u>Thus there is a bijection between the strong equivalence classes in</u> $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(N,M)$ <u>and those in</u> $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(N',M')$.

This result shows that, under suitable hypotheses, there are as many isomorphism classes of extensions of N by M as are of N' by M'. We conjecture that this same result holds even when $\mathrm{Hom}_\Lambda(M,N) \neq 0$, and whether or not M and N are Eichler lattices.

As an easy consequence of the above theorem, we obtain :

(1.6) <u>Corollary</u> - <u>Let</u> M <u>and</u> N <u>be Eichler lattices for which</u> $\mathrm{Hom}_\Lambda(M,N) = 0$, <u>and let</u> $M_i \vee M$, $N_i \vee N$, $i = 1,2,\ldots,r$. <u>For each</u> i, <u>let</u> $\xi_i \in \mathrm{Ext}^1_\Lambda(N_i,M_i)$ <u>determine an extension</u> X_i <u>of</u> N_i <u>by</u> M_i. <u>Let</u>

$$t_i : \mathrm{Ext}^1_\Lambda(N_i,M_i) \cong \mathrm{Ext}^1_\Lambda(N,M)$$

<u>be a standard isomorphism as in</u> (1.4), <u>for</u> $1 \leq i \leq r$. <u>Then a full set of isomorphism invariants of the</u> Λ-<u>lattice</u> $X_1 \oplus \ldots \oplus X_r$ <u>are as follows</u> :

i) *The isomorphism classes of* $\oplus M_i$ *and* $\oplus N_i$, *and*

ii) *The strong equivalence class of the matrix*

$$\mathrm{diag}(t_1(\xi_1), \ldots, t_r(\xi_r))$$

in $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(N^{(r)}, M^{(r)})$, *under the actions of* $GL(r,\Delta)$ *and* $GL(r,\Gamma)$, *where*

$$\Gamma = \mathrm{End}_\Lambda(M) \quad , \quad \Delta = \mathrm{End}_\Lambda(N) \quad .$$

§2 - Exchange formulas

Keep the notation of §1 ; by an R-*lattice* we mean a finitely generated projective R-module. Steinitz's Theorem (see [2 , Chapter III]) gives the structure of R-lattices :

Theorem - *Each R-lattice* M *is isomorphic to an external direct sum* $\mathfrak{a}_1 \dotplus \cdots \dotplus \mathfrak{a}_n$ *of fractional R-ideals* $\{\mathfrak{a}_i\}$ in K . *A full set of isomorphism invariants of* M *are its R-rank* n , *and the ideal class of the product* $\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_n$. (This ideal class is called the Steinitz class of M).

A special case of this theorem gives

$$\mathfrak{a}_1 \dotplus \mathfrak{a}_2 \cong R \dotplus \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \quad .$$

This formula is easily generalized to the case of Λ-lattices, where Λ is an R-order, and we obtain (see [13] or [17]) :

(2.1) *Proposition* - *Let* L,M,N *be* Λ-*lattices in the same genus. Then*

$$M \oplus N \cong L \oplus L'$$

for some L' *in the genus of* L .

Now let M and N be arbitrary Λ-lattices ; the ring $\mathrm{End}_\Lambda(M)$ acts from the left on $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(N,M)$. If X is an extension of N by M corresponding to the extension class $\xi \in \mathrm{Ext}(N,M)$, and if $\gamma \in \mathrm{End}_\Lambda(M)$, then we shall denote by ${}_\gamma X$ the Λ-lattice which corresponds to the element $\gamma\xi \in \mathrm{Ext}(N,M)$. If γ satisfies the condition

(2.2) $\qquad \gamma_P \in \mathrm{Aut}_{\Lambda_P}(M_P) \qquad$ for all $P \in S(\Lambda)$, then it is easily seen that ${}_{\gamma}X$ is in the same genus as X . The method of proof of (2.1) then yields (see [16]) :

(2.3) Exchange Formula - Let X and Y be Λ-lattices which are extensions of N by M , and let $\gamma \in \mathrm{End}_{\Lambda}(M)$ satisfy condition (2.2). Then

$$X \oplus {}_{\gamma}Y \cong {}_{\gamma}X \oplus Y \quad .$$

Similarly, we obtain :

(2.4) Absorption Formula - Under the above hypotheses, we have

$$X \oplus M \cong {}_{\gamma}X \oplus M \quad .$$

The preceding results show at once that the Krull-Schmidt Theorem need not hold true for Λ-lattices, and that usually "cancellation" is not possible. The proofs of (2.1)-(2.4) are elementary, and depend only on the "Strong Approximation Theorem" in algebraic number fields. There is a much deeper version of (2.1), due originally to Roiter [18], and proved in a different manner by Jacobinski [7] (see also [17]). Roiter's result is as follows :

(2.5) Theorem - *Let L and M be Λ-lattices in the same genus, and let F be any faithful** Λ-lattice. Then*

$$L \oplus F \cong M \oplus F'$$

for some F' in the genus of F .

§3 - Cyclic p-groups

Let p be prime, and let

$$\Lambda_j = Z[x]/(x^{p^j} - 1) \;,\quad R_j = Z[x]/(\Phi_j(x)) \;,$$

where $\Phi_j(x)$ is the cyclotomic polynomial of order p^j . Then $R_j \cong Z[\omega_j]$, where ω_j is a primitive p^j-th root of 1 over Q , so R_j is the ring of all algebraic integers in the field $K_j = Q(\omega_j)$. Thus R_j is a Dedekind ring, and Steinitz's

---

* This means that no non zero element of Λ can annihilate F .

Theorem gives the structure of R_j-lattices.

If G is a cyclic group of order p^2, we may identify ZG with the ring Λ_2. For $j = 0,1,2$, R_j is a factor ring of Λ_2, and so each R_j-module may be viewed also as a Λ_2-module. Now let M be any Λ_2-lattice, and set

$$L = \{m \in M : (x^p - 1)\, m = 0\} .$$

Then there is a Λ_2-exact sequence

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0 \quad , \tag{3.1}$$

where $N = M/L$. Here, L is a Λ_1-lattice, and N an R_1-lattice. Thus, in order to classify all $\mathbf{Z}G$-lattices M, we must classify all Λ_1-lattices L, and all R_2-lattices N, and then determine all strong equivalence classes in $\mathrm{Ext}^1_{ZG}(N,L)$. (Note that $\mathrm{Hom}_{ZG}(L,N) = 0$ in the present case, so Corollary (1.2) applies here).

By Steinitz's Theorem, the R_2-lattice N is a direct sum of fractional R_2-ideals. The isomorphism invariants of N are its R_2-rank and its Steinitz class. On the other hand, the structure of the Λ_1-lattice L is known from the results of Diederichsen and Reiner (see [2, Chapter XI]), and can be described in the following manner : both Z and R_1 are factor rings of Λ_1, so they may be viewed as Λ_1-lattices. For each fractional R_1-ideal $\mathcal{L}$, viewed as Λ_1-lattice, we have

$$\mathrm{Ext}^1_{\Lambda_1}(Z,\mathcal{L}) \cong \bar{Z} \quad ,$$

where $\bar{Z} = Z/pZ$. Let $(Z,\mathcal{L};\ 1)$ denote the extension of Z by $\mathcal{L}$ corresponding to the extension class $\bar{1} \in \bar{Z}$, and let us denote $(Z,\mathcal{L};\ 1)$ by $E(\mathcal{L})$ for brevity. It turns out that $E(\mathcal{L})$ is always in the same genus as Λ_1, and that the isomorphism class of $E(\mathcal{L})$ depends only on the ideal class of $\mathcal{L}$. Then one has :

(3.2) <u>Theorem</u> - <u>Every Λ_1-lattice</u> L <u>is isomorphic to an external direct sum</u>

$$L \cong Z^{(a)} \dotplus \mathcal{L}'_1 \dotplus \dots \dotplus \mathcal{L}'_b \dotplus E(\mathcal{L}_1) \dotplus \dots \dotplus E(\mathcal{L}_c) \quad ,$$

<u>where the $\mathcal{L}'$s are fractional R_1-ideals. A full set of isomorphism invariants of</u> L <u>are the integers</u> a,b,c (which determine the genus of L), <u>and the ideal class of the product</u>

$$\mathcal{L}'_1 \dots \mathcal{L}'_b\ \mathcal{L}_1 \dots \mathcal{L}_c$$

(called the <u>Steinitz class</u> of L).

Thus in the exact sequence (3.1), we know the $\mathbb{Z}G$-lattices L and N quite explicitly. Our next step is to compute the extension classes, and here we have a result due originally to Diederichsen (see [3] or [5]) :

(3.3) Proposition - Let L be any Λ_1-lattice, and let $\mathfrak{X}$ be any fractional R_2-ideal. View both L and $\mathfrak{X}$ as $\mathbb{Z}G$-lattices. Then

$$\mathrm{Ext}^1_{ZG}(\mathfrak{X}, L) \cong L/pL \quad .$$

The above result enables us to calculate $\mathrm{Ext}^1_{ZG}(N,L)$, where N is any R_2-lattice and L any Λ_1-lattice. We wish to determine the strong equivalence classes in Ext(N,L) , and by (1.5) it suffices to make the calculation after replacing N by any lattice in its genus, and likewise for L . Thus we may take :

$$(3.4) \qquad N = R_2^{(d)} \quad , \quad L = Z^{(a)} \dotplus R_1^{(b)} \dotplus \Lambda_1^{(c)} \quad .$$

Let bars denote reduction mod p , so $\bar{\Lambda}_1 = \Lambda_1/p\Lambda_1$, $\bar{Z} = Z/pZ$, etc... Then $\bar{\Lambda}_1 = \bar{Z}[\lambda]/(\lambda^p)$, where $\lambda = 1-x$, and so $\bar{\Lambda}_1$ is a local principal ideal ring. Let us now consider the special case where $a = b = 0$ in (3.4). By (3.3) we have :

$$\mathrm{Ext}^1_{ZG}(N,L) \cong (L/pL)^{(d)} \cong \bar{\Lambda}_1^{c\times d} \quad ,$$

where $\bar{\Lambda}_1^{c\times d}$ denotes the set of all $c \times d$ matrices over $\bar{\Lambda}_1$. Clearly :

$$\mathrm{Aut}_{ZG}(N) = GL(d, R_2) \quad , \quad \mathrm{Aut}_{ZG}(L) = GL(c, \Lambda_1) \ .$$

There are ring surjections $\Lambda_1 \longrightarrow \bar{\Lambda}_1$ and $R_2 \longrightarrow \bar{\Lambda}_1$, by means of which both $GL(d, R_2)$ and $GL(c, \Lambda_1)$ act on $\bar{\Lambda}_1^{c\times d}$. The strong equivalence classes in Ext(N,L) are just the orbits of $\bar{\Lambda}_1^{c\times d}$ under the actions of $GL(d, R_2)$ and $GL(c, \Lambda_1)$.

In particular, every elementary matrix over $\bar{\Lambda}_1$ is the image of some matrix in $GL(\Lambda_1)$, and also of some matrix in $GL(R_2)$. Hence each $X \in \bar{\Lambda}_1^{c\times d}$ is strongly equivalent to $U X V$, where U and V are products of elementary matrices over $\bar{\Lambda}_1$. Since $\bar{\Lambda}_1$ is a local principal ideal ring, we may diagonalize X by use of elementary transformations. We obtain (for $c \leqslant d$) the result that X is strongly equivalent to a matrix $[D \ \ 0]$, where D is a diagonal matrix :

$$(3.5) \qquad D = \mathrm{diag}(\lambda^{k_1} u_1 , \ldots, \lambda^{k_c} u_c) \quad , \quad 0 \leqslant k_1 \leqslant k_2 \leqslant \ldots \leqslant k_c \leqslant p \quad ,$$

with each u_i a unit of $\bar{\Lambda}_1$. An analogous result holds for the case where $c \geq d$ It follows at once that every extension of a free R_2-lattice by a free Λ_1-lattice must decompose into a direct sum of copies of R_2 , Λ_1 , and extensions of R_2 by Λ_1 . In order to decide when two such direct sums are isomorphic, we must determine a full set of invariants of strong equivalence classes of matrices over $\bar{\Lambda}_1$.

Some additional notation will be needed ; for $0 \leq k \leq p$, let :

$$\Gamma_k = \bar{\Lambda}_1 / \lambda^k \bar{\Lambda}_1 \cong \bar{Z}[\lambda]/(\lambda^k) \quad . \tag{3.6}$$

Then Γ_k is a local principal ideal ring, whose group of units we shall denote by $u(\Gamma_k)$. There are ring surjections $\Lambda_1 \longrightarrow \Gamma_k$ and $R_2 \longrightarrow \Gamma_k$, which induce homomorphisms

$$u(\Lambda_1) \longrightarrow u(\Gamma_k) \ , \ u(R_2) \longrightarrow u(\Gamma_k) \quad .$$

We now define :

$$U_k = u(\Gamma_k) \ / \ \{\text{image of } u(\Lambda_1)\} \ \{\text{image of } u(R_2)\} \ . \tag{3.7}$$

(As a matter of fact, $u(\Lambda_1)$ and $u(R_2)$ have the same image in $u(\Gamma_k)$, by the results of Kervaire and Murthy [8]).

Suppose now that the matrix $X \in \bar{\Lambda}_1^{c \times d}$ is strongly equivalent to $[D \ \ 0]$, with D as in (3.5). Then $\{\lambda^{k_1}, \ldots, \lambda^{k_c}\}$ is precisely the set of elementary divisors of the matrix X , in the usual sense of elementary divisors of matrices over principal ideal rings. These elementary divisors of X are clearly an invariant of the strong equivalence class of X . In the special case where $c = d$, let $X \approx D$ with D as in (3.5), and define :

$$u(X) = \text{image of } \ u_1 u_2 \ldots u_c \ \text{ in } \ U_{p-k_c} \quad .$$

It turns out that $u(X)$ is also a strong equivalence invariant of X , and indeed we obtain (see [16]) :

(3.8) Theorem - Let $X, X' \in \bar{\Lambda}_1^{c \times d}$, where $c \neq d$. Then $X \approx X'$ if and only if X and X' have the same elementary divisors.

(3.9) Theorem - Let $X, X' \in \bar{\Lambda}_1^{c\times c}$. Then $X \approx X'$ if and only if

i) X and X' have the same elementary divisors, and

ii) $u(X) = u(X')$ in U_{p-k_c}, where k_c is the largest exponent occuring among the elementary divisors $\{\lambda^k\}$ of X.

These theorems give us information about ZG-lattices M which are extensions of free R_2-lattices by free Λ_1-lattices, and also enable us to determine all ZG-lattices in the genus of M. Each such lattice M determince a strong equivalence class of matrices in $\bar{\Lambda}_1^{c\times d}$, by means of the isomorphism

$$\mathrm{Ext}^1_{ZG}(R_2^{(d)}, \Lambda_1^{(c)}) \cong \bar{\Lambda}_1^{c\times d} .$$

For each R_1-ideal $\mathcal{G}$ in K_1, we have defined (see (3.2)) a Λ_1-lattice $E(\mathcal{G})$ which lies in the genus of Λ_1. For each R_2-ideal $\mathcal{L}$ in K_2, by (3.3) we have :

$$\mathrm{Ext}^1_{ZG}(\mathcal{L}, E(\mathcal{G})) \cong E(\mathcal{G})/p\,E(\mathcal{G}) \cong \bar{\Lambda}_1 .$$

Each element of $\bar{\Lambda}_1$ is expressible in the form $\lambda^k u$, where $0 \leq k \leq p$ and where $u \in u(\bar{\Lambda}_1)$; by virtue of the above isomorphism, this element $\lambda^k u$ determines (up to isomorphism) an extension of $\mathcal{L}$ by $E(\mathcal{G})$. We shall denote this extension by $(E(\mathcal{G}), \mathcal{L}; \lambda^k u)$; the genus of this lattice depends only upon the exponent k, and not upon the choices of $\mathcal{G}, \mathcal{L}$ or u. We are now ready to restate Theorems 3.8 and 3.9 in terms of ZG-lattices, as follows :

(3.10) Theorem - Let N be any R_2-lattice, and L any Λ_1-lattice in the same genus as a free Λ_1-lattice. Then every $\mathbb{Z}G$-lattice M which is an extension of N by L, as in (3.1), is isomorphic to a direct sum of indecomposable $\mathbb{Z}G$-lattices :

$$M \cong \coprod_{i=1}^{r} (E(\mathcal{G}_i), \mathcal{L}_i ; \lambda^{k_i} u_i) \oplus \coprod_{j=r+1}^{r+s} E(\mathcal{G}_j) \oplus \coprod_{n=r+1}^{r+t} \mathcal{L}_n ,$$

where each $\mathcal{G}_i$ is a fractional R_1-ideal in the cyclotomic field K_1, each $\mathcal{L}_j$ is a fractional R_2-ideal in K_2, and where

$$0 \leq k_i < p , \quad u_i \in u(\bar{\Lambda}_1) , \quad 1 \leq i \leq r .$$

The genus of M is completely determined by the following invariants :

i) The integers $r+s$ and $r+t$, and the set of exponents $\{k_1, \dots, k_r\}$.

The additional invariants, needed to determine M up to isomorphism, are as follows :

ii) The ideal class of $\prod_{i=1}^{r+s} \mathcal{B}_i$,

iii) The ideal class of $\prod_{j=1}^{r+t} \mathcal{C}_j$, and

iv) For the case where $s = t = 0$ only, the image of $\prod_{i=1}^{r} u_i$ in the finite group U_{p-k} defined as in (3.7), where k is chosen as $\mathrm{Max}\,\{k_1, \dots, k_r\}$.

<u>Remarks</u>

1) The Exchange and Absorption Formulas of §2 yield isomorphisms of the following types :

$$(E(\mathcal{B}), \mathcal{C}; \lambda^k u) \oplus E(\mathcal{B}') \cong (\Lambda_1, \mathcal{C}; \lambda^k) \oplus E(\mathcal{B}\mathcal{B}') ,$$

$$(E(\mathcal{B}), \mathcal{C}; \lambda^k u) \oplus \mathcal{C}' \cong (E(\mathcal{B}), R_2; \lambda^k) \oplus \mathcal{C}\mathcal{C}' ,$$

$$(E(\mathcal{B}), \mathcal{C}; \lambda^k u) \oplus (E(\mathcal{B}'), \mathcal{C}'; \lambda^n u')$$

$$\cong (\Lambda_1, R_2; \lambda^k) \oplus (E(\mathcal{B}\mathcal{B}'), \mathcal{C}\mathcal{C}'; \lambda^n u u') ,$$

and so on. It is then an easy matter to show that M is determined up to isomorphism by the invariants listed in (i) - (iv) above. The real difficulty in the proof of Theorem 3.10 is showing that when :

$$M = \coprod (E(\mathcal{B}_i), \mathcal{C}_i; \lambda^{k_i} u_i) ,$$

then the image of $\prod u_i$ in U_{p-k} (as described in (iv)) is indeed an isomorphism invariant of M . This fact is a consequence of Theorem 3.9 above.

2) The structure of the finite groups U_k , $0 \leq k \leq p$, has been studied by Galovich [4] and Kervaire and Murthy [8]. The case $p=2$ is trivial, so now let p be odd. Call the prime p <u>regular</u> if $p \nmid h_1$, where h_1 is the ideal class number of R_1 . Then U_k is an elementary abelian p-group on $[(k-2)/2]$ generators, where this greatest integer function is interpreted as 0 whenever $k < 2$. On the

other hand, p is called <u>properly irregular</u> if $p \mid h_1$ but p does not divide the class number of $Z[\omega_1 + \omega_1^{-1}]$. Let $\delta(m)$ be the number of Bernoulli numbers among $B_1, B_2, \ldots, B_m$ whose numerators are multiples of p. (We note that p is regular if and only if $\delta((p-3)/2) = 0$). Then for properly irregular primes p, the group U_k is an elementary abelian p-group on $g(k)$ generators, where :

$$g(k) = \begin{cases} [(k-2)/2] + \delta[(k-1)/2] , & 0 \leq k \leq p-2 , \\ (p-3)/2 + \delta((p-3)/2) , & k = p-1, p . \end{cases}$$

§4 - <u>Indecomposable lattices</u>

Keeping the notation of §3 , let M be any ZG-lattice. We have seen that M is always expressible as an extension of an R_2-lattice N by a Λ_1-lattice L. Since we can classify all R_2-lattices and all Λ_1-lattices, the problem then reduces to the determination of strong equivalence classes in $\mathrm{Ext}^1_{ZG}(N,L)$. This procedure enables us to find all indecomposable ZG-lattices, and we shall indicate the results below.

From [5] we know that M is indecomposable if and only if the $\mathbf{Z}_p G$-lattice M_p is indecomposable ; here, $\mathbf{Z}_p$ denotes the ring of p-adic integers. One finds (see [14] and [16]) that every indecomposable $\mathbf{Z}G$-lattice is in the same genus as one (and only one) of the following $4p+1$ indecomposable ZG-lattices :

$$(4.1) \qquad \begin{cases} Z , R_1 , \Lambda_1 , R_2 , (Z , R_2 ; 1) , \\ (\Lambda_1 , R_2 ; \lambda^r) , \quad 0 \leq r \leq p-1 , \\ (Z \oplus \Lambda_1 , R_2 ; 1 \oplus \lambda^r) , \quad 1 \leq r \leq p-2 , \\ (R_1 , R_2 ; \lambda^r) , \quad 0 \leq r \leq p-2 , \\ (Z \oplus R_1 , R_2 ; 1 \oplus \lambda^r) , \quad 0 \leq r \leq p-2 . \end{cases}$$

Here, $(Z , R_2 ; 1)$ represents an extension of R_2 by Z with class $\bar{1} \in \bar{Z}$, using the isomorphism $\mathrm{Ext}(R_2, Z) \cong \bar{Z}$. Likewise, $(Z \oplus \Lambda_1, R_2 ; 1 \oplus \lambda^r)$ denotes an extension of R_2 by $Z \oplus \Lambda_1$ with class $(1, \lambda^r) \in \bar{Z} \oplus \bar{\Lambda}_1$, using the isomorphism :

$$\mathrm{Ext}(R_2 , Z \oplus \Lambda_1) \cong \bar{Z} \oplus \bar{\Lambda}_1 .$$

Similar definitions apply to the other cases in (4.1).

We may then determine all indecomposable $\mathbb{Z}G$-lattices by calculating all lattices in the genus of each of the lattices listed in (4.1). This calculation depends on determining strong equivalence classes of matrices (set [16] for details), and we shall need some additional notation in order to state the results.

Let U_k be the group defined in (3.7) ; if $0 \leq k \leq p-1$, then U_k is a homomorphic image of $u(\bar{R}_1)$, where $\bar{R}_1 = R_1/p\,R_1$ and $u(\bar{R}_1)$ denotes the group of units of $\bar{R}_1$. We may therefore choose a subset $\tilde{U}_k$ of $u(\bar{R}_1)$ such that $\tilde{U}_k$ is a full set of representatives of the factor group U_k . It is easily seen that each $u \in \tilde{U}_k$ may be chosen to satisfy the condition that $u \equiv 1 \pmod{\lambda}$, where $\bar{R}_1 \cong \bar{Z}[\lambda]/(\lambda^{p-1})$, $\lambda = 1 - \omega_1$. Likewise, U_p is a factor group of $u(\bar{\Lambda}_1)$, and we may pick a full set of representatives $\tilde{U}_p$ in $u(\bar{\Lambda}_1)$, such that $u \equiv 1 \pmod{\lambda}$ for each $u \in \tilde{U}_p$. Finally, let n_o be some fixed quadratic nonresidue mod p .

(4.2) Theorem - Let $\mathcal{G}$ range over a full set of representatives of the h_1 ideal classes of R_1, and $\mathcal{L}$ over the h_2 ideal classes of R_2 . The following is a full list of indecomposable $\mathbb{Z}G$-lattices (up to isomorphism) :

i) Z , $\mathcal{G}$, $E(\mathcal{G})$, $\mathcal{L}$, $(Z , \mathcal{L} ; 1)$

ii) $(E(\mathcal{G})\ \mathcal{L} ;\ \lambda^r u)$, $u \in \tilde{U}_{p-r}$, $0 \leq r \leq p-1$

iii) $(Z \oplus E(\mathcal{G})\ , \mathcal{L} ;\ 1 \oplus \lambda^r u)$, $u \in \tilde{U}_{p-1-r}$, $1 \leq r \leq p-2$

iv) If $p \equiv 1 \pmod 4$, $(Z \oplus E(\mathcal{G}), \mathcal{L} ;\ 1 \oplus \lambda^r u\, n_o)$, $u \in \tilde{U}_{p-1-r}$, $1 \leq r \leq p-2$

v) $(\mathcal{G}\ , \mathcal{L} ;\ \lambda^r u)$, $u \in \tilde{U}_{p-1-r}$, $0 \leq r \leq p-2$

vi) $(Z \oplus \mathcal{G}\ , \mathcal{L} ;\ 1 \oplus \lambda^r u)$, $u \in \tilde{U}_{p-1-r}$, $0 \leq r \leq p-2$.

Remarks

1) In each case, the genus is independent of the ideals $\mathcal{G}, \mathcal{L}$, and the unit u .

2) From the above theorem, we may obtain an explicit formula for the number $n(ZG)$ of isomorphism classes of indecomposable $\mathbb{Z}G$-lattices. This formula involves the orders of the finite groups U_k (see the second remark following (3.10)), and is as follows :

$$(4.3) \qquad n(\mathbf{Z}G) = 1 + 2\,h_1 + 2\,h_2 + h_1\,h_2\,\{3\,N_1 + |U_p| + \varepsilon_p\,(N_1 - |U_{p-1}|)\} \quad ,$$

where

$$N_1 = \sum_{r=0}^{p-2} |U_{p-1-r}| \quad ,$$

and where $\varepsilon_p = 2$ if $p \equiv 1 \pmod 4$, and $\varepsilon_p = 1$ otherwise. Furthermore,

$$|U_k| = p^{[(k-2)/2]} \quad , \quad 0 \leq k \leq p-1 \quad ,$$

if p is a regular odd prime or if $p=2$, where the greatest integer function is interpreted as 0 if $k-2<0$. Also one has $|U_p| = |U_{p-1}|$ if p is either regular or properly irregular.

3) The preceding formulas give

$$n(ZG) = 9 \ , \ 13 \ , \ 40 \qquad \text{for} \qquad p = 2 \ , \ 3 \ , \ 5 \ , \text{ respectively} \ .$$

§5 - Invariants of direct sums

In §4 we have listed all indecomposable genera in (4.1), and then described in Theorem (4.2) all indecomposable $\mathbf{Z}G$-lattices in each genus. We now wish to give a complete solution to the basic Problem (III) : when are two direct sums of indecomposable ZG-lattices isomorphic ?

We have already observed, in the first remark following (3.10), that direct sums of indecomposables can be simplified by repeated use of the Exchange and Absorption Formulas of §2 . For example, we obtain isomorphisms such as :

$$(Z \oplus \mathcal{L} \,;\, \mathcal{C} \,;\, 1 \oplus \lambda^r u) \;\oplus\; \mathcal{L}' \cong (Z \oplus R_1 \,;\mathcal{C} \,;\, 1 \oplus \lambda^r) \;\oplus \mathcal{L}\mathcal{L}'$$

for $u \in \tilde{U}_{p-1-r}$, and also :

$$(Z \oplus E(\mathcal{L}) \,, \mathcal{C} \,;\, 1 \oplus \lambda^r u\, n_o) \;\oplus Z \cong (Z \oplus E(\mathcal{L}) \,, \mathcal{C} \,;\, 1 \oplus \lambda^r u) \;\oplus Z \quad ,$$

for $u \in \tilde{U}_{p-1-r}$, and so on. It is an easy matter to list about a dozen such formulas, which can be used to simplify a direct sum. Thus, for example, all of the fractional ideals $\mathcal{C}$ can be concentrated into a single summand ; the same holds for the fractional ideals $\mathcal{L}$. Likewise, all of the troublesome units u can be concentrated into a single summand, and indeed can be eliminated altogether if certain types of summands occur. After all such simplifications have been made, one is still faced with the problem of proving that certain expressions are indeed invariants of the isomorphism class of the direct sum. This involves proving analogues of Theorems (3.8) and (3.9) in somewhat more complicated situations. The detailed calculations may be found in [16], and here we shall merely state the conclusion.

Let M be a finite direct sum of indecomposable $\mathbb{Z}G$-lattices from the list in Theorem 4.2 . As is well known, the Krull-Schmidt-Azumaya Theorem is valid for Z_pG-lattices. Therefore the number of summands of M in the genus of each of the $4p+1$ types in (4.1) must be an invariant of M . This gives us a set of $4p+1$ nonnegative integers, which are just the genus invariants of M . Next, the R_1-ideal class of the product of all R_1-ideals $\mathcal{C}$, which occur in the summands of M , must be an isomorphism invariant of M . Analogously, the R_2-ideal class of the product of all R_2-ideals $\mathcal{L}$ which occur is also an invariant.

Let us next define $u_o(M)$ to be the product of all of the u's and $u\,n_o'$s which occur in the summands of M , with a vacuous product interpreted as 1 . Let $r_1(M)$ be the largest exponent r which occurs in any summand of M of type (4.2 ii), and let $r_2(M)$ be the largest exponent r among all summands of types (4.2 iii - vi). Choose $r_1(M) = p$ if M has no summand of type (4.2 ii), and choose $r_2(M) = p-1$ if there are no summands of types (4.2 iii - vi). Then we have :

MAIN THEOREM - *Every ZG-lattice* M *is expressible as a finite direct sum of indecomposable ZG-lattices, which we may assume are chosen from the complete list given in* (4.2). *For any such direct sum* M , *a full set of isomorphism invariants of* M *consiste of* :

a) *The* $4p+1$ *genus invariants of* M , *and*

b) *The* R_1 - *and* R_2 - *ideal classes associated with* M , *and*

c) *If* M *has no summand of types*

$$\mathcal{C},\ E(\mathcal{C}),\ \mathcal{L},\ (Z, \mathcal{L}; 1),$$

the isomorphism invariant given by the image of $u_o(M)$ *in* U_{p-k} , *where*

$$k = \begin{cases} r_1(M) & \text{if } r_1(M) > r_2(M), \\ 1 + r_2(M) & \text{otherwise,} \end{cases}$$

and :

d) If $p \equiv 1 \pmod 4$, and if M has no summand of types

$$Z\ ,\ E(\mathcal{C})\ ,\ (Z,\mathfrak{X}\ ;\ 1),\ (E(\mathcal{C}),\mathfrak{X}\ ;\ \lambda^r u)\ \text{ or }\ (Z\oplus\mathcal{C}\ ,\mathfrak{X}\ ;\ 1\oplus\lambda^r u),$$

the isomorphism invariant given by the quadratic character of the image of $u_o(M)$ in $u(\bar{Z})$.

Remarks

1) This result implies, in particular, that if $E(\mathcal{C})$ occurs as a summand of M, then M is determined up to isomorphism by its $4p+1$ genus invariants and its two ideal class invariants.

2) The theorem permits us to calculate explicitly the number of isomorphism classes of ZG-lattices of given Z-rank.

3) Some parts of the proofs of (4.2), and of the Main Theorem above, can be applied to more general problems involving integral representations of cyclic p-groups.

4) For G cyclic of order p^2, the following question still remains to be answered : given a ZG-lattice M, how can we calculate the isomorphism invariants of M intrinsically, without first expressing M as a direct sum of indecomposable lattices ? For example, M might be specified by an exact sequence as in (3.1), with the lattices L and N given explicitly, and with the extension class of the sequence specified in some way.

References

1. H. Cartan and S. Eilenberg - Homological algebra, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. 1956.

2. C.W. Curtis and I. Reiner - Representation theory of finite groups and associative algebras, Interscience, New York, 1962, second edition, 1966.

3. F.E. Diederichsen - Uber die Ausreduktion ganzzahliger Gruppendarstellungen bei arithmetischer Aquivalenz, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 14 (1938), 357-412.

4. S. Galovich - The class group of a cyclic p-group, J. of Algebra 30 (1974), 368-387.

5. A. Heller and I. Reiner - Representations of cyclic groups in rings of integers, I, II, Annals of Math. (2) 76 (1962), 73-92 ; 77 (1963), 318-328.

6. H. Jacobinski - Sur les ordres commutatifs avec un nombre fini de réseaux indécomposables, Acta Math. 118 (1967), 1-31.

7. H. Jacobinski - Genera and decomposition of lattices over orders, Acta Math. 121 (1968), 1-29.

8. M.A. Kervaire and M.P. Murthy - On the projective class groups of cyclic groups of prime power order, to appear.

9. M.P. Lee - Integral reprepresentations of dihedral groups of order 2p . Trans. Amer. Math. Soc. 110 (1964), 213-231.

10. L.A. Nazarova - Unimodular representations of the four group, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 140 (1961), 1011-1014 : Soviet Math. Dokl. 2 (1961), 1304-1307.

11. L.C. Pu - Integral representations of non-abelian groups of order pq , Michigan Math. J. 12 (1965), 231-246.

12. I. Reiner - Integral representations of cyclic groups of prime order, Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957), 142-146.

13. I. Reiner - Maximal orders, Academic Press, London, 1975.

14. I. Reiner - Integral representations of cyclic groups of order p^2 , Proc. Amer. Math. Soc. 58 (1976), 8-12.

15. I. Reiner - Indecomposable integral representations of cyclic p-groups, Proc. Temple Univ. Conference 1976, to appear.

16. I. Reiner - Invariants of integral representations, to appear.

17. K. W. Roggenkamp - Lattices over orders II, Springer Lecture Notes 142 (1970).

18. A.V. Roiter - On integral representations belonging to a genus, Izv. Akad. Nauk SSSR , Ser. Mat. 30 (1966), 1315-1324 ; (Amer. Math. Soc. Translations (2) 71 (1968), 49-59).

Manuscrit reçu le 21 Mars 1977

Irving REINER
University of Illinois
URBANA

SPECTRE DU DE RHAM HODGE SUR L'ESPACE

PROJECTIF COMPLEXE

par Anne Levy-Bruhl-Laperrière

I. Spectre de Δ_G sur les formes.

Soit G un groupe de Lie semi-simple, H un sous-groupe compact, $V = G/H$ et $p : G \longrightarrow G/H$ la projection. Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G, $\mathfrak{h}$ celle de H. Par hypothèse, on a :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$$

où $[\mathfrak{h},\mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$, $[\mathfrak{p},\mathfrak{p}] \subset \mathfrak{h}$ et on suppose $\mathfrak{p}$ muni d'une métrique euclidienne invariante sous l'action de $\mathrm{Ad}(H)$. Alors V sera muni de la structure riemannienne homogène héritée de celle de $\mathfrak{p}$. Si W est un fibré G-homogène sur V, on note $\Lambda^s(V,W)$ l'espace des formes différentielles de degré s sur V à valeurs dans W. On sait d'après [6] que $\Lambda^s(V,W)$ est l'espace des sections du fibré vectoriel $\Lambda^s\, T(V)^\star_{\mathbb{C}} \otimes_V W$. On identifie $\mathfrak{p}$ à l'espace tangent en $p(e) = eH$ à V ; comme $(\mathrm{Ad}\, h)\mathfrak{p} = \mathfrak{p}$ pour tout h de H, $\mathfrak{p}$ est l'espace d'une représentation de H par transformations orthogonales. On notera $\lambda^\star_o$ la représentation adjointe de H dans $\mathfrak{p}^\star_{\mathbb{C}}$ et $\lambda^{\star s}_o$ la représentation de H dans $\Lambda^s\mathfrak{p}^\star_{\mathbb{C}}$.

Si λ est une représentation irréductible de H dans l'espace vectoriel F et si F^λ est le fibré G-homogène associé, alors le fibré $\Lambda^s\, T(V)^\star_{\mathbb{C}} \otimes_V F^\lambda$ est défini par la représentation $\mu = \lambda^{\star s}_o \otimes \lambda$ de H dans $F_1 = \Lambda^s\mathfrak{p}^\star_{\mathbb{C}} \otimes F$.

Soit $\mathcal{C}^\mu(G,F_1)$ le sous-espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ de G dans F_1 qui sont

H-équivariantes, c'est-à-dire qui vérifient, pour tout h de H, pour tout g de G : $f(gh) = \mu(h^{-1})\, f(g)$. L'espace $\mathcal{C}^{\mu}(G,F_1)$ est isomorphe à l'espace vectoriel des sections $\mathcal{C}^{\infty}$ de $\Lambda^s\, T(V)^{\star}_{\mathbb{C}} \otimes_V F^{\lambda}$. Soit τ la représentation de G sur $\mathcal{C}^{\mu}(G,F_1)$ définie par :

$$(\tau(\gamma)f)\ (g) = f(\gamma^{-1}\, g).$$

La représentation τ est la représentation induite de μ.

PROPOSITION I.1. Si f appartient à $\mathcal{C}^{\mu}(G,F_1)$, $\tau(\gamma)f$ appartient à $\mathcal{C}^{\mu}(G,F_1)$.

Preuve : cf [5] (page 214).

PROPOSITION I.2. Si μ est somme directe des représentations irréductibles $\mu_1 \dots \mu_q$ dans les espaces vectoriels $F_1^1 \dots F_1^q$ alors les composantes irréductibles de $\tau = \mathrm{Ind}{\uparrow}_G^H(\mu)$ sont toutes les représentations ρ de G telles que ρ restreinte à H contienne l'une des μ_i.

Preuve : Si $\mu = \mu_1 \oplus \dots \oplus \mu_q$, on a $\tau = \mathrm{Ind}{\uparrow}_G^H(\mu) = \bigoplus_{i=1}^{q} \mathrm{Ind}{\uparrow}_G^H(\mu_i)$. Si ρ est une composante irréductible de τ, ρ est une composante irréductible de l'une des $\mathrm{Ind}{\uparrow}_G^H(\mu_i)$ donc ρ restreinte à H contient μ_i d'après le théorème de réciprocité de Frobenius [8]. De plus la multiplicité de ρ dans $\mathrm{Ind}{\uparrow}_G^H(\mu_i)$ est égale à la multiplicité de μ_i dans ρ restreinte à H.

Soit $X_1, \dots, X_n$ une base orthonormale dans $\mathfrak{p}$ (le produit scalaire de $\mathfrak{g}$ considéré est celui défini par l'opposé de la forme de Killing $B_{\mathfrak{g}}$). Notons Δ_G l'opérateur différentiel défini par $\Delta_G = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{L}^2_{X_i}$ où $\mathcal{L}_{X_i}$ désigne la dérivée de Lie par rapport au champ de vecteur défini par X_i. Si f est une fonction $\mathcal{C}^{\infty}$ de G dans F_1 on a

$$(\Delta_G\, f)\ (g) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d^2}{dt^2}\, [f(g \exp t\, X_i)]_{t=o}.$$

<u>PROPOSITION I.3</u>. <u>L'opérateur</u> Δ_G <u>opère sur</u> $\mathcal{C}^{\mu}(G,F_1)$ <u>c'est-à-dire si</u> f <u>appartient à</u> $\mathcal{C}^{\mu}(G,F_1)$ <u>alors</u> $\Delta_G f$ <u>appartient à</u> $\mathcal{C}^{\mu}(G,F_1)$.

<u>Preuve</u> : voir [6] (page 2).

L'opérateur Δ_G est hypo-elliptique au sens de L. Hörmander [3]. Le groupe G étant compact, on a

$$L^2(G) = \oplus H_{\alpha_s} \quad \text{avec} \quad H_{\alpha_s} = \mathrm{Ker}(\Delta_G - \alpha_s \,\mathrm{Id})$$

et H_{α_s} est un espace de dimension finie. De plus, comme $\mathcal{C}^{\mu}(G,F_1)$ est contenu dans $L^2(G)$ et stable sous l'action de Δ_G on a :

$$\mathcal{C}^{\mu}(G,F_1) = \oplus (H_{\alpha_s} \cap \mathcal{C}^{\mu}(G,F_1))$$

où le second membre est la somme directe orthogonale vis à vis du produit scalaire usuel de $L^2(G)$.

<u>PROPOSITION I.4.</u> : <u>Si</u> f <u>appartient à</u> $H_{\alpha_s} \cap \mathcal{C}^{\mu}(G,F_1)$ <u>alors quel que soit</u> γ <u>appartenant à</u> $G, \tau(\gamma) f$ <u>appartient à</u> $H_{\alpha_s} \cap \mathcal{C}^{\mu}(G,F_1)$.

<u>Preuve</u> : cf [5] (page 215).

Le sous-espace $\mathcal{C}^{\mu}(G,F_1) \cap H_{\alpha_s}$ est donc stable sous l'action de τ. Les composantes irréductibles de τ sont les composantes irréductibles de τ, restreinte aux sous-espaces $\mathcal{C}^{\mu}(G,F_1) \cap H_{\alpha_s}$. On a :

$$\mathcal{C}^{\mu}(G,F_1) \cap H_{\alpha_s} = \oplus H^{\rho}_{\alpha_s}$$

en désignant par $H^{\rho}_{\alpha_s}$ le sous-espace de $H_{\alpha_s} \cap \mathcal{C}^{\mu}(G,F_1)$ sur lequel la restriction de τ est égale à ρ, composante irréductible de τ. D'après la proposition I.2, ρ est une composante irréductible de $\mathrm{Ind}{\uparrow}^{H}_{G}(\mu_i)$, représentation de G sur $\mathcal{C}^{\mu_i}(G,F_1^i)$.

PROPOSITION I.5. : Si f appartient à $H^{\rho}_{\alpha_s}$ alors

$$(\Delta_G f)(e) = -\bar{\rho}(\Delta_G)\, f(e)$$

où $\bar{\rho}$ est l'homomorphisme d'algèbres

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow D(G)$$

de l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$ dans l'algèbre des opérateurs différentiels de G qui provient de

$$\mathfrak{g} \longrightarrow D(G)$$
$$X \longrightarrow \bar{\rho}(X), \text{ où } (\bar{\rho}(X)f)(g) = [\tfrac{d}{dt}(\rho(\exp tX))_{t=o}\, f]\,(g).$$

Preuve : voir [5] (page 216)

Soit $X_1,\ldots, X_n, X_{n+1},\ldots, X_{n+r},\ldots, X_{n+t}$ une base orthonormale de $\mathfrak{g}$ pour l'opposé de la forme de Killing $B_{\mathfrak{g}}$ de $\mathfrak{g}$, où $X_1,\ldots, X_n$ est une base orthonormale de $\mathfrak{p}$ pour $B_{\mathfrak{g}}$, $X_{n+1},\ldots, X_{n+r}$ est une base du centre de $\mathfrak{h}$, $X_{n+r+1},\ldots, X_{n+t}$ est une base du supplémentaire orthogonal $\mathfrak{h}'$ du centre de $\mathfrak{h}$, dans $\mathfrak{h}$. Notons Ω_G l'élément de Casimir de G ; c'est l'élément de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ défini par

$$\Omega_G = \sum_{i=1}^{n+t} X_i^2 .$$

Soit $X'_{n+r+1},\ldots, X'_{n+t}$ une base orthonormale de $\mathfrak{h}'$ pour $-B_{\mathfrak{h}'}$, opposé de la forme de Killing de $\mathfrak{h}'$. Le Casimir de H' est l'élément de $\mathcal{U}(\mathfrak{h}')$ défini par :

$$\Omega_{H'} = \sum_{j=n+r+1}^{n+t} X_j'^2 .$$

Or dans $\mathfrak{h}'$ les deux formes bilinéaires symétriques $B_{\mathfrak{h}'}$ et $B_{\mathfrak{g}}$ sont associatives ; d'après [4] (page 118) elles sont proportionnelles. Il existe un réel non nul c tel que $B_{\mathfrak{h}'} = c\, B_{\mathfrak{g}}$; donc $\Omega_{h'} = c \sum_{j=n+s+1}^{n+q} X_j^2$.

PROPOSITION I.6. : Quelle que soit f appartenant à $H^{\rho}_{\alpha_s}$ on a

$$[\bar{\rho}(\Delta_G)f](e) = [\bar{\rho}(\Delta_G)f](e) - \sum_{j=n+1}^{n+s} [\bar{\mu}_i(X_j^2)]\, f(e) - \frac{1}{c}\,[\bar{\mu}_i(\Omega_{H'})]f(e).$$

Preuve : Rappelons que si f appartient à $H^{\rho}_{\alpha_s}$, f appartient à $\mathscr{C}^{\mu_i}(G,F_1^i)$ et on peut donc utiliser les résultats de [5] (page 217).

PROPOSITION I.7. : Si ρ est une représentation irréductible de G de poids dominant Λ_ρ et si δ_G désigne la demi-somme des racines positives de G, alors :

$$\bar{\rho}(\Omega_G) = (\|\Lambda_\rho + \delta_G\|_G^2 - \|\delta_G\|_G^2)\ \mathrm{Id}$$

Preuve : voir [7] (page 16).

THEOREME I.8. : Dans $\mathscr{C}^{\mu}(G,F_1)$, on a :

$$\text{Spectre } \Delta_G = \bigcup_{i=1}^{q} \{-\|\Lambda_\rho + \delta_G\|_G^2 + \|\delta_G\|^2 - \sum_{j=n+1}^{n+r} \beta_{i,j} - \frac{1}{c}(\|\Lambda_{\mu_i} + \delta_{H'}\|_{H'}^2 - \|\delta_{H'}\|_{H'}^2)$$

quel que soit ρ représentation irréductible de G, $\rho_{|H}$ contient $\mu_i\}$

où

$$\beta_{ij}\ \mathrm{Id} = \bar{\mu}_i(X_j^2) \quad 1 \leqslant i \leqslant q,\ n+1 \leqslant j \leqslant n+s.$$

Preuve : $\bar{\mu}_i(X_j^2) = \beta_{ij}$ Id car X_j appartient au centre de $\mathfrak{h}$ pour $n+1 \leqslant j \leqslant n+s$. Pour le reste, voir [5] (page 218).

II. Etude de $SU(n,\mathbb{C})$ et de son algèbre de Lie. Application à $P_{n-1}(\mathbb{C})$.

Dans ce deuxième paragraphe, on se propose de déterminer Spectre Δ_G dans le cas où $G = SU(n,\mathbb{C})$, $H = S(U(1) \times U(n-1))$

A. Etude de $SU(n,\mathbb{C})$.

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n de base $\{e_1,\ldots, e_n\}$. On considère sur E la forme hermitienne F qui a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ dans la base $\{e_1,\ldots, e_n\}$; donc :

$$F\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{i=1}^{n} y_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i .$$

Considérons le sous-groupe $SU(n,\mathbb{C})$ de $GL(E)$ des automorphismes g tels que

$$F(gx,gy) = F(x,y), \quad x,y \in E, \quad \det g = 1.$$

Soit $su(n,\mathbb{C})$ l'algèbre de Lie de $S\,U(n,\mathbb{C})$; alors

$$su(n,\mathbb{C}) \subset M_n(\mathbb{C})$$

et $A \in su(n,\mathbb{C})$ si et seulement si

$$\begin{cases} A + {}^t\bar{A} = 0 \\ \operatorname{tr} A = 0. \end{cases}$$

Si $\{e_{ij},\ 1 \leq i,j \leq n\}$ désigne la base usuelle de $M_n(\mathbb{C})$, c'est-à-dire $e_{ij} = (\delta_i^k\ \delta_j^\ell)$, $su(n,\mathbb{C})$ est une algèbre de Lie qui admet pour base sur $\mathbb{R}$:

$$\{e_{ij} - e_{ji},\ i(e_{ij} + e_{ji}),\ 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{i(e_{jj} - e_{j+1,j+1},\ 1 \leq j \leq n-1\}.$$

L'étude de $SU(n,\mathbb{C})$ et de ses représentations nous conduit à l'étude de la complexifiée de $su(n,\mathbb{C})$ c'est-à-dire de $s\ell(n,\mathbb{C})$.

<u>PROPOSITION II.I.</u> : <u>Une sous-algèbre de Cartan de</u> $s\ell(n,\mathbb{C})$ <u>est l'algèbre</u> $\mathcal{C}$ <u>engendrée par les</u> $\{e_{kk} - e_{k+1,k+1},\ 1 \leq k \leq n-1\}$.

<u>Preuve</u> : Cette sous-algèbre est de toute évidence abélienne et maximale. C'est donc une sous-algèbre de Cartan de $sl(n,\mathbb{C})$.

<u>Racines de</u> $s\ell(n,\mathbb{C})$: Si ℓ_k désigne la forme linéaire sur $\mathcal{C}$ définie par

$$\ell_k\left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i(e_{ii} - e_{i+1,i+1})\right) = \begin{cases} \lambda_1 & \text{si } k=1 \\ \lambda_k - \lambda_{k-1} & \text{si } k \neq 1,n \\ -\lambda_{n-1} & \text{si } k=n \end{cases}$$

les racines de $s\ell(n,\mathbb{C})$ sont les formes linéaires $\ell_k - \ell_\ell$ $1 \leq k \neq \ell \leq n$ de vecteur propre respectif $e_{k\ell}$. De plus on peut prendre pour base des racines de $sl(n,\mathbb{C})$ les $\{\ell_i - \ell_{i+1},\ 1 \leq i \leq n-1\}$.

PROPOSITION II.2 : Dans $sl(n,\mathbb{C})$ la forme de Killing définie par $B(x,y) = +\ \mathrm{Trace}\ \mathrm{Ad}x \circ \mathrm{Ad}y$ où $\mathrm{Ad}\, x \in \mathrm{End}\,(s\ell(n,\mathbb{C}))\ (\mathrm{Ad}s)(z) = [x,z]$, vaut : $B(x,y) = +\ 2n\ \mathrm{Trace}\ (x.y)$.

Preuve : voir [2] (page 160).

On en déduit l'expression du produit scalaire de deux racines α et β de $s\ell(n,\mathbb{C})$. En effet si α est une racine de $s\ell(n,\mathbb{C})$ associons-lui l'élément h_α de $\mathcal{T}$ tel que

$$B(h_\alpha,h) = \alpha(h), \quad \text{si} \quad h \in T.$$

Si $\alpha = \ell_k - \ell_\ell$, on a

$$h_{k,\ell} = +\ \frac{1}{2n}\ (e_{kk} - e_{\ell\ell}).$$

Par définition le produit scalaire de α et β est égal au produit scalaire des vecteurs h_α et h_β de $sl(n,\mathbb{C})$ associés. Si

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n-1} n_i(\ell_i - \ell_{i+1}) \quad \text{et} \quad \beta = \sum_{j=1}^{n-1} m_j(\ell_j - \ell_{j+1}), \quad \text{on a :}$$

$$(\alpha|\beta) = B(h_\alpha,h_\beta) = +\ \frac{1}{2n}\,[m_1\ n_1 + \sum_{i=2}^{n-1} (m_i - m_{i-1})\ (n_i - n_{i-1}) + m_{n-1}\ n_{n+1}]$$

PROPOSITION II.3. : La forme linéaire λ sur $\mathcal{T}$ est le poids dominant d'une représentation irréductible de $s\ell(n,\mathbb{C})$ si et seulement si :

$$\lambda = (\alpha_1 - \alpha_n)\ \ell_1 + \ldots + (\alpha_{n-1} - \alpha_n)\ \ell_{n-1} \qquad \text{avec} \quad \alpha_i - \alpha_n \in \mathbb{Z}^+$$

$$= \alpha_1\ \ell_1 + \ldots + \alpha_n\ \ell_n \qquad \text{et} \qquad \alpha_1 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_{n-1} \geqslant \alpha_n$$

et la norme de $\lambda = \alpha_1\ \ell_1 + \ldots + \alpha_n\ \ell_n$ vaut

$$\|\lambda\|_G^2 = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \frac{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}{n})^2.$$

Preuve : voir [10] (L.A. 7.6.). On a :

$$\lambda = \alpha_1\ \ell_1 + \ldots + \alpha_n\ \ell_n = (\alpha_1 - \frac{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}{n})\ \ell_1 + \ldots + (\alpha_n - \frac{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}{n})\ \ell_n$$

car $\ell_1 + \ldots + \ell_n = 0$ sur $\mathfrak{t}$. D'où : $\lambda = (\alpha_1 - \frac{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}{n})(\ell_1 - \ell_2) + \ldots$

$$+(\alpha_1 + \ldots + \alpha_i - i\,\frac{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}{n})(\ell_i - \ell_{i+1}) + \ldots + (\alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-1} - (n-1)\frac{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}{n})(\ell_{n-1} - \ell_n)$$

$$\|\lambda\|_G^2 = \frac{1}{2n}\Big[\{\alpha_1 - \frac{\alpha_1 + \ldots \alpha_n}{n}\}^2 + \sum_{i=2}^{n-1} \{\alpha_1 + \ldots + \alpha_i - i\,\frac{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}{n} - \alpha_1 - \ldots - \alpha_{i+1} +$$

$$(i+1)\,\frac{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}{n}\}^2 + \{\alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-1} - (n-1)\,\frac{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}{n}\}^2\Big] = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \frac{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}{n})^2 .$$

PROPOSITION II.4. : Une représentation irréductible de $s\ell(n,\mathbb{C})$ de poids dominant $m_1\, \ell_1 + \ldots + m_{n-1}\, \ell_{n-1}$ avec les m_i entiers positifs ou nuls et $m_i \geqslant \ldots \geqslant m_{n-1} \geqslant 0$, se décompose lorsqu'on la restreint à $s\ell(n-1,\mathbb{C})$ en une somme de représentations irréductibles de poids dominants $m'_1\, \ell_1 + \ldots + m'_{n-1}\, \ell_{n-1}$, les m'_j étant tous des entiers tels que

$$m_1 \geqslant m'_1 \geqslant m_2 \geqslant \ldots \geqslant m_{n-2} \geqslant m'_{n-2} \geqslant m_{n-1} \geqslant m_{n-1} \geqslant m'_{n-1} \geqslant 0,$$

la représentation de poids dominant $m'_1\, \ell_1 + \ldots + m'_{n-2}\, \ell_{n-2}$ intervenant dans la restriction de la représentation de $s\ell(n,\mathbb{C})$ de poids dominant $m_1\, \ell_1 + \ldots + m_{n-1}\ell_{n-1}$ un nombre de fois égal à :

$$1 + \inf\{m_i - m'_i \;,\; 1 \leqslant i \leqslant n-2,\; m_{n-1}\}.$$

Preuve : Si ρ est une représentation irréductible de $s\ell(n,\mathbb{C})$ de poids dominant $m_1\, \ell_1 + \ldots + m_{n-1}\, \ell_{n-1}$ alors il existe τ représentations irréductibles de $gl(n,\mathbb{C})$ caractérisées par :

$$m_1 + a \geqslant \ldots \geqslant m_{n-1} + a \geqslant a \geqslant 0 \qquad a \in \mathbb{Z}^+$$

telle que :

$$\rho = \tau_{|s\ell(n,\mathbb{C})}$$

$\tau_{|g\ell(n-1,\mathbb{C})} = \sum \tau'$ où τ' est caractérisée par $(m'_1, \ldots, m'_{n-1})$ avec $m_1 + a \geqslant m'_1 \geqslant \ldots \geqslant m_{n-1} + a \geqslant m'_{n-1} \geqslant a \geqslant 0$, chaque représentation τ' intervenant exactement une fois (voir [1] page 161).

$$\rho|_{s\ell(n-1,\mathbb{C})} = \tau|_{s\ell(n-1,\mathbb{C})} = \tau|_{g\ell(n-1,\mathbb{C})}|_{s\ell(n-1,\mathbb{C})} = \sum \tau'|_{s\ell(n-1,\mathbb{C})}$$

Donc ρ restreinte à $s\ell(n-1,\mathbb{C})$ se décompose en somme de représentations irréductibles de poids dominant :

$$m_1' \ell_1+\ldots+ m_{n-1}' \ell_{n-1} = (m_1'-a) \ell_1+\ldots+(m_{n-1}'-a) \ell_{n-1}$$

avec $m_1 \geqslant m_1'-a \geqslant \ldots \geqslant m_{n-1} \geqslant m_{n-1}'-a \geqslant 0.$

La multiplicité de la représentation irréductible de $s\ell(n-1,\mathbb{C})$ de poids dominant $m_1' \ell_1+\ldots+ m_{n-2}' \ell_{n-2}$ dans $\rho|s\ell(n-1,\mathbb{C})$ est égale au nombre d'entiers distincts k tels que

$$m_1+a \geqslant m_1'+k \geqslant m_2+a \geqslant\ldots\geqslant m_{n-2}+a \geqslant m_{n-2}'+k \geqslant m_{n-1}+a \geqslant k \geqslant a \geqslant 0$$

c'est-à-dire $k = a+j$ avec $0 \leqslant j \leqslant m_{n-1}$ et $j \leqslant m_i-m_i', 1 \leqslant i \leqslant n-2.$

B. <u>Etude de</u> $P_{n-1}(\mathbb{C})$

L'espace projectif complexe $P_{n-1}(\mathbb{C})$ est, en tant que variété différentielle, isomorphe au quotient de $SU(n,\mathbb{C})$ par $S(U_1 \times U_{n-1},\mathbb{C})$ sous-groupe de $SU(n,\mathbb{C})$ des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\det N} & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \quad N \in U(n-1,\mathbb{C}).$$

L'algèbre de Lie de $S(U_1 \times U_{n-1},\mathbb{C})$, $s(u_1 \times u_{n-1},\mathbb{C})$,a pour complexifiée :

$$\mathcal{H}_{\mathbb{C}} = s(u_1 \times u_{n-1},\mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = s\ell(n-1,\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}(\sum_{i=1}^{n-1} e_{ii} - (n-1)\, e_{nn}).$$

Notons que le centre de l'algèbre de Lie $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ est $\mathbb{C}(\sum_{i=1}^{n-1} e_{ii} - (n-1)\, e_{nn}).$

On a :

$$s\ell(n,\mathbb{C}) = \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{p}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{p}_{\mathbb{C}} \oplus \{\sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{C}\, e_{jn} + \sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{C}\, e_{nj}\}.$$

où $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ est le $\mathbb{C}$-espace vectoriel engendré par $\{e_{j,n}\} \cup \{e_{n,j}\}$, $1 \leqslant j \leqslant n-1$.

On a $\mathcal{K}_{\mathbb{C}} = s\ell(n-1,\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}(e_{11}+\ldots+ e_{n-1,n-1}-(n-1)\, e_{nn})$. La représentation adjointe de $\mathcal{K}_{\mathbb{C}}$ sur $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ est définie par :

$$g \longrightarrow \mathrm{Ad}g \qquad \mathrm{Ad}g(h) = gh - hg = [g,h] \;;$$

d'où ici :

$$[e_{k\ell} \,,\, e_{jn}] = \delta_j^{\ell}\, e_{k,n} \,.$$

$$[e_{k\ell} \,,\, e_{nj}] = \delta_j^{k}\, e_{n,\ell}.$$

$$[\sum_{i=1}^{n-2} \lambda_i(e_{ii} - e_{i+1,i+1}),\, e_{jn}] = \ell_j \,(\sum_{i=1}^{n-2} \lambda_i(e_{ii} - e_{i+1,i+1}))\, e_{jn}.$$

$$[\sum_{i=1}^{n-2} \lambda_i(e_{ii} - e_{i+1,i+1}),\, e_{nj}] = -\, \ell_j \,(\sum_{i=1}^{n-2} \lambda_i(e_{ii} - e_{i+1,i+1}))\, e_{nj}.$$

$$[\sum_{i=1}^{n-1} e_{ii} - (n-1)\, e_{nn} \,,\, e_{jn}] = n\, e_{jn}.$$

$$[\sum_{i=1}^{n-1} e_{ii} - (n-1)\, e_{nn} \,,\, e_{nj}] = -\, n\, e_{nj}.$$

On voit que $s\ell(n-1,\mathbb{C})$ agit sur $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ en une représentation somme directe de deux représentations irréductibles :

. $\bar{\mu}_1$ sur $V_1 = \bigoplus_{1\leqslant j\leqslant n-1} \mathbb{C}\, e_{j,n}$ de poids dominant ℓ_1 (les autres poids sont ℓ_i, $2 \leqslant i \leqslant n-1$).

. $\bar{\mu}_2$ sur $V_2 = \bigoplus_{1\leqslant j\leqslant n-1} \mathbb{C}\, e_{n,j}$ de poids dominant $\ell_1+\ldots+ \ell_{n-2}$ (les autres poids sont $-\ell_i = \ell_1+\ldots+ \ell_{i-1} + \ell_{i+1}+\ldots+ \ell_{n-1}$, $1 \leqslant i \leqslant n-2$).

On voit que $\mathbb{C}(e_{11}+\ldots+ e_{n-1,n-1}-(n-1)\, e_{nn})$ agit sur V_1 par la multiplication par n et sur V_2 par la multiplication par $-n$. De plus $\bar{\mu}_1^{\star}$ est égale à $\bar{\mu}_2$. On a donc $\bar{\lambda}_o^{\star} = \bar{\lambda}_o$.

<u>PROPOSITION II.5</u> : <u>Si</u> $V_1 = \sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{C}\, e_{jn}$ <u>et</u> $V_2 = \sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{C}\, e_{nj}$; <u>la représentation</u> $\bar{\lambda}_o^{\star}$ <u>de</u> $\mathcal{K}_{\mathbb{C}}$ <u>sur</u> $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ <u>se décompose en somme directe de deux représentations</u> $\bar{\mu}_1$ et $\bar{\mu}_2$ <u>qui sont les suivantes</u> :

. $sl(n-1,\mathbb{C})$ agit sur V_1 comme la représentation irréductible de poids dominant ℓ_1 et sur V_2 comme la représentation irréductible de poids dominant $\ell_1+\ldots+\ell_{n-2}$.

.$(e_{11}+\ldots+e_{n-1,n-1}-(n-1)\,e_{nn})$ agit sur V_1 comme n Id et sur V_2 comme $-n$ Id.

C. Spectre de $\Delta_{SU(u)}$.

En utilisant les résultats du théorème I.8 ; nous sommes amenés à rechercher les représentations irréductibles $\bar{\rho}$ de $su(n,\mathbb{C})$ telles que $\bar{\rho}|s(u(1)\times u(n-1))$ contient l'une des $\bar{\mu}_i$. Or l'algèbre de Lie $s\ell(n,\mathbb{C})$ est la complexifiée de $su(n,\mathbb{C})$. Dans ce cas, il y a bijection entre les représentations de $s\ell(n,\mathbb{C})$ dans un espace vectoriel complexe et les représentations de $su(n,\mathbb{C})$ dans ce même espace vectoriel considéré comme espace vectoriel réel (voir [9], VIII 9). Il nous suffit donc de rechercher les représentations $\bar{\rho}$ de $s\ell(n,\mathbb{C})$ qui contiennent l'une des $\bar{\mu}_i$.

PROPOSITION II.6. Une représentation irréductible $\bar{\rho}$ de $s\ell(n,\mathbb{C})$, $n \geqslant 3$, contient $\bar{\mu}_1$ lorsqu'on la restreint à $s\ell(n-1,\mathbb{C})$ et contient n Id lorsqu'on la restreint à $e_{11}+\ldots+e_{n-1,n-1}-(n-1)\,e_{nn}$ si et seulement si son poids dominant est de la forme

. $k\,n\,\ell_1 \qquad k\in\mathbb{N}^\star$

. $k\,n\,\ell_1-\ell_1+\ell_2 \qquad k\in\mathbb{N}^\star$.

Dans le premier cas la multiplicité de $\bar{\rho}$ dans $\mathrm{Ind}{\uparrow}_G^H(\mu_1)$ est kn et la dimension de l'espace de la représentation de $\bar{\rho}$ **est** $\binom{(1+k)n-1}{n-1}$; dans le deuxième cas la multiplicité de $\bar{\rho}$ est 2 et sa dimension est : $(1+kn)\binom{(k+1)n-2}{n-2}$.

Preuve : La représentation irréductible ρ de $s\ell(n,\mathbb{C})$ contient la représentation μ_1 lorsqu'on la restreint à $s\ell(n-1,\mathbb{C})$; elle a un poids dominant de la forme

$$a\,\ell_1$$

$$a\,\ell_1 + \ell_2$$

(d'après la proposition II.4) ; $e_{11}+\ldots+e_{n-1,n-1}-(n-1)\,e_{n,n}$ est un élément de l'algèbre abélienne maximale de $\mathcal{G}$ définie au II.A. ; $e_{11}+\ldots+e_{n-1,n-1}-(n-1)e_{nn}$ agit donc dans chaque sous-espace de poids par une constante.

Les poids de la représentation irréductible de $s\ell(n,\mathbb{C})$ de poids dominant $a\,\ell_1$ sont de la forme :

$$a\,\ell_1 - k_1(\ell_1-\ell_2) - \ldots - k_{n-1}(\ell_{n-1}-\ell_n),\ (k_1,\ldots,k_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1}$$

$$(a\,\ell_1 - k_1(\ell_1-\ell_2)-\ldots-k_{n-1}(\ell_{n-1}-\ell_n))(e_{11}+\ldots+e_{n-1,n-1}-(n-1)\,e_{nn})$$

$$= a - k_{n-1} - k_{n-1}\ (n-1) = a - k_{n-1}\,n\,.$$

Si $a - k_{n-1}\,n = n$, alors $a = (k_{n-1}+1)\,n$ d'où $a \equiv 0[n]$.

Si $a = bn$ avec $b \in \mathbb{N}^\star$, on sait que $a\,\ell_1 - k(\ell_1-\ell_2)$ est un poids de ρ de multiplicté 1 pour :

$$0 \leqslant k \leqslant \langle a\,\ell_1,\ell_1-\ell_2\rangle = 2\,\frac{(a\,\ell_1,\ell_1-\ell_2)}{(\ell_1-\ell_2,\ell_1-\ell_2)} = a \quad \text{(voir [4] page 119).}$$

Donc $bn\,\ell_1 - (b-1)\ (\ell_1-\ell_2)$ est de multiplicité 1. Il en est de même de

$$\sigma_{(2,n)}\ (bn\,\ell_1-(b-1)(\ell_1-\ell_2)) = bn\,\ell_1-(b-1)(\ell_1-\ell_n) \quad \text{où } \sigma_{(2,n)}$$

est l'élément de ω qui permute ℓ_2 et ℓ_n.

On a alors

$$(bn\,\ell_1 - (b-1)(\ell_1-\ell_n))\ (e_{11}+\ldots+e_{n-1,n-1} - (n-1)\ e_{nn})$$

$$= bn - (b-1) - (b-1)\ (n-1) = bn - (b-1)\ n = n \quad \text{donc} \quad a \equiv 0[n].$$

De même les poids de la représentation de $s\ell(n,\mathbb{C})$ de poids dominant $a\,\ell_1 + \ell_2$ sont de la forme

$a\,\ell_1 + \ell_2 - k_1(\ell_1 - \ell_2) - \ldots - k_{n-1}(\ell_{n-1} - \ell_n)$ avec $(k_1,\ldots,k_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1}$.

$(a\,\ell_1 + \ell_2 - k_1(\ell_1 - \ell_2) - \ldots - k_{n-1}(\ell_{n-1} - \ell_n))(e_{11} + \ldots + e_{n-1,n-1} - (n-1)e_{nn})$

$= a + 1 - k_{n-1}\, n = n$

d'où $a \equiv -1\ [n]$. Si $a \equiv -1\ [n]$, c'est-à-dire si $a = bn-1$ avec $b \in \mathbb{N}^\star$, $a \geqslant 1$, $a\,\ell_1 + \ell_2 - k(\ell_1 - \ell_2)$ est un poids de cette représentation de multiplicité 1 pour $0 \leqslant k \leqslant \langle a\,\ell_1 + \ell_2, \ell_1 - \ell_2\rangle = a-1$ donc $a\,\ell_1 + \ell_2 - b'(\ell_1 - \ell_2)$ est poids de multiplicité 1. Il en est de même de

$$\sigma_{(2,n)}(a\,\ell_1 + \ell_2 - b'(\ell_1 - \ell_2)) = a\,\ell_1 + \ell_2 - b(\ell_1 - \ell_2)$$

$$(a\,\ell_1 + \ell_n - b'(\ell_1 - \ell_n))(e_{11} + \ldots + e_{n-1,n-1} - (n-1)e_{nn})$$

$$= a - (n-1) - b' - b'(n-1) = a - (n-1) - bn$$

$$= bn - 1 - n + 1 - b'n = (b - b' - 1)\, n\ ;$$

pour $b' = b+2$ on a le résultat.

La multiplicité de $\bar{\rho}$ dans $\mathrm{Ind}\uparrow_G^H(\mu_i)$ est égale à la multiplicité de $\bar{\mu}_i$ dans $\bar{\rho}_{|\mathcal{H}_{\mathbb{C}}}$ c'est-à-dire, d'après la proposition II.4, a :

. kn pour $\bar{\rho}$ de poids dominant $kn\,\ell_1$

. 1 pour $\bar{\rho}$ de poids dominant $kn\,\ell_1 - \ell_1 + \ell_2$.

Calculons la dimension de la représentation de $s\ell(n,\mathbb{C})$ de poids dominant $kn\,\ell_1$ en utilisant une formule de Weyl (voir [4] page 139) : la dimension de la représentation de poids dominant Λ est :

$$\frac{\prod_{\alpha > 0} (\Lambda + \delta, \alpha)}{\prod_{\alpha > 0} (\delta, \alpha)}$$

où α est une racine et où δ est la demi-somme des racines positives.

Or pour $s\ell(n,\mathbb{C})$ les racines positives sont :

$$\{\ell_i - \ell_j\ ,\ 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$$

et δ vaut : $\delta = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} (n-2i+1)\,\ell_i$. Donc :

$$\frac{\prod\limits_{\alpha>0}(kn\,\ell_1+\delta,\alpha)}{\prod\limits_{\alpha>0}(\delta,\alpha)} = \prod_{1<j\leqslant n}\frac{(kn\,\ell_1+\delta,\ \ell_1-\ell_j)}{(\delta,\ell_1-\ell_j)}$$

$$= \prod_{1<j\leqslant n}\frac{(kn\,\ell_1+\delta)(e_{11}-e_{jj})}{\delta(e_{11}-e_{jj})} = \prod_{1<j\leqslant n}\frac{kn+\frac{1}{2}(n-1)-\frac{1}{2}(n-2j+1)}{\frac{1}{2}(n-1)-\frac{1}{2}(n-2j+1)}$$

$$= \prod_{1<j\leqslant n}\frac{kn+j-1}{j-1} = \prod_{1\leqslant j\leqslant n-1}\frac{kn+j}{j} = \frac{(kn+n-1)}{(n-1)!(kn)!}$$

$$= \binom{(k+1)n-1}{n-1}$$

$$\prod_{\alpha>0}\frac{(kn\,\ell_1-\ell_1+\ell_2+\delta,\alpha)}{(\delta,\alpha)} = \prod_{1<j\leqslant n}\frac{(kn\,\ell_1-\ell_1+\ell_2+\delta,\ \ell_1-\ell_j)}{(\delta,\ell_1-\ell_j)}$$

$$\prod_{2<i\leqslant n}\frac{(kn\,\ell_1-\ell_1+\ell_2+\delta,\ell_2-\ell_i)}{(\delta,\ell_2-\ell_i)}$$

$$= \prod_{2<j\leqslant n}\frac{kn-1+\frac{1}{2}(n-1)-\frac{1}{2}(n-2j+1)}{\frac{1}{2}(n-1)-\frac{1}{2}(n-2j+1)} \times \frac{kn-1+1+\frac{1}{2}(n-1)-\frac{1}{2}(n-3)}{\frac{1}{2}(n-1)-\frac{1}{2}(n-3)}$$

$$\times \prod_{2<i\leqslant n}\frac{1+\frac{1}{2}(n-3)-\frac{1}{2}(n-2i+1)}{\frac{1}{2}(n-3)-\frac{1}{2}(n-2i+1)} = \prod_{2<j\leqslant n}\frac{kn+j-2}{j-1}\prod_{2<i\leqslant n}\frac{i-1}{i-2}\ \frac{kn+1}{+1}$$

$$= \binom{(k+1)n-2}{n-2}(kn+1)$$

PROPOSITION II.7. : Une représentation $\bar{\rho}$ de $s\ell(n,\mathbb{C})\,(n \geqslant 3)$ contient $\bar{\mu}_2$ lorsqu'on la restreint à $\mathcal{K}_{\mathbb{C}}$ si et seulement si son poids dominant est de la forme :
$(bn+3)\ \ell_1 + \ell_2 +\ldots+ \ell_{n-2}$ avec $b \in \mathbb{N}$ (respectivement
$(bn+2)\ \ell_1 + \ell_2 +\ldots+ \ell_{n-1}$ avec $b \in \mathbb{N}$.)
Dans les deux cas la multiplicité de $\bar{\rho}$ dans $\mathscr{C}^{\mu_2}(G,V_2)$ est 1 et sa dimension respective est :

$$\frac{1}{2}(bn+n+1)(bn+n+2)\binom{bn+n-1}{n-3}\ \ (\text{resp}\ \ (n(b+1)+1)\binom{n(b+1)-1}{n-2})).$$

<u>Preuve</u> : La représentation irréductible ρ de $s\ell(n,\mathbb{C})$ contient μ_2 lorqu'on la restreint à $s\ell(n-1,\mathbb{C})$ si et seulement si son poids dominant est de la forme

$$. \ a\,\ell_1 + \ell_2 + \ldots + \ell_{n-2} \qquad a \in \mathbb{N}^\star$$

$$. \ a\,\ell_1 + \ell_2 + \ldots + \ell_{n-1} \qquad a \in \mathbb{N}^\star .$$

Les poids de la représentation irréductible ρ de $s\ell(n,\mathbb{C})$, de poids dominant $a\,\ell_1 + \ell_2 + \ldots + \ell_{n-2}$, sont de la forme :

$a\,\ell_1 + \ldots + \ell_{n-2} - k_1(\ell_1 - \ell_2) - \ldots - k_{n-1}(\ell_{n-1} - \ell_n)$ où $(k_1, \ldots, k_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1}$.

On a :

$$(a\ell_1 + \ell_2 + \ldots + \ell_{n-2} - k_1(\ell_1 - \ell_2) - \ldots - k_{n-1}(\ell_{n-1} - \ell_n))(e_{11} + \ldots + e_{n-1,n-1} - (n-1)e_{nn})$$

$$= a + (n-3) - n\,k_n$$

Si $a + (n-3) - n\,k_n = n$ alors $a \equiv 3[n]$. Réciproquement, si $a \equiv 3\ [n]$ c'est-à-dire si $a = bn + 3$ avec $b \in N$, alors $a\,\ell_1 + \ell_1 + \ldots + \ell_{n-2} - k(\ell_1 - \ell_2)$ est un poids de la représentation de multiplicité 1 pour

$$0 \leqslant k \leqslant \langle a\,\ell_1 + \ell_2 + \ldots + \ell_{n-2}, \ell_1 - \ell_2\rangle = 2\,\frac{(a\ell_1 + \ell_2 + \ldots + \ell_{n-2}, \ell_1 - \ell_2)}{(\ell_1 - \ell_2, \ell_1 - \ell_2)} = a-1$$

Il en est de même du poids

$$\sigma_{(2,n)}(a\ell_1 + \ell_2 + \ldots + \ell_{n-2} - k(\ell_1 - \ell_2)) = a\ell_1 + \ell_n + \ell_3 + \ldots + \ell_{n-2} - k(\ell_1 - \ell_n)$$

pour k compris entre 0 et a.

$$(a\ell_1 + \ell_n + \ell_3 + \ldots + \ell_{n-2} - (b+1)(\ell_1 - \ell_n))(e_{11} + e_{22} + \ldots + e_{n-1,n-1} - (n-1)e_{nn})$$

$$= a-(n-1) + n-4-n(b+1) = a-3-nb-n = -n.$$

et on a bien $0 \leqslant b+1 \leqslant bn+2$ pour $b \in \mathbb{N}^\star$ $(n \geqslant 1)$.

Les poids de la représentation irréductible ρ de $s\ell(n,\mathbb{C})$ de poids dominant $a\ell_1 + \ell_2 + \ldots + \ell_{n-1}$ sont de la forme

$$a\ell_1 + \ell_2 + \ldots + \ell_{n-1} - k_1(\ell_1 - \ell_2) - \ldots - k_{n-1}(\ell_{n-1} - \ell_n)$$

avec $(k_1, \ldots, k_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1}$.

$(a\ell_1 + \ell_2 + \ldots + \ell_{n-1} - k_1(\ell_1 - \ell_2) - \ldots - k_{n-1}(\ell_{n-1} - \ell_n))(e_{11} + \ldots + e_{n-1,n-1} - (n-1)e_{nn})$

$= a+n-2-k_{n-1}\, n$

Si $a+n-2-k_{n-1} = -n$ alors $a \equiv 2\ [n]$. Réciproquement, si $a = bn+2$ avec $b \in \mathbb{N}$, $a\ell_1 + \ell_2 + \ldots + \ell_{n-1} - k(\ell_1 - \ell_2)$ est un poids de la représentation ρ de multiplicité 1 pour

$$0 \leqslant k \leqslant \langle a\,\ell_1 + \ell_2 + \ldots\ \ell_{n-1},\ \ell_1 - \ell_2\rangle = a-1.$$

Il en est de même du poids

$$a\,\ell_1 + \ell_n + \ell_3 + \ldots + \ell_{n-1} - k(\ell_1 - \ell_n) \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant k \leqslant a-1.$$

Or

$(a\,\ell_1 + \ell_n + \ell_3 + \ldots + \ell_{n-1} - (b+1)(\ell_1 - \ell_n))(e_{11} + \ldots + e_{n-1,n-1} - (n-1)e_{nn})$

$= a - (n-1) + (n-3) - n(b+1)$

$= bn - n(b+1) = -n$ et $0 \leqslant b+1 \leqslant bn+1$ pour $b \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$.

La multiplicité de $\bar{\rho}$ dans $\mathcal{C}^{\mu_2}(G,V_2)$ est égale à la multiplicité de $\bar{\mu}_2$ dans $\bar{\rho}_{|\mathcal{K}_{\mathbb{C}}}$. Ici, dans les deux cas elle vaut 1 (voir proposition II.4).

Calculons les dimensions des représentations de $s\ell(n,\mathbb{C})$ de poids dominants $(bn+3)\,\ell_1 + \ldots + \ell_{n-2}$ et $(bn+2)\,\ell_1 + \ldots + \ell_n$ en utilisant la formule de Weyl.

$$\prod_{\alpha>0} \frac{((bn+3)\,\ell_1 + \ldots + \ell_{n-2} + \delta,\alpha)}{(\delta,\alpha)}$$

$$= \prod_{1<j\leqslant n-2} \frac{((bn+3)\,\ell_1 + \ldots + \ell_{n-2} + \delta,\ \ell_1 - \ell_j)}{(\delta,\ \ell_1 - \ell_j)} \prod_{2\leqslant i<j\leqslant n-1} \frac{((bn+3)\ell_1 + \ldots + \ell_{n-2} + \delta, \ell_i)}{(\delta,\ \ell_i - \ell_j)}$$

$$= \prod_{1<j\leqslant n-2} \frac{bn+3-1 + \frac{1}{2}(n-1) - \frac{1}{2}(n-2j+1)}{j-1} \times \frac{bn+3+n-2}{n-2} \times \frac{bn+3+n-1}{n-1}$$

$$\prod_{2\leqslant i<j\leqslant n-2} 1 \prod_{n-2\leqslant i<j\leqslant n} 1 \prod_{2\leqslant i\leqslant n-2<j\leqslant n} \frac{1 + \frac{1}{2}(n-2i+1) - \frac{1}{2}(n-2j+1)}{j-1}$$

$$= \prod_{1<j\leqslant n-2} \frac{bn+1+j}{j-1} \times \frac{[(1+b)n+1]\,[(1+b)n+2]}{(n-2)(n-1)} \times \prod_{2\leqslant i\leqslant n-2<j\leqslant n} \frac{1+j-i}{j-i}$$

$$= \frac{[bn+2+(n-3)]!}{(bn+2)!(n-3)!} \; \frac{(n(1+b)+1)\;(n(1+b)+2)}{(n-2)(n-1)} \times \prod_{2\leqslant i\leqslant n-2} \frac{(n-i+1)}{(n-i-1)}$$

$$= \frac{[bn+2+(n-3)]!}{(bn+2)!(n-1)!} \;((b+1)n+1)\;((b+1)n+2)\;\frac{(n-1)!}{2(n-3)!}$$

$$= \frac{[bn+2+(n-3)]!\;((b+1)n+1)\;((b+1)n+2)}{2(bn+2)!(n-3)!}$$

$$= \binom{bn+n-1}{n-3} \frac{(bn+n+1)\;(bn+n+2)}{2}$$

$$\prod_{\alpha>o} \frac{((bn+2)\;\ell_1+\ldots+\;\ell_{n-1}\;+\delta,\alpha)}{(\delta,\alpha)} = \prod_{1<j\leqslant n} \frac{((bn+2)\;\ell_1+\ldots+\;\ell_{n-1}+\delta,\ell_1-\ell_j)}{(\delta,\ell_1-\ell_j)}$$

$$\prod_{1<i\leqslant n-1} \frac{((bn+2)\;\ell_1+\ldots+\;\ell_{n-1}+\delta,\;\ell_i-\ell_n)}{(\delta,\ell_i-\ell_n)} = \prod_{1<j\leqslant n-1} \frac{bn+j}{j-1} \prod_{1<i<n} \frac{n-i+1}{n-i}$$

$$\times \frac{bn+2+n-1}{n-1} = \frac{(bn+2)\ldots(bn+n-1)}{(n-2)!}\;(n-1) \times \frac{n(b+1)+1}{n-1}$$

$$= \frac{[n(b+1)+1]!}{(n-2)!\;(bn+1)!\;n(b+1)} = \binom{n(b+1)-1}{n-2}\;(n(b+1)+1)$$

Pour obtenir le spectre de $\Delta_{\underset{\cdot}{s}u(n)}$ sur les formes de degré 1 il suffit de calculer

$$\|\Lambda_\rho + \delta\|^2_{SL(n)} - \|\delta\|^2_{SL(n)}$$

$$\|\Lambda_{\mu_i} + \delta'\|^2_{SL(n-1)} - \|\delta'\|^2_{SL(n)} \quad 1 \leqslant i \leqslant 2$$

où δ (resp δ') est la demi-somme des racines positives de $SL(n,\mathbb{C})$ (resp $SL(n-1,\mathbb{C})$) :

$$\delta = \frac{1}{2}\sum_{i-1}^{n} (n-2i+1)\;\ell_i,\; \delta' = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} (n-2i)\;\ell_i\;.$$

$$\|\Lambda_{\mu_1} + \delta'\|^2_{SL(n-1} - \|\delta'\|^2_{SL(n-1)}$$

$$= \|\ell_1 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} (n-2i)\;\ell_i\|^2_{SL(n-1)} - \|\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} (n-2i)\;\ell_i\|^2_{SL(n-1)}$$

$$= \|(1 + \tfrac{1}{2}(n-2))\,\ell_1 + \tfrac{1}{2}\sum_{i=2}^{n-1}(n-2i)\,\ell_i\|^2_{SL(n-1)} - \|\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}(n-2i)\,\ell_i\|^2_{SL(n-1)}$$

$$= \frac{1}{2(n-1)}\Big[(1 + \tfrac{1}{2}(n-2) - \tfrac{1}{n-1})^2 + \sum_{i=2}^{n-1}(\tfrac{1}{2}(n-2i) - \tfrac{1}{n-1})^2 - \sum_{i=1}^{n-1}(\tfrac{1}{2}(n-2i))^2\Big]$$

$$= \frac{1}{2(n-1)}\Big[(1 - \tfrac{1}{n-1})^2 + (n-2) + \sum_{i=1}^{n-1}(-(n-2i)\tfrac{1}{n-1}) + \sum_{i=1}^{n-2}\frac{1}{(n-1)^2}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1}(\tfrac{1}{2}(n-2i))^2 - \sum_{i=1}^{n-1}(\tfrac{1}{2}(n-2i))^2\Big]$$

$$= \frac{1}{2(n-1)}\Big[(\frac{n-2}{n-1})^2 + (n-2) + (n-2)\frac{1}{(n-1)^2}\Big]$$

$$= \frac{1}{2(n-1)}\Big[(n-2)\,(\frac{n-2}{(n-1)^2} + \frac{1}{(n-1)^2} + 1)\Big]$$

$$= \frac{n-2}{2(n-1)}\,(\frac{1}{n-1} + 1) = \frac{n(n-2)}{2(n-1)^2}$$

$$\|kn\,\ell_1 + \delta\|^2_{SL(n)} - \|\delta\|^2_{SL(n)}$$

$$= \|(kn + \tfrac{1}{2}(n-1))\,\ell_1 + \sum_{i=2}^{n}\tfrac{1}{2}(n-2i+1)\,\ell_i\|^2 - \|\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(n-2i+1)\,\ell_i\|^2$$

$$= \frac{1}{2n}\Big[(kn + \tfrac{1}{2}(n-1) - k)^2 + \sum_{i=2}^{n}(\tfrac{1}{2}(n-2i+1)-k)^2 - \sum_{i=1}^{n}(\tfrac{1}{2}(n-2i+1))^2\Big]$$

$$= \frac{1}{2n}\Big[(kn-k)^2 + kn(n-1) - \sum_{i=1}^{n}(n-2i+1)\,k + \sum_{i=2}^{n}k^2\Big]$$

$$= \frac{1}{2n}\big[k^2(n-1)^2 + kn(n-1) + (n-1)\,k^2\big]$$

$$= \frac{1}{2n}\big[k^2(n^2-n) + kn(n-1)\big]$$

$$= \frac{1}{2n}\big[k^2\,n(n-1) + kn(n-1)\big] = \frac{n-1}{2}\,(k^2 + k)$$

$$\|kn\,\ell_1 - \ell_1 + \ell_2 + \sum_{i=1}^{n}\tfrac{1}{2}(n-2i+1)\,\ell_i\|^2 - \|\sum_{i=1}^{n}\tfrac{1}{2}(n-2i+1)\,\ell_i\|^2$$

$$= \frac{1}{2n}\ [(kn-1-k + \frac{1}{2}\ (n-1))^2 + (1 + \frac{1}{2}\ (n-3)-k)^2 + \sum_{i=3}^{n} (\frac{1}{2}\ (n-2i+1) - k)^2$$

$$- \sum_{i=1}^{n} (\frac{1}{2}\ (n-2i+1))^2\ ]$$

$$= \frac{1}{2n}\ [(kn-1-k)^2 + (n-1)\ (kn-1) + (1-k)^2 + (n-3) - \sum_{i=1}^{n} (n-2i+1)\ k + (n-2)\ k^2\ ]$$

$$= \frac{1}{2n}\ [k^2\ \{(n-1)^2 + 1 + (n-2)\} + k(-\ 2(n-1) + n(n-1) - 2) + 1 - n + 1 + 1 + n - 3\ ]$$

$$= \frac{1}{2n}\ [k^2(n^2-n) + k(n^2 - 3n)\ ]$$

$$= \frac{1}{2n}\ [k^2\ n(n-1) + k(n-3)\ n] = \frac{1}{2}\ [k^2(n-1) + k(n-3)\ ]$$

$$\|\Lambda_{\mu_2} + \delta'\|^2_{SL(n-1)} - \|\delta'\|^2_{SL(n-1)}$$

$$= \|\ell_1 + \ldots + \ell_{n-2} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2}\ (n-2i)\ \ell_i\|^2 - \|\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2}\ (n-2i)\ \ell_i\|^2$$

$$= \frac{1}{2(n-1)} \left[\sum_{i=1}^{n-2} [1 + \frac{1}{2}\ (n-2i) - \frac{n-2}{n-1}]^2 + (\frac{1}{2}\ (-n+2) - \frac{n-2}{n-1})^2 - \sum_{i=1}^{n-1} (\frac{1}{2}\ (n-2i))^2\right]$$

$$= \frac{1}{2(n-1)} \left[\sum_{i=1}^{n-2} \{(1 - \frac{n-2}{n-1})^2 + (n-2i)\ (1 - \frac{n-2}{n-1})\} + (\frac{n-2}{n-1})^2 + (-n+2)\ (-\ \frac{n-2}{n-1})\right]$$

$$= \frac{1}{2(n-1)}\ [\ (n-2)\ (\frac{1}{n-1})^2 + (\frac{n-2}{n-1})^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (1 - \frac{n-2}{n-1})\ (n-2i) - (-n+2)]$$

$$= \frac{1}{2(n-1)}\ [\ (n-2)\ (\frac{1}{n-1})^2 + (\frac{n-2}{n-1})^2 + (n-2)]\ ]$$

$$= \frac{1}{2(n-1)}\ (n-2)\ [\frac{1+(n-2)+(n-1)^2}{(n-1)^2}] = \frac{n-2}{2(n-1)}\ [\frac{n}{(n-1)}] = \frac{n(n-2)}{2(n-1)^2}$$

$$\|(bn+3)\ \ell_1 + \ell_2 + \ldots + \ell_{n-2} + \delta\|^2_{SL(n)} - \|\delta\|^2_{SL(n)}$$

$$= \|(bn+3+ \frac{1}{2}\ (n-1))\ \ell_1 + \sum_{i=2}^{n-2} (1 + \frac{1}{2}\ (n-2i+1))\ \ell_i + \frac{1}{2}\ (-n+3)\ \ell_{n-1} + \frac{1}{2}\ (-n+1)\ \ell_n\|^2$$

$$- \| \sum_{i=1}^{n} (\tfrac{1}{2}(n-2i+1)\ \ell_i) \|^2$$

$$= \frac{1}{2n} [(bn + 3 + \tfrac{1}{2}(n-1) - (b+1))^2 + \sum_{i=2}^{n-2} (1 + \tfrac{1}{2}(n-2i+1) - (b+1))^2$$

$$+ (\tfrac{1}{2}(-n+3) - (b+1))^2 + (\tfrac{1}{2}(-n+1) - (b+1))^2 - \sum_{i=1}^{n} (\tfrac{1}{2}(n-2i+1))^2]$$

$$= \frac{1}{2n} [(bn+3- (b+1))^2 + (bn+2)\ (n-1) + (n-1)\ (1-(b+1)) + (\tfrac{1}{2}(n-1))^2$$

$$+ \sum_{i=2}^{n-2} (1-(b+1))^2 + \sum_{i=2}^{n-2} (\tfrac{1}{2}(n-2i+1))^2 + \sum_{i=2}^{n-2} (n-2i+1)\ (1-(b+1))$$

$$+ (\tfrac{1}{2}(-n+3))^2 + (b+1)^2 + [(-n+3)(-(b+1))] + (\tfrac{1}{2}(-n+1))^2 + (b+1)^2 + (-n+1)(-(b+1))$$

$$- \sum_{i=1}^{n} (\tfrac{1}{2}(n-2i+1))^2]$$

$$= \frac{1}{2n} [(bn+3-b-1)^2 + (bn+2)\ (n-1) + (n-3)\ b^2 + 2(b+1)^2 + (n-3) + (n-1)]$$

$$= \frac{1}{2n} [b^2(n-1)^2 + 4b(n-1) + 4 + bn(n-1) + 2(n-1) + (n-3)\ b^2 + 2b^2 + 4b + 2 + 2n -4]$$

$$= \frac{1}{2n} [b^2((n-1)^2 + (n-1)) + b(4(n-1) + n(n-1) + 4) + 4n]$$

$$= \frac{1}{2n} [n(n-1)\ b^2 + bn(n+3) + 4n]$$

$$\|(bn+2)\ \ell_1 + \ell_2 + \ldots + \ell_{n-1} + \delta\|^2_{SL(n)} - \|\delta\|^2_{SL(n)}$$

$$= \|(bn+2+\tfrac{1}{2}(n-1))\ \ell_1 + \sum_{i=2}^{n-1} (1+ \tfrac{1}{2}(n-2i+1))\ \ell_i + \tfrac{1}{2}(-n+1)\ \ell_n\|^2 - \| \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}(n-2i+1)\|^2$$

$$= \frac{1}{2n} [(bn+2+ \tfrac{1}{2}(n-1) - (b+1))^2 + \sum_{i=2}^{n-1} (1 + \tfrac{1}{2}(n-2i+1) - (b+1))^2 + (\tfrac{1}{2}(-n+1)-(b+1))^2$$

$$- \sum_{i=1}^{n} (\tfrac{1}{2}(n-2i+1))^2]$$

$$= \frac{1}{2n} [(bn+2-(b+1))^2 + (n-1)\ (bn+1) + (n-1)\ (1-(b+1)) + (\frac{1}{2}\ (n-1))^2$$

$$+ \sum_{i=2}^{n-1} [(1-(b+1))^2 + (n-2i+1)\ (1-(b+1))] + (\frac{1}{2}\ (-n+1))^2 + (b+1)^2 + (-n+1)\ (-b+1))$$

$$- \sum_{i=1}^{n} (\frac{1}{2}\ (n-2i+1)]^2.$$

$$= \frac{1}{2n} [(bn-b+1)^2 + (n-1)\ (bn+1) + (n-2)\ b^2 + (b+1)^2 + (n-1)]$$

$$= \frac{1}{2n} [b^2(n-1)^2 + 2b(n-1) + 1 + bn(n-1) + (n-1) + (n-1)\ b^2 + 2b+1+n-1]$$

$$= \frac{1}{2n} [b^2\ n(n-1) + bn(n+1) + 2n].$$

Il nous reste à calculer la contribution du centre de $\mathfrak{K}_{\mathbb{C}}$.

$$- B_{\mathcal{G}}(e_{11} +\dots e_{n-1,n-1} - (n-1)\ e_{nn}\ ,\ e_{11} +\dots+ e_{n-1,n-1} - (n-1)\ e_{nn})$$

$$= 2n\ (\sum_{i=1}^{n-1} 1 + (n-1)^2) = 2n\ [(n-1)^2 + (n-1)] = 2n^2\ (n-1)$$

$$\bar{\mu}_1\ [(\frac{1}{n\sqrt{2(n-1)}}\ (e_{11} +\dots+ e_{n-1,n-1} - (n-1)\ e_{nn}))^2]$$

$$= \frac{1}{2(n-1)n^2}\ n^2 = \frac{1}{2(n-1)} = \beta_1$$

$$\bar{\mu}_2\ [(\frac{1}{n\sqrt{2(n-1)}}\ (e_{11} +\dots+ e_{n-1,n-1} - (n-1)\ e_{nn})^2] = \frac{1}{2(n-1)} = \beta_2$$

<u>PROPOSITION II.8</u> : <u>Sur les formes de degré</u> 1 <u>le spectre de</u> $\Delta_{SU(n)}$ <u>est</u>

$$\{- \frac{n-1}{2}\ (k^2 + k) + \frac{1}{2}\ ;\ - \frac{n-1}{2}\ (k^2 + k) + k + \frac{1}{2}\ ;\ k \in \mathbb{N}^\star\}$$

$$\cup \{- \frac{n-1}{2}\ (k^2 - k) - 2k + \frac{1}{2}\ ;\ - \frac{n-1}{2}\ (k^2 - k) - k + \frac{1}{2}\ ;\ k \in \mathbb{N}^\star\}$$

<u>Preuve</u> : On a $\frac{1}{c} = \frac{n-1}{n}$, donc $\frac{1}{c}\ (\|\Delta_{\bar{\mu}_i} + \delta'\|^2 + \|\delta'\|^2) = \frac{n-2}{2(n-1)}$.

Posons $b = k-1$. Alors $k \in \mathbb{N}^\star$ et $\beta_1 = \beta_2 = \frac{1}{2(n-1)}$. Ce sont alors les calculs précédents appliqués au théorème I.8.

PROPOSITION II.9 : Les multiplicités des valeurs propres de $\Delta_{SU(n)}$ sont :

pour $-\frac{n-1}{2}(k^2+k)+\frac{1}{2}$: $\quad kn\binom{kn+n-1}{n-1}$

pour $-\frac{n-1}{2}(k^2+k)+k+\frac{1}{2}$: $\quad (kn+1)\binom{kn+n-2}{n-2}$

pour $-\frac{n-1}{2}(k^2-k)-2k+\frac{1}{2}$: $\quad \frac{1}{2}(kn+1)(kn+2)\binom{kn-1}{n-3}$

pour $-\frac{n-1}{2}(k^2-k)-k+\frac{1}{2}$: $\quad (kn+1)\binom{kn-1}{n-2}$

Preuve : La multiplicité d'une valeur propre α est égale au produit de la multiplicité de $\bar{\rho}$, représentation irréductible de $su(n,\mathbb{C})$ dans $\mathcal{C}^{\mu}(G,V_i)$ et de la dimension de l'espace vectoriel de la représentation $\bar{\rho}$.

Puisque $-\frac{n-1}{2}(k^2+k)+\frac{1}{2}$ est associée à la représentation de $s\ell(n,\mathbb{C})$ de poids dominant $k n\ell_1$, sa multiplicité est :

$$kn.\binom{kn+n-1}{n-1}.$$

De même la multiplicité de $-\frac{n-1}{2}(k^2+k)+k+\frac{1}{2}$ est : $1\times(1+kn)\binom{kn+n-2}{n-2}$.

La multiplicité de $-\frac{n-1}{2}(k^2-k)-2k+\frac{1}{2}$ est $\frac{1}{2}(kn+1)(kn+2)\binom{kn-1}{n-3}$

La multiplicité de $-\frac{n-1}{2}(k^2-k)-k+\frac{1}{2}$ est $(kn+1)\binom{kn-1}{n-2}$

III. Spectre du de Rham Hoge sur les formes de degré 1 du plan projectif complexe.

Les sections $\mathcal{C}^{\infty}$ du fibré vectoriel $\Lambda^s T(V)^*$ c'est-à-dire les formes de degré s sont en bijection avec $\mathcal{C}^{\mu}(G,F_1)$ où $F_1=\Lambda^s \mathfrak{p}^*_{\mathbb{C}}$. On a alors dans cet isomorphisme

$$f_{\square\pi} = -\Delta_G f_\pi + Jf_\pi. \text{ où } J \text{ appartient à } \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\Lambda^s \mathfrak{p}^*_{\mathbb{C}}).$$

Dans le cas où G est un groupe de Lie unimodulaire, H un sous-groupe compact, J est calculé en terme de représentations dans [6]. Si on identifie $F_1=\Lambda^s\mathfrak{p}^*_C$ à $\mathcal{L}_s(\mathfrak{p}_{\mathbb{C}},\mathbb{C})$, l'espace des applications s-linéaires antisymétriques, alors $B=JA$ est définie par

$$B(z_1,\dots,z_s)=\sigma(z_1,\dots,z_s)\left\{\sum_{i=1}^{q}[\mu([z_1,X_i])A](X_i,z_2,\dots,z_s)\right\}$$

où $z_1, \dots, z_s$ appartiennent à $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$, $X_1, \dots, X_n$ est une base orthonormale de $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ et où $\sigma(z_1 \dots z_s)$ désigne l'opérateur d'antisymétrisation relatif au s-uple $(z_1, \dots, z_s)$, et μ est la représentation $\lambda_o^{\star s}$. En particulier pour $s = 1$ on a :

$$B(z) = - \sum_{i=1}^{q} A([[z,X_i],X_i]).$$

Calculons J pour $s = 1$.

<u>PROPOSITION III.1</u> : $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ <u>a pour base orthonormale</u> :

$$\left\{ i\,\frac{e_{in} + e_{ni}}{2\sqrt{n}} \, , \left[\frac{e_{in} - e_{ni}}{2\sqrt{n}}\right] , \ 1 \leqslant i \leqslant n-1 \right\}$$

<u>Preuve</u> : On a :

$$- B\left(\frac{e_{in} + e_{ni}}{2}, \frac{e_{in} + e_{ni}}{2}\right) = - \frac{1}{4}\left[B(e_{ni}, e_{in}) + B(e_{in} + e_{ni})\right]$$

$$= - \frac{1}{2} B(e_{in}, e_{ni}) = \frac{-2(n)}{2} = -n$$

$$- B\left(\frac{e_{in} - e_{ni}}{2}, \frac{e_{in} - e_{ni}}{2}\right) = + \frac{2}{4} B(e_{in}, e_{ni}) = n$$

$$- B\left(\frac{e_{in} + e_{ni}}{2}, \frac{e_{jn} + e_{nj}}{2}\right) = 0 \qquad \text{si } i \neq j$$

$$- B\left(\frac{e_{in} + e_{ni}}{2}, \frac{e_{jn} - e_{nj}}{2}\right) = 0 \qquad \text{si } i \neq j$$

$$- B\left(\frac{e_{in} - e_{ni}}{2}, \frac{e_{jn} - e_{nj}}{2}\right) = 0 \qquad \text{si } i \neq j$$

<u>PROPOSITION III.2</u> : <u>Pour</u> $G = SU(n,\mathbb{C})$, $H = S(U(n-1) \times U(1))$ <u>on a</u> $J = \frac{1}{2}\,\mathrm{Id}$.

<u>Preuve</u> : Si A appartient à $\mathcal{L}(\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}, \mathbb{C})$, $C = JA$ est tel que

$C(z) = - \sum_{i=1}^{q} A([[z, X_i], X_i])$ avec $X_1, \dots, X_q$ base orthonormée de $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$.

donc $C(z) = - \sum_{i=1}^{n-1} A([[z, i \frac{e_{in} + e_{ni}}{2\sqrt{n}}] , i \frac{e_{in} + e_{ni}}{2\sqrt{n}}])$

$$- \sum_{j=1}^{n-1} A([[z, \frac{e_{jn} - e_{nj}}{2\sqrt{n}}] , \frac{e_{jn} - e_{nj}}{2\sqrt{n}}])$$

$$= \frac{1}{4n} \sum_{i=1}^{n-1} A([[z, e_{in} + e_{ni}] , e_{in} + e_{ni}]) - \frac{1}{4n} \sum_{j=1}^{n-1} A([[z,e_{jn}-e_{nj}] ,e_{jn}-e_{nj}]);$$

calculons $C(e_{kn})$ et $C(e_{nk})$.

$$C(e_{kn})\times 4(n) = + \sum_{i=1}^{n-1} A([[e_{kn},e_{in}+e_{ni}] ,e_{in}+ e_{ni}]) - \sum_{j=1}^{n-1} A([e_{kn}, e_{jn} - e_{nj}] ,[e_{jn}-e_{nj}])$$

$$= + \sum_{i=1}^{n-1} A([e_{ki} - \delta_i^k e_{nn}, e_{in} + e_{ni}]) - \sum_{j=1}^{n-1} A([- e_{kj} + \delta_j^k e_{nn}, e_{jn} - e_{nj}])$$

$$= + \sum_{i=1}^{n-1} A(e_{kn} - \delta_i^k e_{ni} + \delta_i^k e_{in} - \delta_i^k e_{ni}) - \sum_{j=1}^{n-1} A(- e_{kn} - \delta_j^k e_{nj} - \delta_j^k e_{jn} - \delta_j^k e_{nj})$$

$$= + A((n-1)e_{kn} - e_{nk} + e_{kn} - e_{nk}) - A(-(n-1) e_{kn} - e_{nk} - e_{kn} - e_{nk})$$

$$= - A(-(n-1) e_{kn} + e_{nk} - e_{kn} + e_{nk} + (n-1) e_{kn} - e_{nk} - e_{kn} - e_{nk})$$

$$= A(+ 2n e_{kn}) = (2n) A(e_{kn})$$

$$C(e_{nk})\times 4(n) = + \sum_{i=1}^{n-1} A([[e_{nk},e_{in}+ e_{ni}] , e_{in}+e_{ni}]) - \sum_{j=1}^{n-1} A([[e_{nk},e_{jn}- e_{nj}] ,e_{jn}-e_{nj}])$$

$$= + \sum_{i=1}^{n-1} A([\delta_i^k e_{nn} - e_{ik}, e_{in} + e_{ni}]) - \sum_{j=1}^{n-1} A([e_{nn} \delta_j^k - e_{jk}, e_{jn} - e_{nj}])$$

$$= + \sum_{i=1}^{n-1} A(\delta_i^k e_{ni} - \delta_i^k e_{in} - \delta_i^k e_{in} + e_{nk}) - \sum_{j=1}^{n-1} A(- \delta_j^k e_{nj} - \delta_j^k e_{jn} - \delta_j^k e_{jn} - e_{nk})$$

$$= + A(e_{nk} - e_{kn} - e_{kn} + (n-1) e_{nk}) - A(- e_{nk} - e_{kn} - e_{kn} -(n-1) e_{nk})$$

$$= - A(- e_{nk} + e_{kn} + e_{kn} - (n-1) e_{nk} - e_{nk} - e_{kn} - e_{kn} - (n-1) e_{nk})$$

$= - A(-2\, e_{nk} - 2(n-1)\, e_{nk}) = (+\, 2n)\, A(e_{nk})$

donc $C(e_{nk}) = + \frac{1}{2} A(e_{nk})$

THEOREME : Sur les formes de degré 1 du plan projectif complexe, le spectre du de Rham Hodge est :

$$\{\frac{n-1}{2}(k^2+k) \; ; \; \frac{n-1}{2}(k^2+k) - k \; ; \; \frac{n-1}{2}(k^2-k) + 2k \; ; \; \frac{n-1}{2}(k^2-k) + k, \; k \in \mathbb{N}^\star\}$$

et les multiplicités respectives de ces valeurs propres sont :

$$kn \binom{kn+n-1}{n-1} \; ; \; (kn+1)\binom{kn+n-2}{n-2} \; ; \; \frac{1}{2}(kn+1)(kn+2)\binom{kn-1}{n-3} \; ; \; (kn+1)\binom{kn-1}{n-2}.$$

Preuve : Soit π une forme propre associée à la valeur propre α. On a $f_{\square\pi} = \alpha f_\pi$ si et seulement si $\Delta_G(f_\pi) = -(\alpha - \frac{1}{2}) f_\pi$, c'est-à-dire si et seulement si $-\alpha + \frac{1}{2} \in$ Spectre Δ_G en utilisant la formule de Weitzenböck. La multiplicité de α, valeur propre de $\square$, est égale à la multiplicité de $-\alpha + \frac{1}{2}$, valeur propre de Δ_G.

=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOERNER (H.) :
Representation of groups. North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1963.

[2] HELGASON (S.) :
Differential Geometry and Symmetric Spaces Academic Press 1962.

[3] HÖRMANDER (L.) :
Hypoelliptic second order differential operator. Acta Mathematica, vol 119, 1967, p. 147-175.

[4] HUMPHREYS (J.E.) :
Introduction to Lie Algebras and Representation Theory. Springer Verlag. 1972.

[5] LEVY-BRUHL-LAPERRIERE (A.) :
Spectre du de Rham-Hodge sur les formes de degré 1 des sphères de $R^n (n \geq 6)$. Bulletin des Sciences Mathématiques, 2ème série, 99, 1975, p. 213-240.

[6] MALLIAVIN (M.P.) et MALLIAVIN (P.) :
Diagonalisation du système de de Rham-Hodge au-dessus d'un espace riemannien homogène. Lecture Notes in mathematics n° 466, 1975, p. 135-146. Springer Verlag.

[7] MAYER-LINDENBERG (F.) :
Das Spektrum des Laplace - Operators auf Kompakten Riemannschen Räumen-Diplomarbeit, Bonn 1972.

[8] PUKANSKY (L.) :
Leçons sur les représentations des groupes. Dunod, Paris 1967.

[9] SERRE (J.P.) :
Algèbres de Lie semi-simples complexes. Benjamin, New-York.

[10] SERRE (J.P.) :
Lie Algebras and Lie groups. Benjamin, New-York, 1965.

Manuscrit remis le 28 mars 1977

THE GLOBAL DIMENSION OF RINGS OF DIFFERENTIAL OPERATORS

J.C. McConnell

Introduction

Rings of differential operators arise naturally when one considers Lie algebras. In [10] it was shown that certain localisations of quotient algebras of the universal enveloping algebra of a solvable Lie algebra could be viewed as rings of differential operators in which the multiplication is altered by a 2-cocycle. Since we are as yet just unable to determine when distinct cocycles give non-isomorphic algebras, it is worthwhile to compute as many invariants of such an algebra as possible, one such being its global homological dimension. This has been done by McNaughton [13] (extending work of Björk [2]) for a class of cocycle twisted rings of differential operators which include those mentioned above. It is mainly these results of Björk and Mc Naughton which are expounded here. (See 3.11 and 3.12).

Throughout k is a field of characteristic zero which for clarity will also be assumed to be algebraically closed. By "algebra" and "Lie algebra" we mean respectively "an associative k-algebra with 1" and "a k-Lie algebra". $\otimes$ denotes $\otimes_k$.

1. Cocycle twisted rings of differential operators

Throughout let R be a commutative algebra and $\underset{\sim}{g}$ a Lie algebra with a given Lie algebra homomorphism $\theta : \underset{\sim}{g} \longrightarrow \mathrm{Der}(R)$ (the Lie algebra of k-algebra derivations of R). Let $Z^2(\underset{\sim}{g},R)$ denote as usual the abelian group of 2-cocycles of $\underset{\sim}{g}$ with coefficients in R , ([3] ch 13). For $\sigma \in Z^2(\underset{\sim}{g},R)$ let R have its usual associated Lie algebra structure and let $\underset{\sim}{h}$ be the Lie algebra $R \times_\sigma \underset{\sim}{g}$, the extension of R by $\underset{\sim}{g}$ corresponding to σ. Thus if $r_1, r_2 \in R$ and $x_1, x_2 \in \underset{\sim}{g}$ then in $\underset{\sim}{h}$,

$$[(r_1,x_1),(r_2,x_2)] = (r_1r_2 - r_2r_1 + (\theta x_1)\, r_2 - (\theta x_2)\, r_1 + \sigma(x_1,x_2),\ [x_1,x_2]) .$$

Let $U(\underset{\sim}{h})$ be the universal enveloping algebra of $\underset{\sim}{h}$.

B_σ or $R \#_\sigma U(\underset{\sim}{g})$, <u>the ring of formal differential operators twisted by</u> σ, is $U(\underset{\sim}{h})/I$, where I is the ideal of $U(\underset{\sim}{h})$ generated by the elements

$$\{1_U - 1_R\ ,\ r_1.r_2 - r_1r_2 \mid r_1, r_2 \in R\}$$

where $r_1.r_2$ denotes the product of r_1 and r_2 in U and r_1r_2 their product in R. The image of $U(R)$ in B_σ is isomorphic to R and one has a Poincaré-Birkhoff-Witt Theorem, viz that the standard manomials in (the images of) a basis of $\underset{\sim}{g}$ are a basis for B_σ as a free left (or right) R-module.

Thus B_σ may be viewed as follows. As a k-module B_σ is isomorphic to $R \otimes U(\underset{\sim}{g})$ with $R \otimes 1$ being a sub-algebra isomorphic to R. The multiplication in B_σ is given by : - for $x,y \in \underset{\sim}{g}$, $r \in R$

$$(1 \otimes x)\ (r \otimes 1) - (r \otimes 1)\ (1 \otimes x) = (\theta x)r \otimes 1$$

$$(1 \otimes x)\ (1 \otimes y) - (1 \otimes y)\ (1 \otimes x) = 1 \otimes [x,y] + \sigma(x,y) \otimes 1 .$$

Note that if $\sigma = 0$, then $1 \otimes U(\underset{\sim}{g})$ is a subalgebra of B_σ isomorphic to $U(\underset{\sim}{g})$.

In view of the PBW theorem we shall often abbreviate $R \#_\sigma U(\underset{\sim}{g})$ to $R_\sigma[\underset{\sim}{g}]$ and if $\sigma = 0$ to $R[\underset{\sim}{g}]$. Note that the definition still depends on the given homomorphism θ.

If $\theta = 0$ then $R[\underset{\sim}{g}]$ is just the universal enveloping algebra of the R-Lie algebra $R \otimes \underset{\sim}{g}$.

R is in a natural way an $R[\underset{\sim}{g}]$- module via the homomorphism, $\phi : R[\underset{\sim}{g}] \longrightarrow \mathrm{End}_k R$ given by : $r \in R$, $\phi(r)$ is left multiplication by r and for $x \in \underset{\sim}{g}$, $\phi(x)$ is the derivation $\theta(x)$. Thus the image of ϕ is precisely the subalgebra of $\mathrm{End}_k R$ generated by the left multiplications by the elements of R and the derivations in $\theta(\underset{\sim}{g})$. One should note that ϕ need not be injective. For example, let $R = k[y]$ and g be the two dimentional non-abelien Lie algebra spanned by $x_1 = \partial/\partial y$ and $x_2 = y\partial/\partial y$. So $[x_1,x_2] = x_1$. Then $Rx_1 + Rx_2 \subset R[\underset{\sim}{g}]$

is a free R-module of rank two while the R submodule of $\mathrm{End}_k R$ generated by x_1 and x_2 is Rx_1. (See also Theorem 2.4 part 3).

Examples - The Weyl algebra A_n is the algebra generated by 2n elements $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$ subject to $x_i y_j - y_j x_i = \delta_{ij} 1$. A_n is $R[\underset{\sim}{g}]$, where $R = k[y_1, \ldots, y_n]$ and $\underset{\sim}{g}$ is the (abelian) subalgebra of Der R spanned by $x_1 = \frac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, x_n = \frac{\partial}{\partial y_n}$. A_n can also be viewed as $R_\sigma[\underset{\sim}{g}]$, where $R = k$, $\underset{\sim}{g}$ is abelian with $\dim \underset{\sim}{g} = 2n$ and σ is any non singular alternating bilinear form on $\underset{\sim}{g}$. An example of an $R_\sigma[\underset{\sim}{g}]$ which cannot be regarded as an $R_1[\underset{\sim}{g}_1]$ is the following ([11] Ex 5.8). Let R be the commutative algebra $k[y_1, y_1^{-1}, y_2, y_2^{-1}]$ and $\underset{\sim}{g}$ be the abelian Lie algebra spanned by $x_1 = y_1 \frac{\partial}{\partial y_1}$ and $x_2 = y_2 \frac{\partial}{\partial y_2}$. Let $\sigma \in Z^2(\underset{\sim}{g}, k)$ with $\sigma(x_1, x_2) = 1$. Then $R_\sigma[\underset{\sim}{g}] = k[y_1, y_1^{-1}, y_2, y_2^{-1}, x_1, x_2]$ with the relations $[x_i, y_j] \equiv x_i y_j - y_j x_i = \delta_{ij} y_j$ and $[x_1, x_2] = 1$.

2. Basic results

Proposition 2.1 - If R is left noetherian and $\dim \underset{\sim}{g} < \infty$ then $R_\sigma[\underset{\sim}{g}]$ is left noetherian. If R is an integral domain then $R_\sigma[\underset{\sim}{g}]$ is a domain.

Proof. Same proof as for U(g), [8] ch V. ||

Proposition 2.2 - If R is commutative and σ, τ are cohomologous then $R_\sigma[\underset{\sim}{g}]$ is isomorphic to $R_\tau[\underset{\sim}{g}]$. In particular if σ is a coboundary then $R_\sigma[\underset{\sim}{g}] \simeq R[\underset{\sim}{g}]$.

Proof. [11] Thm. 3.1 ||

Corollary 2.3 - Let R be the commutative polynomial algebra $k[y_1, \ldots, y_n]$ or the commutative power series algebra $k[[y_1, \ldots, y_n]]$, $\underset{\sim}{g}$ be $k\frac{\partial}{\partial y_1} + \ldots + k\frac{\partial}{\partial y_n}$ and $\sigma \in Z^2(\underset{\sim}{g}, R)$. Then $R_\sigma[\underset{\sim}{g}] \simeq R[\underset{\sim}{g}]$, (which is the Weyl algebra A_n if R is $k[y_1, \ldots, y_n]$).

Proof. That σ is a coboundary is an algebraic version of the Poincaré Lemma. (cf. [11] p. 164 Remark). ||

Theorem 2.4 - Let R be commutative

1. $R[\underset{\sim}{g}]$ is a simple algebra if and only if R is a simple faithful $R[\underset{\sim}{g}]$-module.

2. R is a simple $R[\underset{\sim}{g}]$-module if and only if no proper ideals of R are stable under $\underset{\sim}{g}$.

3. R is a faithful $R[\underset{\sim}{g}]$-module if and only if the subspace $R\underset{\sim}{g}$ of $R[\underset{\sim}{g}]$ acts faithfully on R.

4. Let $\sigma \in Z^2(\underset{\sim}{g},R)$. If $R[\underset{\sim}{g}]$ is a simple algebra then $R_\sigma[\underset{\sim}{g}]$ is a simple algebra.

Proof. 1/ [9] Theorem 1.5 2/ Obvious 3/[9] Thm 1.8 4/ [9] Thm 1.5 ||

3. Global dimension questions

The global dimension of rings of differential operators has been considered in [1,2,4,5,6,7,14,15].

(The difficulties that arise when the coefficient ring R is allowed to be non commutative is well illustrated by the following result of R. Hart [7].

Theorem 3.1 - Let D be a division ring, $R = D[y]$ and $\underset{\sim}{g} = k\frac{\partial}{\partial y}$. Then $R[\underset{\sim}{g}]$ ($= D \otimes A_1$) has global dimension 1 if no non zero $R[\underset{\sim}{g}]$-module has finite dimension over D and has global dimension 2 otherwise).

ASSUMPTION. For the remainder of this paper we impose the additional condition that R be a (commutative) noetherian domain of finite global dimension such that R/M is k for each maximal ideal M of R.

Lemma 3.2 - Let S be a subring of a ring B with $\ell.g\ell.\dim. S < \infty$ and B_S faithfully flat.
If either (i) S is ℓ.noetherian and ${}_SB$ is flat
or (ii) ${}_SB$ is projective
then $\ell.g\ell.\dim. S \leq \ell.g\ell.\dim. B$.

See [12] for historical remarks on this lemma.

Proof of (ii) - Suppose $\ell.g\ell.\dim. S = n$ and ${}_SM$ satisfies $g\ell.\dim.{}_SM = n$. Consider the exact sequence

$$0 \longrightarrow {}_SM \longrightarrow {}_SB \otimes {}_SM \longrightarrow \text{Coker} \longrightarrow 0 .$$

$pd_S C \leq n$ so $pd_S B\otimes M = n$ and, hence $pd_B B\otimes M \geq n$ since ${}_S B$ is projective.

The proof of (i) is similar using flats instead of projectives. ‖

If $\sigma \in Z^2(R,g)$ then $R_\sigma[\underset{\sim}{g}]$ is a filtered algebra such that the associated graded algebra is a commutative polynomial algebra over R .

Theorem 3.3 - Let R be a (commutative noetherian) ring of finite global dimension, $\underset{\sim}{g}$ be a Lie algebra with $\dim_k \underset{\sim}{g} < \infty$ and $\sigma \in Z^2(\underset{\sim}{g},R)$. Then $g\ell.\dim. R \leq \ell.g\ell.\dim. R_\sigma [\underset{\sim}{g}] \leq g\ell.\dim. R + \dim_k \underset{\sim}{g}$.

Proof. For the left hand inequality use 3.2 and for the right hand inequality use the immediately preceding remark and [16]. ‖

Following Björk we relate the $g\ell.\dim.$ of $R_\sigma [\underset{\sim}{g}]$ to the $g\ell.\dim.$ of certain localisations of $R_\sigma[\underset{\sim}{g}]$. Let S be a multiplicatively closed subset of R and consider the localisation R_S . Each derivation of R may be extended uniquely to a derivation of R_S and since $R \hookrightarrow R_S$, if $\sigma \in Z^2(\underset{\sim}{g},R)$ then we may regard σ as an element of $Z^2(\underset{\sim}{g},R_S)$. Thus $(R_S)_\sigma[\underset{\sim}{g}]$ is defined and it is easily seen that this is a partial quotient ring of $R_\sigma[\underset{\sim}{g}]$ and hence $\ell.g\ell.\dim.(R_S)_\sigma[\underset{\sim}{g}] \leq \ell.g\ell.\dim.R_\sigma[\underset{\sim}{g}]$ (cf [2] lemma 2.b.2).

Theorem 3.4 - If $\dim \underset{\sim}{g} < \infty$ then

$$\ell.g\ell.\dim R_\sigma[\underset{\sim}{g}] = \sup(\ell.g\ell.\dim.(R_M)_\sigma[\underset{\sim}{g}])$$

where the supremum is taken over all $M \in$ Maximal spectrum of R .

Proof. [2] Lemma 3.1 and [13] Corollary to Theorem 3. ‖

Having reduced to the local case we reduce further to the complete local case.

Proposition 3.5 - Let R' be a subalgebra of $R,\underset{\sim}{g}$ be a Lie algebra and θ a homomorphism from $\underset{\sim}{g}$ to Der R such that for $x \in \underset{\sim}{g}$, θx maps R' into R' and let $\sigma \in Z^2(\underset{\sim}{g},R)$ satisfy $\sigma(\underset{\sim}{g} \times \underset{\sim}{g}) \subset R'$.

If R is a flat (respectively faithfully flat) extension of R' then $R_\sigma[\underset{\sim}{g}]$ is a flat (respectively faithfully flat) extension of $R'_\sigma[\underset{\sim}{g}]$.

Proof. [13] Lemma 2 . ‖

Given a local ring R then its completion $\hat{R}$ is a faithfully flat extension of R . Thus by lemma 3.2 we have

Proposition 3.6 - If R is a local ring then

$$\ell.g\ell.\dim. R_\sigma[\underset{\sim}{g}] \leq \ell.g\ell.\dim. \hat{R}_\sigma[\underset{\sim}{g}].$$

Note. It would be interesting to know whether this inequality is always an equality.

By Cohen's Theorem, $\hat{R} \simeq k[[y_1, \ldots, y_n]]$ so $\theta(\underset{\sim}{g})$ acts as a Lie algebra of k-derivations of $k[[y_1, \ldots, y_n]]$.

Lemma 3.7 (Zariski) - Let d be a k-derivation of $R = k[[y_1, \ldots, y_n]]$ such that $d(M) \not\subset M$, where M is the maximal ideal of $k[[y_1, \ldots, y_n]]$. Then $R = k[[z_1, \ldots, z_n]]$ with $d = \partial/\partial z_1$.

Proof. [2] lemma 5.1 ‖

Lemma 3.8 - Let $\underset{\sim}{g}$ be an abelian Lie algebra of k-derivations on $R = k[[y_1, \ldots, y_n]]$. Then there is an integer t and new generators $z_1, \ldots, z_n$ can be chosen for R, $R = k[[z_1, \ldots, z_n]]$, such that $\underset{\sim}{g} = k\,\partial/\partial z_1 + \ldots + k\,\partial/\partial z_t + \underset{\sim}{h}$ where for all $h \in \underset{\sim}{h}$ and $1 \leq i \leq n$, $h(z_i) \in M$ where M is the maximal ideal of $k[[z_{t+1}, \ldots, z_n]]$.

Proof. [2] Proposition 5.1 and lemma 5.2 ‖

If R is a commutative ring with a maximal ideal M and $\underset{\sim}{g}$ is a Lie algebra of k-derivations of R then for $d \in g$, $d(M^2) \subset M$ giving an induced k-module map $\bar{d} : M/M^2 \longrightarrow R/M = k$. Thus with $\underset{\sim}{g}$ we can associate the subspace of $(M/M^2)^*$ spanned by the $\bar{d}$, $d \in \underset{\sim}{g}$. The dimension of this space is called the rank of $\underset{\sim}{g}$ at M and is denoted $\operatorname{rank}_{\underset{\sim}{g}} M$. If $\hat{R}_M$ is the completion of R_M then $\operatorname{rank}_{\underset{\sim}{g}} \hat{M} = \operatorname{rank}_{\underset{\sim}{g}} M = t$ where t is as in Lemma 3.8.

Theorem 3.9 - If R is the complete local ring $k[[y_1, \ldots, y_n]]$ and $\underset{\sim}{g}$ is the abelian Lie algebra spanned by $\partial/\partial y_1, \ldots, \partial/\partial y_n$ then $\ell.g\ell.\dim. R[\underset{\sim}{g}] = n$.

Proof. [2] Theorem 4.1 ‖

Theorem 3.10 - Let $\underset{\sim}{g}$ be an abelian Lie algebra with $\dim_k \underset{\sim}{g} < \infty$. Then $\ell.g\ell.\dim. R[\underset{\sim}{g}] = \sup(g\ell.\dim. R_M + \dim \underset{\sim}{g} - \operatorname{rank}_{\underset{\sim}{g}} M)$ where the supremum is taken over all maximal ideals M of R.

Proof. [2] Section 5 ‖

Theorem 3.11 (McNaughton[13]) - Let $\underset{\sim}{g}$ be as in 3.10. If $R[\underset{\sim}{g}]$ is a simple algebra then $\ell.g\ell.\dim. R[\underset{\sim}{g}] = g\ell.\dim. R$.

Proof. If M is a maximal ideal of R then we have inclusions $R[\underset{\sim}{g}] \hookrightarrow R_M[\underset{\sim}{g}] \hookrightarrow \hat{R}_M[\underset{\sim}{g}] \overset{\text{defn}}{=} \hat{B}$ and $\ell.g\ell.\dim.R[\underset{\sim}{g}] \leq \ell.g\ell.\dim.R_M[\underset{\sim}{g}]$ by Lemma 3.2 and the remark before Theorem 3.4. By Lemma 3.8, $\hat{R}_M = k[[z_1,\ldots,z_n]]$ and $\underset{\sim}{g} = k\,\partial/\partial z_1 + \ldots + k\,\partial/\partial z_t + \underset{\sim}{h}$. Suppose $\underset{\sim}{h} \neq 0$. $(z_{t+1},\ldots,z_n)$ is a proper (or zero) two-sided ideal of $\hat{R}_M$ and since this ideal is stable under $\underset{\sim}{h}$, $\{z_{t+1},\ldots,z_n,\underset{\sim}{h}\}$ generates a proper left ideal I of $\hat{B}$. Since $\underset{\sim}{g}$ is abelian, I is actually a two sided ideal of $\hat{B}$. But $I \cap (R[\underset{\sim}{g}]) \supset \underset{\sim}{h} \neq 0$, thus $I \cap R[\underset{\sim}{g}]$ is a proper ideal of $R[\underset{\sim}{g}]$, contrary to hypothesis. Hence $\underset{\sim}{h} = 0$. By 3.10, $\ell.g\ell.\dim.\hat{R}_M[\underset{\sim}{g}] = g\ell.\dim.\hat{R}_M = g\ell.\dim.R_M$. Thus by 3.4, $\ell.g\ell.\dim.R[\underset{\sim}{g}] \leq \sup g\ell.\dim.R_M = g\ell.\dim.R$ and 3.3 gives the reverse implication. ||

Theorem 3.12 (MacNaughton [13]) - Let $\underset{\sim}{g}$ be as in 3.10. If $R[\underset{\sim}{g}]$ is simple and $\sigma \in Z^2(\underset{\sim}{g},R)$ then $\ell.g\ell.\dim.R_\sigma[\underset{\sim}{g}] = g\ell.\dim.R$.

Proof. We proceed as in 3.11 but keeping track of the cocycle. After localizing and completing, $\hat{B} = (\hat{R}_M)_\sigma[\underset{\sim}{g}]$ where $\hat{R}_M = k[[z_1,\ldots,z_n]]$ and $\underset{\sim}{g} = k\,\partial/\partial z_1 + \ldots + k\,\partial/\partial z_t$. But then, by 2.3, $\hat{B} \simeq \hat{R}_M[\underset{\sim}{g}]$ and the rest of the proof goes through as in 3.11. ||

4. Related results and open problems

One would like to know the corresponding results to 3.11 and 3.12 in the cases when the assumption that $R[\underset{\sim}{g}]$ is a simple algebra is dropped, or the assumption that $\underset{\sim}{g}$ is abelian is dropped or the assumption on R is weakened. Goodearl [6] and Feldman [4] give formulae for the global dimension of $R[\underset{\sim}{g}]$ (in Goodearl's case with $\underset{\sim}{g}$ abelian) where the only assumption on R is that it is commutative, noetherian and of finite global dimension.

Bhatwadekar [1] considers the global dimension of $k_\sigma[\underset{\sim}{g}]$, where $\underset{\sim}{g}$ is nilpotent and acts trivially on k. His result is that $g\ell.\dim.k_\sigma[\underset{\sim}{g}] = \sup\{\dim \underset{\sim}{h}\}$ as $\underset{\sim}{h}$ ranges over the subalgebras of $\underset{\sim}{g}$ such that $\sigma|\underset{\sim}{h}\times\underset{\sim}{h}$ is a coboundary.

References

[1] Bhatwadekar, S.M. - On the global dimension of some filtered algebras. J. London Math. Soc. (2) 13 (1976), 239-248

[2] Björk, J.E. - The global homological dimension of some algebras of differential operators. Inv. Math 17 (1972), 67-78

[3] Cartan, H and Eilenberg, S. - Homological Algebra. Princeton University Press 1956

[4] Feldman, G.L. - The global homological dimension of general rings of differential operators. Uspehi Mat Nauk 29 (1974) 245-246

[5] Goodearl, K.R. - Global dimension of differential operator rings. Proc. Amer. Math. Soc. 45 (1974) 315-322

[6] Goodearl, K.R. - Global dimension of differential operator rings II. Trans. Amer. Math. Soc. 209 (1975) 65-85

[7] Hart, R. - A note on the tensor product of algebras. J. Alg. 21 (1972), 422-427

[8] Jacobson, N. - Lie algebras. Interscience, New York 1962

[9] McConnell, J.C. and Sweedler, M.S. - Simplicity of smash products. Proc. London Math. Soc (3) 23 (1971) 251-266

[10] McConnell, J.C. - Representations of solvable Lie algebra and the Gelfand-Kirillov conjecture. Proc. London Math. Soc. (3) 29 (1974) 453-484

[11] McConnell, J.C. - Representations of solvable Lie algebras II : Twisted group rings. Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. 4e series, t. 8 (1975) 157-178

[12] McConnell, J.C. - On the global dimension of some rings. Math Z. 153 (1977) 253-254

[13] McNaughton, J.M. - A note on cocycle twisted rings of different operators (University of Leeds Preprint).

[14] Rinehart, G.S. - A note on the global dimension of a certain ring. Proc. Amer. Math. Soc. 13 (1962) 341-346

[15] Roos, J.E. - Détermination de la dimension homologique globale des algèbres de Weyl. C.R. Acad. Sc. Paris - Séries A 274 (1972) 23-26

[16] Roy, A. - A note on filtered rings. Arch. der Math. 16 (1965) 421-427

Manuscrit reçu le 15 Novembre 1976

J.C. Mc Connell
School of Mathematics
University of Leeds
Leeds LS Z 9 JT

ANGLETERRE

Sous-modules purs et modules de type cofini

par

François COUCHOT

Dans (1) et (2), Vamôs a introduit les notions de module de type cofini et de "topologie cofinie". Nous montrons dans le paragraphe 3, que si A est un V-anneau à gauche, alors le complété $\hat{A}$ de A pour la topologie cofinie (à gauche) est un anneau absolument plat et auto-injectif à droite, et A est un sous-$\hat{A}$-module pur (à droite) de $\hat{A}$. Rappelons que si A commutatif, alors A est absolument plat si et seulement si A est un V-anneau (Kaplansky). Dans (7) Cozzens a construit des V-anneaux à gauche qui ne sont pas absolument plats.

Nous donnons aussi quelques résultats sur la structure des modules pur-injectifs lorsque l'anneau de base est commutatif.

Tous les anneaux et modules considérés sont unitaires ; si M est un A-module à gauche, $E_A(M)$ désigne son enveloppe injective.

1 - Modules de type cofini. Topologie cofinie

Définition 1.1 - Soient A un anneau, M un A-module à gauche. On dit que M est de type cofini s'il a un socle essentiel de type fini. On pourra voir (1) pour les principales propriétés de ces modules.

On peut munir tout A-module à gauche M de la topologie cofinie en prenant pour base de voisinages de zéro les sous-modules N de M tels que M/N est de type cofini. Voir (2) pour les propriétés de cette topologie.

Lorsque A est un anneau commutatif semi-local, on a la proposition suivante :

Proposition 1-1 - *Soient A un anneau commutatif semi-local, $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_n$ ses idéaux maximaux, $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_A(A/\mathfrak{m}_i)$, M un A-module. Alors M est de type fini si et seulement si $\mathrm{Hom}_A(M,E)$ est de type cofini.*

Démonstration - Si M est de type fini, il existe un entier n et un épimorphisme $u : A^n \longrightarrow M \longrightarrow 0$. On en déduit la suite exacte
$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M,E) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(A^n,E) \simeq E^n$, et $\mathrm{Hom}_A(M,E)$ est de type cofini.

Réciproquement soit $(M_i)_{i\in I}$ la famille filtrante croissante des sous-modules de type fini de M. Comme $M = \bigcup_{i\in I} M_i$, on a $\mathrm{Hom}_A(M,E) \simeq \varprojlim \mathrm{Hom}_A(M_i,E)$. Si N_i est l'image de l'homomorphisme $\mathrm{Hom}_A(M/M_i,E) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M,E)$, la famille $(N_i)_{i\in I}$ est filtrante décroissante et $\bigcap_{i\in I} N_i = \{0\}$. D'après la proposition 1* de (1), $\exists\, i\in I$ tel que $N_i = \{0\}$. Comme E est un cogénérateur on en déduit que $M = M_i$.

Rappelons les définitions suivantes :

Définition 1.2 - Soient A un anneau, M un A-module à gauche. On dit que M est linéairement compact (9), (resp. semi-compact) si toute famille filtrante décroissante $(x_i + M_i)_{i\in I}$, où pour tout i, $x_i \in M$ et M_i est un sous-module de M (resp. l'annulateur dans M d'un idéal à gauche de A), a une intersection non vide.

Définition 1.3 - On dit qu'un A-module à gauche M est absolument pur (ou fp-injectif) si pour tout A-module à gauche de présentation finie on a $\mathrm{Ext}^1_A(F,M) = 0$ (voir (6)).

Un A-module à gauche M est injectif si et seulement si M est fp-injectif et semi-compact. Voir (6) et (4).

2 - Sous-modules purs

Définition 2.1 - Soient A un anneau, $0 \longrightarrow N \xrightarrow{u} M \longrightarrow P \longrightarrow 0$ une suite exacte de A-modules à gauche. On dit que cette suite est universellement exacte (ou bien que

u est <u>universellement injectif</u>, ou bien que N est un <u>sous-module pur de</u> M) si pour tout A-module à droite Q la suite $0 \longrightarrow Q \otimes_A N \xrightarrow{1\otimes u} Q \otimes_A M \longrightarrow Q \otimes_A P \longrightarrow 0$ est exacte.

<u>Proposition</u> 2.1 - <u>Soient</u> A <u>un anneau commutatif</u>, E <u>un cogénérateur pour la catégorie des A-modules</u>, B <u>une A-algèbre</u> (<u>non nécessairement commutative</u>), (S) : $0 \longrightarrow N \xrightarrow{u} M \longrightarrow P \longrightarrow 0$ <u>une suite exacte de B-modules à gauche</u>. <u>Alors les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

1) <u>la suite</u> (S) <u>est universellement exacte</u>

2) <u>la suite</u> $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P,E) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M,E) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(N,E) \longrightarrow 0$ <u>est une suite scindée de B-modules à droite</u>

3) <u>Pour tout B-module à gauche</u> F <u>de présentation finie</u>, <u>la suite</u> $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(F,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(F,M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(F,P) \longrightarrow 0$ <u>est exacte</u>.

<u>Démonstration</u> - Voir la proposition 9.1 de (5) en remplaçant $\mathbb{Z}$ par A et $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ par E.

<u>Définition</u> 2.2 - Soient A un anneau, N un A-module à gauche. On dit que N est <u>pur injectif</u>, si pour toute suite universellement exacte $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{u} M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$, $\mathrm{Hom}_A(u,N)$ est surjectif. Alors tout produit de modules pur-injectifs et tout facteur direct d'un module pur-injectif est un module pur-injectif.

<u>Proposition</u> 2.2 - <u>Soient</u> A <u>un anneau commutatif</u>, E <u>un cogénérateur injectif pour la catégorie des A-modules</u>, B <u>une A-algèbre</u>, N <u>un B-module à gauche</u>. <u>Alors</u> :

a) N <u>est un sous-module pur de</u> $\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_A(N,E),E)$

b) N <u>est pur-injectif si et seulement si il existe un B-module à droite</u> P <u>tel que</u> N <u>soit facteur direct de</u> $\mathrm{Hom}_A(P,E)$. (Voir (5) proposition 9.2.)

<u>Théorème</u> 2.3 - <u>Soient</u> A <u>un anneau commutatif semi-local</u>, M <u>un A-module</u>, N <u>un sous-module pur de</u> M . <u>Alors</u> :

a) <u>si</u> M <u>est de type fini</u>, N <u>l'est aussi</u>

b) <u>si</u> M <u>est de présentation finie</u>, N <u>est facteur direct de</u> M .

<u>Démonstration</u> - Soient $\mathfrak{m}_1,\dots,\mathfrak{m}_n$ les idéaux maximaux de A , $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_A(A/\mathfrak{m}_i)$. D'après la proposition 2.1, $\mathrm{Hom}_A(N,E)$ est facteur direct de $\mathrm{Hom}_A(M,E)$. En appliquant la proposition 1.1, on en déduit que si M est de type fini, N l'est aussi.

Si M est de présentation finie, alors M/N l'est aussi. D'après la proposition 2.1 3°), N est facteur direct de M .

<u>Théorème</u> 2.4 - <u>Soit A un anneau commutatif. Alors tout A-module est un sous-module pur d'un produit de modules de type cofini et pur-injectifs.</u>

Pour montrer ce théorème nous avons besoin du lemme suivant.

<u>Lemme</u> - <u>Soient A un anneau, $(M_i, \varphi_{ji})_{i\in I}$ un système inductif filtrant de A-modules à gauche, $(M, \varphi_i)_{i\in I}$ sa limite inductive. Soit $\varphi : \bigoplus_{i\in I} M_i \longrightarrow M$ l'épimorphisme induit par les φ_i . Alors $\ker \varphi$ est un sous-module pur de de $\bigoplus_{i\in I} M_i$.</u>

<u>Démonstration du lemme</u> - Si F est un A-module à gauche de présentation finie alors l'homomorphisme canonique $\varinjlim \mathrm{Hom}_A(F,M_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(F,M)$ est un isomorphisme. Donc pour tout A-homomorphisme $f : F \longrightarrow M$, il existe un $i\in I$, tel que f se factorise à travers M_i . Par conséquent $\exists g : F \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} M_i$ tel que $f = \varphi \circ g$.

<u>Démonstration du théorème</u> - Soient M un A-module, Max A l'ensemble des idéaux maximaux de A , $E = \prod_{\mathfrak{m}\in \mathrm{Max}\, A} E_A(A/\mathfrak{m})$. Alors E est un cogénérateur injectif de la catégorie des A-modules. Soit $(N_i)_{i\in I}$ la famille filtrante croissante des sous-modules de type fini de $\mathrm{Hom}_A(M,E)$.

D'après le lemme la suite $0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\,\varphi \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} N_i \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Hom}_A(M,E) \longrightarrow 0$ est universellement exacte. D'après les propositions 2.1 et 2.2, l'homomorphisme

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_A(M,E),E) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(\bigoplus_{i\in I} N_i,E) \simeq \prod_{(i,\mathfrak{m})\in I\times \mathrm{Max}\, A} \mathrm{Hom}_A(N_i, E(A/\mathfrak{m}))$$

est universellement injectif et $\forall (i,\mathfrak{m})\in I\times \mathrm{Max}\, A$, $\mathrm{Hom}_A(N_i, E(A/M))$ est pur-injectif et de type cofini.

<u>Corollaire</u> 2.5 - <u>Soient A un anneau commutatif, M un A-module. Les conditions suivantes sont équivalentes</u>

1) M <u>est pur-injectif</u>

2) M <u>est facteur direct d'un produit de modules de type cofini et pur-injectifs</u>.

<u>Corollaire</u> 2.6 - <u>Soit</u> A <u>un anneau commutatif</u>. <u>Alors tout A-module est un sous-module pur de son complété pour la topologie cofinie</u>.

<u>Démonstration</u> - Soient M un A-module, $(M_i)_{i \in I}$ le système projectif des quotients de type cofini de M, $\hat{M} = \varprojlim M_i$ le complété pour la topologie cofinie de M, u l'injection canonique $M \longrightarrow \hat{M}$. D'après le théorème il existe un homomorphisme $V : M \longrightarrow P$, universellement injectif où P est isomorphe à un produit de modules de type cofini. Alors V se factorise à travers $\hat{M}$ et donc u est universellement injectif.

<u>Exemple de module de type cofini qui n'est pas pur-injectif</u>

Soient A un anneau de valuation, $\mathfrak{m}$ son idéal maximal, K son corps de fractions. Alors $K/\mathfrak{m}$ est de type cofini et absolument pur. Si $K/\mathfrak{m}$ est pur-injectif, alors $K/\mathfrak{m} = E_A(A/\mathfrak{m})$. D'après (8) on en déduit que A est presque maximal. Or il existe des anneaux de valuation qui ne sont pas presque maximaux.

<u>Exemple d'anneau non commutatif pour lequel le théorème 2.4 n'est pas vérifié</u>

Soit A un V-anneau à gauche (tout A-module à gauche simple est injectif). Alors tout A-module de type cofini est injectif. Si le théorème 2.4 est vérifié, alors tout A-module à gauche est absolument pur et A est absolument plat. Or Cozzens (7) a construit des V-anneaux à gauche qui ne sont pas absolument plats.

3 - <u>H-anneaux et topologie cofinie</u>

Soient A un anneau, E et M des A modules à gauche. La E-topologie sur M est définie en prenant pour base de voisinages de zéro, les noyaux des homomorphismes de M dans E^k, k entier positif. Le groupe $\mathrm{Hom}_A(M,E)$ peut être muni de la topologie "finie" en prenant les sous-groupes $\{f \in \mathrm{Hom}_A(M,E) \mid f(S) = 0$ S partie finie de $M\}$ comme base de voisinages de zéros.

S'il n'existe qu'un nombre fini de classes d'isomorphisme de A-modules à gauche simples, si $S_1,\dots,S_n$ sont des représentants de ces classes, si $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_A(S_i)$, alors la E-topologie et la topologie cofinie coïncident.

Proposition 3.1 – *Soient* A *un anneau,* E *et* M *des A-modules à gauche,* $B = \mathrm{End}_A\, E$, N *un B-module à gauche,* S *le foncteur* $\mathrm{Hom}_A(.,E)$, T *le foncteur* $\mathrm{Hom}_B(.,E)$, ϕ_M *l'homomorphisme canonique de* $M \longrightarrow TS(M)$. *Munissons* A *et* M *de la E-topologie et* TS(M) *de la topologie finie. Alors* :

1) A *est un anneau topologique,* M *et* TS(M) *sont des A-modules topologiques*

2) ϕ_M *est continu et les topologies induites quotient et sous-module coïncident sur* Im ϕ_M

3) TS(M) *est complet*

4) *Si tout module quotient d'un nombre fini de copies de* E *est séparé pour la E-topologie, la paire* $(\phi_M, TS(M))$ *est une complétion de* M .

C'est la proposition 1.5 de (2).

Définition 3.1 – Soit A un anneau. On dit que A est un H-*anneau à gauche*, si S et S' sont deux A-modules à gauche simples tels que $\mathrm{Hom}_A(E_A(S),E_A(S')) \neq \{0\}$, alors S et S' sont isomorphes.

Théorème 3.1 – *Soient* A *un H-anneau à gauche,* $(S_i)_{i\in I}$ *des représentants de toutes les classes d'isomorphisme de A-modules à gauche simples,* $B_i = \mathrm{End}_A\, E_A(S_i)$, M *un A-module à gauche,* $\hat{M}$ *son complété pour la topologie cofinie,* M_i *le A-module* M *muni de la* $E(S_i)$*-topologie.*

Alors l'homomorphisme diagonal $U : M \longrightarrow \prod_{i\in I} M_i$ *est continu et induit un isomorphisme entre* $\hat{M}$ *et* $\prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{B_i}(\mathrm{Hom}_A(M,E(S_i)), E(S_i))$. *En particulier* $\hat{A} \simeq \prod_{i\in I} \mathrm{End}_{B_i}\ E(S_i)$.

Pour montrer ce théorème nous avons besoin des 2 lemmes suivants :

Lemme 1 – *Soit* A *un H-anneau à gauche. Alors pour tout A-module à gauche simple* S, *tout quotient d'un nombre fini de copies de* $E_A(S)$ *est séparé pour la* $E_A(S)$*-topologie.*

<u>Lemme</u> 2 - <u>Soient</u> A <u>un H-anneau à gauche</u>, M <u>un A-module à gauche</u>, $N_1,\dots,N_p$ <u>des sous-modules de</u> M <u>tels que</u> :

1) $\forall i \quad 1 \leq i \leq p \qquad E_A(M/N_i) \simeq (E_A(S_i))^{n_i}$ <u>où</u> S_i <u>est un A-module simple et</u> n_i <u>un entier</u>

2) $\forall i \quad \forall j \quad i \neq j \Longrightarrow S_i$ <u>non isomorphe à</u> S_j

<u>Soit</u> $N = \bigcap_{i=1}^{p} N_i$. <u>Alors l'homomorphisme canonique de</u> M/N <u>dans</u> $\bigoplus_{i=1}^{p} M/M_i$ <u>est un isomorphisme</u>.

<u>Démonstration du lemme</u> 1 - Soient N un sous-module de $(E_A(S))^n$, x un élément non nul de $E_A(S)^n/N$. Alors il existe un A-module simple S' et une application $f : E_A(S)^n/N \longrightarrow E_A(S')$ telle que $f(x) \neq 0$. Alors $\mathrm{Hom}_A(E_A(S),E_A(S')) \neq 0$. Donc $S \simeq S'$.

<u>Démonstration du lemme</u> 2 - Voir (3) Théorème 4.26.

<u>Démonstration du théorème</u> - Le complété de $\prod_{i \in I} M_i$ pour la topologie produit est isomorphe à $\prod_{i \in I} \hat{M}_i$, où $\hat{M}_i$ est le séparé complété de M_i pour la $E(S_i)$-topologie. D'après le lemme 1 et la proposition 3.1, on a $\hat{M}_i = \mathrm{Hom}_{B_i}(\mathrm{Hom}_A(M_i,E_A(S_i)),E_A(S_i))$.

Il est facile de montrer que U est continu, et le lemme 2 entraîne que Im U est dense dans $\prod_{i \in I} M_i$.

<u>Corollaire</u> 1 - <u>Soit</u> A <u>un V-anneau à gauche</u>, $\hat{A}$ <u>son complété pour la topologie cofinie</u>. <u>Alors</u> $\hat{A}$ <u>est un anneau absolument plat auto-injectif à droite</u>.

<u>Démonstration</u> - Soient $(S_i)_{i \in I}$ des représentants de toutes les classes d'isomorphisme de A-modules à gauche simples, $K_i = \mathrm{End}_A S_i$. Alors $\hat{A} = \prod_{i \in I} \mathrm{End}_{K_i} S_i$. Alors K_i est un corps et donc $\mathrm{End}_{K_i} S_i$ est absolument plat et auto-injectif à droite.

<u>Corollaire</u> 2 - <u>Soit</u> A <u>un H-anneau à gauche</u>. <u>Si</u> A <u>est complet pour la topologie cofinie, alors il n'existe qu'un nombre fini de classes d'isomorphismes de A-modules à gauche simples</u>.

<u>Démonstration</u> - Si nous reprenons les notations du théorème, on a

$A = \prod_{i\in I} \mathrm{End}_{B_i} E_A(S_i)$. Posons $A_i = \mathrm{End}_{B_i} E_A(S_i)$. Alors $\forall i \in I$, S_i est un A_i-module est infini, soit $\mathfrak{m}$ un idéal à gauche maximal contenant $\underset{i\in I}{\oplus} A_i$, et $S = A/\mathfrak{m}$. Alors S n'est isomorphe à aucun des S_i . Impossible.

Définition 3.2 - Soit A un anneau. On dit que A est classique à gauche, si tout A-module à gauche de type cofini est linéairement compact.

Théorème 3.2 - Soit A un anneau classique à gauche. On suppose que l'une des hypothèses suivantes est vérifiée :

a) Il n'existe qu'un nombre fini de classes d'isomorphisme de A-modules à gauche simples

b) A est un H-anneau à gauche.

Alors les conditions suivantes sont vérifiées :

1) le foncteur complétion (pour la topologie cofinie) est exact

2) pour tout A-module à gauche de présentation finie M , on a $\hat{M} \simeq \hat{A} \otimes_A M$, où $\hat{A}$ et $\hat{M}$ sont les complétés respectifs de A et M pour la topologie cofinie.

3) A est un sous-module pur à droite de $\hat{A}$

4) si A est cohérent à gauche, $\hat{A}$ est un A-module à droite fidèlement plat.

Pour montrer ce théorème nous avons besoin des lemmes suivants

Lemme 3 - Soient A un anneau, E un A-module à gauche injectif, $B = \mathrm{End}_A E$. On suppose que tout quotient d'un nombre fini de copies de E est séparé pour la E-topologie.

Alors E est un B-module à gauche absolument pur.

Lemme 4 - Mêmes hypothèses que le lemme précédent. Alors E est un B-module injectif si et seulement si E est un A-module linéairement compact. Dans ces conditions E est un cogénérateur pour la catégorie des B-modules à gauche si et seulement si E est de type cofini sur A .

Démonstration du lemme 3 - Soient N un B-module à gauche $\psi_N : N \longrightarrow ST(N)$ l'homomorphisme canonique (on reprend les notations de la proposition 3.1). On montre d'abord que si N est de présentation finie, alors ψ_N est un isomorphisme, et si N est de type fini, ψ_N est un épimorphisme.

Soient L un B-module à gauche libre de type fini, K un sous-module de type fini de L. On a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(L/K,E) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(L,E) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(K,E) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_B(L/K,E) \longrightarrow 0$$

On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\psi_K"] & L \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\psi_L"] & L/K \arrow[r] \arrow[d, "\psi_{L/K}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Ext}^1_B(L/K,E),E) \arrow[r] & ST(K) \arrow[r, "ST(u)"] \arrow[d] & ST(L) \arrow[r, "ST(p)"] \arrow[d] & ST(L/K) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

On en déduit que ψ_K est un isomorphisme et $ST(u)$ est injectif. Donc $\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Ext}^1_B(L/K,E),E) = 0$. K étant de type fini sur B , $\mathrm{Ext}^1_B(L/K,E)$ est un sous A-module d'un module quotient d'un nombre fini de copies de E . On a donc $\mathrm{Ext}^1_B(L/K,E) = 0$.

Démonstration du lemme 4 - Comme l'annulateur dans E d'un idéal à gauche de B est un sous-A-module de E et comme tout sous-A-module de E est l'annulateur d'un idéal à gauche de B , E est un B-module semi-compact si et seulement si E est un A-module linéairement compact.

Démonstration du Théorème 3.2 -

1) a) Soient $S_1,\dots,S_n$ des représentants des classes d'isomorphisme de A-modules à gauche simples, $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_A(S_i)$. D'après la proposition 3.1, le foncteur complétion est $\mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(-,E),E)$, où $B = \mathrm{End}_A E$, et ce foncteur est exact d'après le lemme 4

b) Reprenons les notations du théorème 3.1. Alors le foncteur complétion est exact d'après le lemme 4.

2) a) Considérons l'homomorphisme canonique
$\theta_M : \mathrm{Hom}_B(E,E) \otimes_A M \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(M,E),E)$, où M est un A-module à gauche, défini par $\theta_M(f \otimes x)(\alpha) = f(\alpha(x))$, $f \in \mathrm{Hom}_B(E,E)$, $x \in M$ et $\alpha \in \mathrm{Hom}_A(M,E)$. Comme E est un B-module injectif, θ_M est un isomorphisme pour tout A-module M de présentation finie.

b) De même, pour tout A-module de présentation finie M, on a un isomorphisme $(\mathrm{End}_{B_i} E) \otimes_A M \longrightarrow \mathrm{Hom}_{B_i}(\mathrm{Hom}_A(M,E_A(S_i)), E_A(S_i))$. Comme M est de présentation finie, l'homomorphisme canonique $\hat{A} \otimes_A M \longrightarrow \prod_{i \in I} ((\mathrm{End}_{B_i} E) \otimes_A M)$ est un isomorphisme, et on a donc $\hat{A} \otimes_A M \simeq M$.

3) et 4) sont des conséquences de 1) et 2).

<u>Corollaire</u> 1 - <u>Soit</u> A <u>un V-anneau à gauche</u>. <u>Alors</u> $\hat{A}$ <u>est un anneau absolument plat et auto-injectif à gauche et</u> A <u>est un sous-A-module pur à droite de</u> $\hat{A}$.

<u>Théorème</u> 3.3 - <u>Tout V-anneau à gauche complet pour la topologie cofinie est semi-simple</u>.

<u>Démonstration</u> - On a $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$, où $A_i = \mathrm{End}_{K_i} S_i$; S_i est un A_i-module injectif. D'après le lemme 4, S_i est un K_i-module linéairement compact, et par conséquent S_i est K_i-espace vectoriel de dimension finie. On a donc que A_i est un anneau simple.

4 - <u>Modules pur-injectifs et anneaux classiques</u>

<u>Théorème</u> 4.1 - <u>Soient</u> A <u>un anneau commutatif classique</u>, M <u>un A-module</u>. <u>Les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

1) M <u>est pur-injectif</u>
2) M <u>est facteur direct de</u> $\hat{M}$, <u>son complété pour la topologie cofinie</u>
3) M <u>est facteur direct d'un produit de modules de type cofini</u>.

<u>Démonstration</u> - Il reste à montrer que si S est un A-module simple, si

$B = \mathrm{End}_A\, E_A(S)$, si N est un B-module à gauche alors $\mathrm{Hom}_B(N,E)$ est un A-module pur-injectif. On utilise alors l'isomorphisme canonique

$\mathrm{Hom}_B(N \otimes_A M, E) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_B(N,E))$ où M est un A-module.

On en déduit que si M est un A-module, $\hat{M}$ est pur injectif. En particulier tout module de type cofini est pur-injectif.

<u>Remarque</u> - Dans (10), Warfield a montré que sur tout anneau commutatif A, tout A-module linéairement compact est pur injectif.

Bibliographie

(1) P. VAMÔS - The dual of the notion of "finitely generated" - J. London Math. Soc 43 (1968) p. 643-646

(2) P. VAMÔS - Classical Rings - J. of Algebra 34 (1975) p. 114-129

(3) D.W. SHARPE and P. VAMÔS - Injectives Modules - Cambridge University Press 1972

(4) E. MATLIS - Injective Modules over Prüfer Rings - Nagoya Math. J. 15 (1959) p. 511-528

(5) B. STENSTRÖM - Pure submodules - Arkiv for Matematik 7.L 1967 p. 159-171

(6) B. STENSTRÖM - F.P. injective modules and coherent rings J. London Math. Soc. (2) (1970) p. 323-329

(7) COZZENS - "Homological properties of the ring of differential polynomials" Bull. Amer. Math. Soc. 76-1 1970 p. 75-79

(8) D.T. GILL - Almost maximal valuation Rings - J. London Math. Soc (2) 4 (1971) p. 140-146

(9) D. ZELINSKY - Linearly compact modules and rings-Amer. J. Math. 75 (1953) p. 79-90

(10) R.B. WARFIELD - Purity and Algebraic compactness for modules. Pacific. J. of Math. 28 n°3 (1969) p. 699-719

Manuscrit reçu le 24 Janvier 1977

M. François COUCHOT
Departement de Mathématiques
Université de Caen
Esplanade de la Paix

14032 CAEN CEDEX

SOME RECENT DEVELOPMENTS IN THE THEORY OF NOETHERIAN RINGS

Günter KRAUSE

0. INTRODUCTION

The purpose of this survey is to report on some recent progress in trying to understand the structure of noetherian rings, i.e. not necessarily commutative rings with maximum condition for left and right ideals. The emphasis will be on two particular questions :

i) Jacobson's conjecture, i.e. is $J^{\omega} = \bigcap_{n=1}^{\infty} J^n = 0$ in a noetherian ring with Jacobson radical J ?

ii) If R is a noetherian right Macaulay ring, i.e. $\text{K-dim}(A_R) = \text{K-dim}(R_R)$ for all nonzero right ideals A of R, does R have a classical quotient ring which is artinian ?

Both these problems can be viewed as test questions for the effectiveness of the methods developed for a particular class of noetherian rings. The validity of Jacobson's conjecture is generally of limited practical value. Even in the cases where $J^{\omega} = 0$ assures that the J-adic topology is Hausdorff, very little is known about the completion of R when R is not commutative. But whenever $J^{\omega} = 0$ can be proved, the methods leading to this turn out to be useful for many other things. The quotient ring problem (ii) actually asks for much deeper insight into the structure of the ring ; it is almost always proved by establishing $\mathcal{C}(N) = \mathcal{C}(0)$ and then using SMALL's theorem [19].

We note that for both problems the assumption of R being left <u>and</u> right noetherian is absolutely vital. HERSTEIN's example in [9],

$$R = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_{(2)} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 2\,\mathbb{Z}_{(2)} & \mathbb{Q} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J^{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Q} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

is a right (but not left) noetherian ring with r.K-dim(R) = 1 , it is even a P.I. ring, hence fully bounded. GORDON's example in [7],

$$R = \begin{pmatrix} k[y] & k[x,y]/(y) \\ 0 & k[x] \end{pmatrix}, \quad k \text{ any field}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & k[x,y]/(y) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

is a right (but not left) noetherian, fully bounded ring with r.K-dim(R) = 1 , it is right Macaulay, but R is not an order in an artinian ring as

$$\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{C}(N) - \mathscr{C}(0)\ , \text{ since} \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & k[x,y]/(y) \\ & 0 \end{pmatrix} = 0 \ .$$

The starting point for our discussion is the affirmative answer to both questions (i) and (ii) for the case of a fully bounded noetherian ring.

DEFINITION - A ring R is right bounded if every essential right ideal of R contains a non-zero two-sided ideal. R is right fully bounded if R/P is right bounded for every prime ideal P of R . R is fully bounded, if it is right and left fully bounded.

Right noetherian right fully bounded rings have been characterized in many ways, their most useful properties are listed in the following theorem.

THEOREM 0.1 - *The following properties of the right noetherian ring R are equivalent* :

1) R *is right fully bounded*.

2) *GABRIEL's correspondence* $\{E\} \longrightarrow \mathrm{Ass}(E)$ *between isomorphism classes of injective indecomposable right R-modules* E *and their associated prime ideals is bijective*.

3) *For every finitely generated right R-module* M *there is a finite set* $\{m_1, m_2, \ldots, m_k\} \subseteq M$ *such that the right annihilator* $r(M)$ *of* M *is the intersection of the right annihilators* $r(m_i)$, $i = 1, \ldots, k$.

Proof - For (1)$\longleftrightarrow$(2) see [13], (3) $\longrightarrow$ (2) is in [4], and (1) $\longrightarrow$(3) is due to CAUCHON [3].

NOTATIONS

i) N = prime radical = intersection of all prime ideals.

ii) For an ideal I set $\mathcal{C}'(I) = \{c \in R \mid cr \in I$ implies $r \in I\}$, $'\mathcal{C}(I) = \{c \in R \mid rc \in I$ implies $r \in I\}$, $\mathcal{C}(I) = \mathcal{C}'(I) \cap {'\mathcal{C}}(I)$.

iii) $K\text{-}\dim(M)_R$ = Krull dimension of the right R-module M (see [8] for definitions and basic properties).

iv) $r.K\text{-}\dim(R) = K\text{-}\dim(R)_R$, $\ell.K\text{-}\dim(R) = K\text{-}\dim_R(R)$.

v) $cl.K\text{-}\dim(R)$ = classical Krull dimension (see [8] or [13] for definition).

vi) For a right ideal A of R , bd(A) = r(R/A) = largest ideal contained in A .

1. JACOBSON'S CONJECTURE

In [12] JATEGAONKAR has proved the following theorem

THEOREM 1.1 - <u>If</u> R <u>is a fully bounded noetherian ring</u>, <u>then every finitely generated essential extension of an artinian right</u> R<u>-module</u> <u>is artinian</u>.

Proof - See [12] , Theorem 3.5 and Corollary 3.6.

Using the facts that then J^{ω} annihilates injective hulls of simple modules and that the direct sum of the injective hulls of a set of representatives of all isomorphism classes of simple modules is faithful, $J^{\omega} = 0$ follows immediately.

It turns out that Theorem 1.1 remains true if the assumption of R being left fully bounded is dropped, and this is due to SCHELTER [18]. Subsequently, more elegant proofs of $J^{\omega} = 0$ alone have been obtained by CAUCHON [1] and LENAGAN [16]. We present a proof which is due to GOLDIE [6].

THEOREM 1.2 - <u>If</u> R <u>is a noetherian right fully bounded ring</u>, <u>then</u> $J^{\omega} = 0$.

Proof - For $a \in R$ let V_a denote a right ideal which is maximal with respect to not containing a . Clearly $0 = \bigcap_{a \in R} V_a = \bigcap_{a \in R} bd(V_a)$, so it is sufficient to assume $0 = bd(A)$ for a right ideal A for which R/A is uniform with nonzero socle, and to establish the nilpotence of J. Using Theorem 0.1 (3), we get elements x_i in R/A, $i = 1, \dots, n$, such that

$$R_R = R / \bigcap_{i=1}^{n} r(x_i) \subsetneq \underset{n \text{ copies}}{\oplus} R/A \quad .$$

Thus $Ass(R_R) = Ass(R/A) = P$, say. Since R/A has a socle, R/P is a right primitive ring and hence simple artinian as it is right bounded. Thus R_R has an essential socle S. But S_R is artinian because R is right noetherian, so the chain $S \supset JS \supset J^2S \supset \dots$ becomes stationary and $J^{n+1}S = J^nS$ for some n. NAKAYAMA's lemma applied to the left R-module J^nS yields $J^nS = 0$, so $J^n \subseteq Z(R_R)$, the singular right ideal of R. The result now follows because in a right noetherian ring $Z(R_R)$ is nilpotent.

As was pointed out earlier, JACOBSON's conjecture is no longer valid when R is assumed to be only right noetherian. But by NAKAYAMA's lemma some transfinite power of J is always zero, and the question arises how to obtain an ordinal α from the other invariants of R for which $J^{\alpha} = 0$. In [11], JATEGAONKAR showed that there exists for any ordinal α a local principal right ideal domain R whose right ideals are all two-sided and linearly ordered of type ω^{α}. In these rings $J^{\omega^{\alpha}}$ is the first power of J which is zero, so for right noetherian rings there is not even a universal ordinal bound ε such that $J^{\varepsilon} = 0$ for all these rings. We consider the following two types of transfinite powers of J:

a) $J^{0} = R$, $J^{\beta+1} = J^{\beta}J$, $J^{\delta} = \bigcap_{\alpha<\delta} J^{\alpha}$ for limit ordinals δ .

b) $J^{0} = J$, $J_{\beta+1} = \bigcap_{n=1}^{\infty} J_{\beta}^{n}$, $J_{\delta} = \bigcap_{\alpha<\delta} J_{\alpha}$ for limit ordinals δ .

<u>LEMMA</u> 1.3 - $J_{\alpha} \subseteq J^{\omega^{\alpha}}$ for each ordinal α .

<u>Proof</u> - See Lemma 6 in [15].

<u>LEMMA</u> 1.4 - <u>If</u> R <u>is a right noetherian ring and</u> M <u>is a finitely generated</u> α<u>-critical right</u> R-<u>module, then</u> $MJ^{\omega^{\alpha}} = 0$.

<u>Proof</u> - It was shown in [14, Theorem 4.6] that the supremum $o(M)$ of the ordinal types of descending chains of non-zero submodules of M is at most ω^{α}. Thus, if the claim was false, then $MJ^{\beta} \neq MJ^{\beta+1}$ for all $\beta<\omega^{\alpha}$ by NAKAYAMA's lemma.

But then

$$M = MJ^{o} \supset MJ \supset MJ^{2} \supset \dots \supset MJ^{\omega^{\alpha}} \neq 0$$

is a descending chain of submodules $\neq 0$ of order type $\omega^{\alpha} + 1$, contradiction !

<u>THEOREM</u> 1.5 - <u>If</u> R <u>is a right noetherian ring with</u> r.K-dim(R) = α , <u>then</u> $J^{\omega^{\alpha}}$ <u>is nilpotent</u>.

<u>Proof</u> - Obviously, we may assume that R is prime and establish $J^{\omega^{\alpha}} = 0$. Let A be a right ideal such that R/A is α-critical. By Lemma 1.4, $J^{\omega^{\alpha}} \subsetneq A$. If $J^{\omega^{\alpha}} \neq 0$, then $J^{\omega^{\alpha}}$ is an essential right ideal of R , so it contains a regular element c . But then

$$\alpha = \text{K-dim}(R/A) \leq \text{K-dim}(R/J^{\omega^{\alpha}}) \leq \text{K-dim}(R/cR) < \alpha \quad ,$$

contradiction !

COROLLARY 1.6 - <u>If</u> R <u>is a right noetherian ring with</u> r.K-dim(R) = α , <u>then</u> $J_{\alpha+1} = 0$.

<u>Proof</u> - Clear by Lemma 1.3 and Theorem 1.5.

We remark that Theorem 1.5 and Corollary 1.6 cannot be improved. For JATEGAONKAR's example of a local principal right ideal domain S whose right ideals are two-sided and linearly ordered of type ω^{δ} shows that if we take $\delta = \alpha + 1$ and take R to be the proper homomorphic image with lattice of ideals of type $\omega^{\alpha} n$ for some positive integer n , then $J^{\omega^{\alpha}} \neq 0$. Since the powers $J^{\omega^{\beta}}$ for $\beta \leq \alpha$ are the prime ideals of R , it follows easily from Lemma 1.3 that $J_{\beta} = J^{\omega^{\beta}}$ for all $\beta \leq \alpha$, so $J_{\alpha} \neq 0$, so $J_{\alpha+1}$ is indeed the first transfinite power of type b) which is zero. In contrast, we mention that HERSTEIN and SMALL have proved in [10] that for a left noetherian P.I.-ring, $J_m = 0$ for some natural number m . This has been improved to m = 2 by CAUCHON in [2], and in view of HERSTEIN's example [9] this is best possible.

Finally, we mention that $J^{\omega} = 0$ has been established for noetherian rings with right Krull dimension one by LENAGAN [17, Theorem 4.4]. Unfortunately, LENAGAN's proof does not seem to give any clues as to how one might proceed by induction in order to settle the question for higher Krull dimensions. One can only say that J^{ω} is nilpotent for noetherian rings of Krull dimension two, but this comes as a consequence of NAKAYAMA's lemma ; more generally, if $J^{\omega} = 0$ is known for rings with Krull dimension α , then J^{ω} is nilpotent for rings with Krull dimension $\alpha + 1$.

2. ARTINIAN QUOTIENT RINGS

In [7] , GORDON proved the following result.

THEOREM 2.1 - *A noetherian fully bounded right Macaulay ring has an artinian classical quotient ring.*

Proof - [7], Theorem 1 .

GORDON's proof depends heavily on both the left and right-handed versions and their consequences of a result of JATEGAONKAR [12], which asserts that for a bimodule ${}_SM_R$ which is finitely generated over the right noetherian right fully bounded ring R the Krull dimension of the partially ordered set of (S,R)-bisubmodules of M equals $\text{K-dim}(M)_R$. In order to obtain a one-sided version of GORDON's theorem, this dependency must be at least partly removed, and this is done by the following considerations.

DEFINITION - Let ${}_SM_R$ be a (S,R)-bimodule. The Krull dimension of the lattice of (S,R)-bisubmodules is denoted by $\mu({}_SM_R)$.

LEMMA 2.2 - *Let* S *be a ring with left Krull dimension,* R *any ring, and let* ${}_SM_R$ *be a bimodule such that*

a) $M_R = m_1R + m_2R + \dots + m_kR$.

b) $\ell_S(M) = 0$

c) ${}_SM$ *has Krull dimension*

Then $\text{K-dim}_S(M) = \ell.\text{K-dim}(S)$.

Proof - We have

$$S = S/0 = S/\ell_S(M) = S \Big/ \bigcap_{i=1}^{k} \ell_S(m_i) \subsetneqq \underbrace{\oplus\ {}_SM}_{k\text{ copies}} .$$

Thus $\text{K-dim}_S(M) \geqslant \ell.\text{K-dim}(S)$. The reverse inequality follows from Corollary 4.4 of [8].

PROPOSITION 2.3 - *Let* S *be a left noetherian ring,* R *any ring, and let* ${}_SM_R$ *be a bimodule such that*

a) M_R *is noetherian*

b) $K\text{-dim}_S(M)$ exists.

Then $\mu({}_SM_R) \leq \text{cl.K-dim}(S)$.

Proof - If false, we assume by noetherian induction that the statement is true for every proper factor ring of S . Assume S is not a prime ring, let $AB = 0$ for non-zero ideals A and B . Then we get for every (S,R)-bimodule ${}_SM_R$

$$\mu({}_SM_R) = \max\{\mu(M/BM), \mu(BM)\} \leq \max\{\text{cl.K-dim}(S/B), \text{cl.K-dim}(S/A)\} \leq \text{cl.K-dim}(S) ,$$

and this contradiction shows that S is prime. Let now

$${}_SM_R = M_o \supsetneq M_1 \supsetneq M_2 \supsetneq \dots \supsetneq M_i \supsetneq M_{i+1} \supsetneq \dots$$

be a descending chain of (S,R)-bisubmodules of M. If for some i the left S-module M_i/M_{i+1} is faithful, then

$$K\text{-dim}_S(M_i/M_{i+1}) = K\text{-dim}_S(S) \geq K\text{-dim}_S(M)$$

by our Lemma 2.2 and Corollary 4.4 of [8]. By definition of $K\text{-dim}_S(M)$ this can happen only finitely many times, so we assume without loss of generality it does not happen at all, and we set $T_i = \ell_S(M_i/M_{i+1}) \neq 0$. Since S is prime we get for all i

$$\mu(M_i/M_{i+1}) \leq \text{cl.K-dim}(S/T_i) < \text{cl.K-dim}(S)$$

by induction hypothesis. The claim now follows from the definition of $\mu({}_SM_R)$.

We will achieve our goal of obtaining a one-sided version of GORDON's theorem by proving it actually for a different class of rings, the ideal invariant rings defined below. It will be seen that noetherian right fully bounded rings form a subclass of this class of rings.

DEFINITION - A ring R with right Krull dimension is right ideal invariant if $K\text{-dim}(T/AT)_R \leq K\text{-dim}(R/A)_R$ for every right ideal A and every two-sided ideal T .

Right ideal invariant rings were first considered by STAFFORD in [20]. He showed that a fully bounded noetherian ring is ideal invariant, and the following is the one-sided version of this result.

THEOREM 2.4. (LENAGAN) - *A noetherian right fully bounded ring* R *is right ideal invariant*.

Proof - Let T be an ideal, A a right ideal, and set $B = bd(A)$. By Theorem 0.1(3) we have $K\text{-dim}(R/A)_R = K\text{-dim}(R/B)_R$, by Lemma 2.2 of [12] we also have $\mu({}_{R/B}T/BT_R) = K\text{-dim}(T/BT)_R$. Together with Proposition 2.3 we thus get

$$K\text{-dim}(T/AT)_R \leq K\text{-dim}(T/BT)_R = \mu({}_{R/B}T/BT_R) \leq cl.K\text{-dim}(R/B)$$

$$\leq r.K\text{-dim}(R/B) = K\text{-dim}(R/A) \quad .$$

The one-sided version of GORDON's theorem we are aiming for was first proved by WARFIELD [21] who derived it from the following general theorem.

THEOREM 2.5 - *The following properties of the noetherian ring* R *are equivalent*

1) R *has an artinian classical quotient ring*.

2) *The sets* $Ass(R)_R$ *and* $Ass_R(R/r(N^k))$ *for* $k = 0,1,\ldots,$ *consist of minimal prime ideals*.

Proof - See WARFIELD [21], Theorem 3.

With the use of this theorem and Proposition 2.3, WARFIELD actually obtained an artinian classical quotient ring for a larger class of noetherian rings than right ideal invariant ones.

DEFINITION - A ring R with right Krull dimension is *right prime ideal invariant* if $K\text{-dim}(T/PT)_R \leq K\text{-dim}(R/P)_R$ for every ideal T and every prime ideal P of R .

Using the fact that in a right noetherian ring every ideal T contains a product of primes $\supseteq T$, it is easy to see that right prime ideal invariance is equivalent with the condition that $K\text{-dim}(T/BT)_R \leq K\text{-dim}(R/B)_R$ for any two ideals B and T of R .

LEMMA 2.6 - *Let* R *be a right noetherian ring, let* I *be an ideal of* R , *and let* $0 \neq T/r(I)$ *be an ideal of* $R/r(I)$. *Then* R *has an ideal* $T' \neq 0$ *with* $r(T') \supseteq r(T)$ *and* $K\text{-dim}(T')_R \leq K\text{-dim}(T/r(I))_R$.

Proof (cf. [16], Lemma 2.3) Set $T' = IT$. For any i in I with $iT \neq 0$ we have a non-zero epimorphism $T/r(I) \longrightarrow iT$, so the result follows because I_R is finitely generated.

THEOREM 2.7 - A noetherian right prime ideal invariant right Macaulay ring has an artinian classical quotient ring.

Proof - The proof follows essentially along the same lines as that of WARFIELD's theorem (Theorem 2.5). Let $c \in \mathcal{C}(N)$ and assume $cx = 0$ for some $x \neq 0$. Then $x \in r(N^{k+1}) - r(N^k)$ for some k, so the left R/N-module $r(N^{k+1})/r(N^k)$ has a nonzero singular submodule $\bar{Z} = Z/r(N^k)$. Clearly Z is a two-sided ideal, and since R is right noetherian, $\bar{Z}_R$ is finitely generated. From this it follows that there is an element $d \in \mathcal{C}(N)$ such that $d\bar{Z} = 0$. Using the right prime ideal invariance of R (or rather its consequence mentioned after the definition), we obtain

$$\begin{aligned} \text{K-dim}(\bar{Z})_R &= \text{K-dim}(\bar{Z}/(\overline{RdR + N})\bar{Z})_R \leq \text{K-dim}(\bar{R}/\overline{RdR + N})_R \\ &= \text{K-dim}(R/RdR + N)_R \leq \text{K-dim}(R/dR + N)_R \\ &< \text{K-dim}(R/N)_R = \text{K-dim}(R)_R, \end{aligned}$$

which cannot be because of Lemma 2.6 and the Macaulay condition. Thus $r(c) = 0$ and $\mathcal{C}(N) \subseteq \mathcal{C}'(0)$, and it follows from the general theory of noetherian rings (Theorem 2.5 of GOLDIE [5]) that $\mathcal{C}(N) = \mathcal{C}'(0)$ and that this set is a right Ore set. Thus $I = \{y \in R \mid yc = 0 \text{ for some } c \in \mathcal{C}(N)\}$ is an ideal of R. Assume $I \neq 0$; then $\ell(N) \cap I \neq 0$ since $\ell(N)$ is an essential submodule of R_R. Thus the right R/N-module $\ell(N)$ has a nonzero singular submodule Y which is a two-sided ideal. Since ${}_RY$ is finitely generated, we obtain an element $e \in C(N)$ with $Ye = 0$. Since $Y(ReR + N) = 0$, Y is a right $R/(ReR + N)$-module, so

$$\text{K-dim}(Y)_R \leq \text{K-dim}(R/ReR + N)_R \leq \text{K-dim}(R/eR + N)_R < \text{K-dim}(R/N)_R = \text{K-dim}(R)_R,$$

a direct violation of the Macaulay condition. Therefore, we must have $l(c) = 0$ as well, whence $\mathcal{C}(N) = \mathcal{C}(0)$. The theorem now follows from SMALL's theorem [19].

To date, no example of a noetherian ring has been found which is not right ideal invariant. In fact, LENAGAN has proved in [17] that every noetherian ring with right Krull dimension one is right ideal invariant. We present a slightly different proof of this fact ; the main work is done by the following lemma of LENAGAN's.

LEMMA 2.8 - *Let* R *be a noetherian ring with* $r.K\text{-}\dim(R) = 1$, *and assume* R *has no artinian right ideals. If* R/A *is a cyclic artinian right* R*-module, then* A *contains a regular element*.

Proof - See LENAGAN [16, Corollary 3.7].

THEOREM 2.9 (LENAGAN [17]) - *A noetherian ring* R *with right Krull dimension one is right ideal invariant*.

Proof - Let T be an ideal, A a right ideal. Obviously, we only have to consider the case $K\text{-}\dim(R/A)_R = 0$, and a standard reduction allows us to assume that R has no artinian right ideals. By Lemma 2.8, A contains a regular element c .
As $T/cT \cong c^iT/c^{i+1}T$ for all i , it follows from $K\text{-}\dim(R)_R = 1$ that $K\text{-}\dim(T/cT)_R \leq 0$. Thus $K\text{-}\dim(T/AT)_R \leq K\text{-}\dim(T/cT)_R \leq 0 = K\text{-}\dim(T/A)_R$.

REFERENCES

[1] G. CAUCHON - Sur l'intersection des puissances du radical d'un T-anneau noethérien, C.R. Acad. Sc. Paris 279 (1974), 91-93.

[2] G. CAUCHON - Anneaux semi-premiers noethériens à identités polynomiales, Bull. Soc. Math. France 104 (1976), 99 - 111.

[3] G. CAUCHON - Les Ṫ-anneaux, la condition (H) de Gabriel et ses conséquences, Comm. Algebra 4 (1976), 11-50.

[4] P. GABRIEL - Des catégories abéliennes, Bull. Soc. Math. France 90 (1962) 323-448.

[5] A.W. GOLDIE - The structure of noetherian rings, Lectures on Rings and Modules, Springer Lecture Notes 246 (1972), 213-321.

[6] A.W. GOLDIE - Oral communication.

[7] R. GORDON - Artinian quotient rings of FBN rings, J. Algebra 35 (1975) 304-307.

[8] R. GORDON and J.C. ROBSON - Krull dimension, Mem. Amer. Math. Soc. 133 (1973).

[9] I.N. HERSTEIN - A counterexample in noetherian rings, Proc. Nat. Acad. Sc. 54 (1965), 1036-1037.

[10] I.N. HERSTEIN and L. SMALL - The intersection of the powers of the radical in noetherian P.I. rings, Israel J. Math. 16 (1973), 176-180.

[11] A.V. JATEGAONKAR - A counter-example in ring theory and homological algebra, J. Algebra 12 (1969), 418-440.

[12] A.V. JATEGAONKAR - Jacobson's conjecture and modules over fully bounded noetherian rings, J. Algebra (1974), 103-121.

[13] G. KRAUSE - On fully left bounded left noetherian rings, J. Algebra 23 (1972), 88-99.

[14] G. KRAUSE - Descending chains of submodules and the Krull dimension of noetherian modules, J. Pure and Appl. Algebra 3 (1973), 385-397.

[15] G. KRAUSE - Transfinite powers of the Jacobson radical, to appear.

[16] T. LENAGAN - Artinian quotient rings of Macaulay rings, Proceedings of Conference at Kent State University, Springer Lecture Notes 542 (1977).

[17] T. LENAGAN - Noetherian rings with Krull dimension one, J. London Math. Soc. (2) 15 (1977), 41-47.

[18] W. SCHELTER - Essential extensions and intersection theorems, Proc. Amer. Math. Soc. 53 (1975), 328-330.

[19] L. SMALL - Orders in artinian rings, J. Algebra 4 (1966), 13-41.

[20] J.T. STAFFORD - Stable structure of non-commutative noetherian rings, J. Algebra, to appear.

[21] R. WARFIELD - Quotient rings for noetherian rings, unpublished notes, Leeds 1977.

AUTHOR'S ADDRESS

Department of Mathematics
The University of Manitoba
Winnipeg, Manitoba R3T 2N2
Canada

Manuscrit remis le 6 Juin 1977

CONDITIONS NOETHERIENNES DANS L'ANNEAU

DE POLYNOMES DE ORE $A[X,\sigma,\delta]$

par

Léonce LESIEUR

1 - Anneau de polynômes de Ore $A[X,\sigma,\delta]$.

Rappelons la définition. A est un anneau unitaire non nécessairement commutatif ; σ est un endomorphisme injectif de l'anneau unitaire A (on a donc $\sigma(1) = 1$), et δ une σ-dérivation de A :

$$\delta(a+b) = \delta(a) + \delta(b) \ ; \quad \delta(ab) = \sigma(a)\ \delta b + \delta(a)\ b \quad .$$

L'anneau $B = A[X,\sigma,\delta]$ est défini par l'ensemble des polynômes

$$a_0X^n + a_1X^{n-1} + \dots + a_n \ , \quad a_i \in A$$

avec les lois usuelles pour l'égalité, l'addition, la multiplication à gauche par un élément $a \in A$, tandis que la multiplication à droite de X par $a \in A$ est définie par :

$$Xa = \sigma(a)\ X + \delta(a) \ .$$

$B = A[X,\sigma,\delta]$ devient alors un anneau de polynômes non commutatif comme l'avait déjà remarqué O. ORE dès 1933 [4]. Il se trouve que les développements de l'algèbre non commutative depuis une quinzaine d'années, et en particulier ceux de l'algèbre noethérienne, donnent l'occasion de revenir assez souvent sur les anneaux de polynômes de Ore, au moins à titre d'exemples ou d'illustration de la théorie. Dans les résultats connus, on suppose le plus souvent que σ est un automorphisme de l'anneau unitaire A. On a par exemple le théorème suivant : si A est un anneau noethérien à gauche et si σ est un automorphisme de A, alors $A[X,\sigma,\delta]$ est noethérien à gauche. Les résultats qui suivent s'appliquent par contre à un endomorphisme injectif quelconque σ de A, et leur intérêt principal porte donc sur le cas où σ n'est pas surjectif. Ce n'est pas un cas totalement pathologique, comme le montrent les exemples suivants :

$A = \mathbb{C}$: il existe des morphismes injectifs σ de $\mathbb{C}$ <u>dans</u> lui-même

$A = k\,[Y]$, k corps commutatif : $\sigma : f(Y) \longmapsto f(Y^2)$

$A = k\,[Y]$, k corps commutatif de caractéristique p : σ est l'endòmorphisme de Frobenius $u \longmapsto u^p$.

2 - <u>Conditions noethériennes et σ -noethériennes à gauche dans</u> A .

Nous allons considérer les conditions suivantes dans l'anneau A :

(N) La condition noethérienne à gauche sur A .

(N_σ) La condition σ -noethérienne à gauche sur A .

Pour l'énoncer, nous appellerons $A\,\sigma(I)$ l'idéal à gauche engendré par $\sigma(I)$ dans A , I étant un idéal à gauche de A . Alors $\sigma(I)$ est un idéal à gauche dans $\sigma(A)$, mais pas dans A en général si σ n'est pas surjectif. On a :

$$A\,\sigma(I) = \left\{ \sum_{p=1}^{k} u_p\, \sigma(i_p) \ ;\ i_p \in I \right\} .$$

Appelons <u>suite</u> σ <u>-croissante</u> une suite d'idéaux à gauche :

$$(1) \qquad I_o \hookrightarrow I_2 \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow I_n \hookrightarrow I_{n+1} \hookrightarrow \cdots$$

telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$$\sigma(I_n) \subset I_{n+1} \ .$$

On dit alors que la <u>suite</u> σ <u>-croissante (1) est stationnaire à partir du rang</u> m , si : $\forall n \geq m$:

$$A\,\sigma(I_n) = I_{n+1}$$

La condition σ -noethérienne à gauche sur A exprime que <u>toute suite</u> σ <u>-croissante</u> <u>est stationnaire à partir d'un certain rang</u>.

Nous aurons également à considérer la propriété suivante :

(P_σ) I <u>et</u> J <u>étant deux idéaux à gauche de type fini de</u> A , <u>on a</u> :

$$\sigma(J) \subset A\,\sigma(I) \Longrightarrow J \subset I$$

Cette propriété s'exprime au moyen des éléments de l'anneau A par :

$$(2) \qquad \sigma(a) = \sum_{j=1}^{q} \lambda_j\, \sigma(b_j) \Longrightarrow a = \sum_{j=1}^{q} \mu_j\, b_j \ .$$

Afin de montrer que ces conditions σ -noethériennes ne sont pas sans objet, signalons deux exemples.

Propriété 2.1 - Si A est un anneau noethérien à gauche unitaire et σ un automorphisme de A, A vérifie les conditions (N), (N_σ) et (P_σ).

Preuve. (N) et (P_σ) sont immédiats. Pour établir (N_σ), on considère la suite croissante d'idéaux à gauche :

$$I_0 \subset \sigma^{-1}(I_1) \subset \sigma^{-2}(I_2) \subset \dots \subset \sigma^{-n}(I_n) \subset \dots$$

Propriété 2.2 - Si A est un anneau artinien simple, ou semi-simple, ou quasi-frobeniusien, et σ un endomorphisme injectif de A, A vérifie les conditions (N), (N_σ) et (P_σ).

Rappelons qu'un anneau quasi-frobeniusien peut être défini comme un anneau unitaire artinien à gauche et auto-injectif à droite, (cf. G. RENAULT [5] p. 102). Les anneaux artiniens simples ou semi-simples étant quasi-frobeniusiens, il suffit de démontrer la propriété 2.2 dans ce dernier cas.

1° (N) est vérifié

2° Nous allons démontrer (P_σ) et même une propriété plus forte (P'_σ) qui sera utile dans la suite pour le théorème 5.3 de transfert du paragraphe 5.

(P'_σ). On a dans l'anneau A :

$$(2') \qquad \sigma(a_i) = \sum_{j=1}^{q} \lambda_j \, \sigma(b_{ij}) \ ; \ i = 1,\dots,p \Longrightarrow a_i = \sum_{j=1}^{q} \mu_j \, b_{ij} \ ; \ i = 1,\dots,p .$$

Cette propriété (P'_σ) va résulter du lemme suivant :

Lemme 2.1 - Soit A quasi-frobeniusien. Les relations de dépendance linéaire :

$$(3) \qquad a_i = \sum_{j=1}^{q} \lambda_j \, b_{ij} \ ; \ i = 1,\dots,p$$

entre le vecteur (a_i) de A^p et les q vecteurs (b_{ij}) de A^p équivalent à la condition suivante :

(4) Quels que soient u_i tels que $\sum_{i=1}^{p} b_{ij} u_i = 0$ $(j = 1,\dots,q)$,

on a : $\sum_{i=1}^{p} a_i u_i = 0$.

Il est clair que (3) $\Longrightarrow$ (4), mais c'est la réciproque qui est intéressante. Pour $q=1$, la condition (4) prend la forme :

$$\sum_{i=1}^{p} b_i u_i = 0 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{p} a_i u_i = 0$$

et on doit démontrer que cette condition entraîne l'existence de $\lambda \in A$ tel que : $a_i = \lambda b_i$; $i = 1,\dots,p$.

Pour cela, on considère le A-homomorphisme à droite défini par :

$$\sum_{i=1}^{p} b_i u_i \longmapsto \sum_{i=1}^{p} a_i u_i \quad ;$$

il peut être étendu, puisque A est auto-injectif à droite, à un A-endomorphisme de **A** (pour sa structure de A-module à droite) dans lequel $1 \longmapsto \lambda$.
Mais : $b_i \longmapsto a_i$; donc $b_i = 1.b_i \longmapsto \lambda b_i$, d'où $a_i = \lambda b_i$.

Supposons alors la propriété vraie pour q et démontrons-là pour $q+1$. Nous avons donc d'après (4) :

$$\sum_{i=1}^{p} b_{ij} u_i = 0 \text{ implique } \sum_{i=1}^{m} a_i u_i = 0 \; ; \; j = 1, \dots, q+1 .$$

Mettons à part la dernière relation $\sum_{i=1}^{p} b_{i,q+1} u_i = 0$, et considérons les autres : $\sum_{i=1}^{p} b_{ij} u_i = 0$, $j = 1,\dots,q$. Si elles sont remplies, on peut définir un A-homomorphisme $f : x = \sum_{i=1}^{p} b_{i,q+1} u_i \longmapsto \sum_{i=1}^{p} a_i u_i$. Or x va décrire un idéal à droite I dans A , et f peut être étendu à un A-endomorphisme à droite de A dans lequel $1 \longmapsto \lambda_{p+1}$. On a alors :

$$x = 1.x \longmapsto \sum_{i=1}^{p} a_i u_i = \lambda_{q+1} \Big(\sum_{i=1}^{p} b_{i,q+1} u_i\Big) .$$

Donc les égalités $\sum_{i=1}^{p} b_{ij} u_i = 0$, $j = 1,\dots,q$ entraînent $\sum_{i=1}^{p} (a_i - \lambda_{q+1} b_{i,q+1}) u_i = 0$. L'hypothèse de récurrence faite sur q démontre alors l'existence de $\lambda_1,\dots,\lambda_q$ tels que : $a_i - \lambda_{q+1} b_{i,q+1} = \sum_{j=1}^{q} \lambda_j b_j$; $i = 1,\dots,p$, d'où l'égalité (3) pour l'entier $q+1$, et le lemme 2.1 est démontré.

La démonstration de (P'_σ) est alors très simple. Supposons qu'on ait l'égalité :

(5) $$\sigma(a_i) = \sum_{j=1}^{q} \lambda_j \, \sigma(b_{ij}) \; ; \; i = 1,\ldots,p \quad .$$

D'après le lemme, les relations à démontrer : $a_i = \sum_{j=1}^{q} \mu_j \, b_{ij}$; $i = 1,\ldots,p$, proviendront de :

$$j = 1,\ldots,q \; , \quad \sum_{i=1}^{p} b_{ij} \, u_i = 0 \longrightarrow \sum_{i=1}^{p} a_i \, u_i = 0 \; .$$

$$\text{Mais : } \sum_{i=1}^{p} b_{ij} \, u_i = 0 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{p} \sigma(b_{ij}) \, \sigma(u_i) = 0 \; ; \; j = 1,\ldots,q,$$

et il en résulte d'après (5) : $\sum_{i=1}^{p} \sigma(a_i) \; \sigma(u_i) = 0$, c'est-à-dire, puisque σ est injectif : $\sum_{i=1}^{p} a_i \, u_i = 0$. La propriété (P'_σ) est donc démontrée pour un anneau quasi-frobeniusien et un endomorphisme injectif quelconque σ de cet anneau. (P_σ) en résulte dans le cas particulier $i=1$.

3°) <u>Il reste à démontrer</u> (N_σ), c'est-à-dire la condition σ -noethérienne proprement dite. Supposons :

(1) $$I_0 \hookrightarrow I_1 \hookrightarrow I_2 \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow I_n \hookrightarrow I_{n+1} \hookrightarrow \cdots$$

Dans l'anneau A , qui est artinien à gauche, donc qui est un A-module à gauche de longueur finie $\ell(A)$, les idéaux à gauche I_n sont des A-modules à gauche de longueur finie $\ell(I_n) \leq \ell(A)$. Je dis que $\ell(I_n) \leq \ell(A\,\sigma(I_n))$. En effet, on peut choisir une suite de générateurs $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ de I_n tels que la suite d'idéaux Aa_1, $Aa_1 + Aa_2$, $Aa_1 + Aa_2 + Aa_3$,..., soit une suite maximale dans I_n . Elle aura donc pour longueur $\ell(I_n) = p$, et l'on a : $a_i \notin Aa_1 + Aa_2 + \ldots + Aa_{i-1}$. L'idéal à gauche $A\sigma(I_n)$ aura pour suite de générateurs $(\sigma(a_1), \sigma(a_2), \ldots, \sigma(a_p))$, avec la propriété :

$$\sigma(a_i) \notin A\sigma(a_1) + A\sigma(a_2) + \ldots + A\sigma(a_{i-1})$$

En effet, l'égalité $\sigma(a_i) = \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j \, \sigma(a_j)$ entraînerait d'après la propriété propriété (P_σ) :

$$a_i = \mu_1 \, a_1 + \ldots + \mu_{i-1} \, a_{i-1}$$

ce qui est contraire à l'hypothèse. Il existe donc une chaîne de longueur p dans $A\sigma(I_n)$, ce qui démontre $\ell(A\sigma(I_n)) \geqslant \ell(I_n)$.

Cela étant, la suite (1) implique :

$$\ell(I_o) \leqslant \ell(A\sigma(I_o)) \leqslant \ell(I_1) \leqslant \ldots \leqslant \ell(I_n) \leqslant \ell(A\sigma(I_n)) \leqslant \ell(I_{n+1}) \leqslant \ldots$$

d'où l'égalité à partir du rang m puisque $\ell(A)$ est un majorant de tous les termes. Pour $n \geqslant m$, l'égalité $A\sigma(I_n) = I_{n+1}$ résulte alors du théorème de Jordan-Hölder.

3 - <u>Conditions suffisantes pour que</u> $A[X,\sigma,\delta]$ <u>soit noethérien à gauche</u>

<u>Théorème</u> 3.1 - <u>Soit</u> A <u>un anneau unitaire</u>, σ <u>un endomorphisme injectif de l'anneau</u> A, δ <u>une</u> σ <u>-dérivation de</u> A. <u>Si</u> A <u>vérifie les conditions noethériennes et</u> σ <u>-noethériennes</u> (N) <u>et</u> (N_σ), <u>l'anneau de polynômes</u> $B = A[X,\sigma,\delta]$ <u>est noethérien à gauche</u>.

<u>Démonstration</u> - Soit I un idéal à gauche de l'anneau $B = A[X,\sigma,\delta]$. Si $f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_o \in I$, l'ensemble des coefficients a_n des polynômes de degré n appartenant à l'idéal I forme avec 0 un idéal à gauche dans A que nous appellerons $P_n(I)$. Comme $Xf = \sigma(a_n) X^{n+1} + \ldots \in I$, il est clair que :

$$(6) \qquad \sigma(P_n(I)) \subset P_{n+1}(I) \quad .$$

On a le lemme suivant :

<u>Lemme</u> 3.1 - I <u>et</u> J <u>étant deux idéaux à gauche de</u> B <u>tels que</u> $I \subset J$, <u>l'égalité</u> $P_n(I) = P_n(J)$ <u>supposée valable pour tout</u> n, <u>entraîne</u> $I = J$.

La démonstration est classique : Cf. C. FAITH [2], p. 341. On considère un polynôme f de degré minimum m appartenant à J et n'appartenant pas à I, soit $f = a_m X^m + \ldots \in J$. Comme $P_m(J) = P_m(I)$, il existe $g = a_m X^m + \ldots \in I$. On aurait alors $f-g \in J$, avec $d^\circ(f-g) < m$, d'où $f-g \in I$, et $f \in I$, ce qui est impossible, et le lemme est démontré.

Considérons alors la suite croissante d'idéaux à gauche de B :

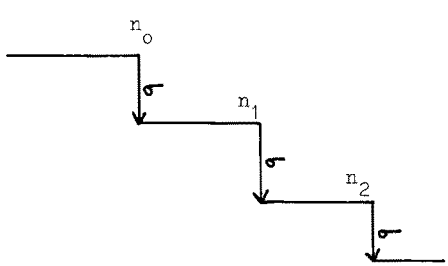
$$I_o \subset I_1 \subset I_2 \subset \ldots \subset I_n \subset \ldots$$

On en déduit le tableau à double entrée d'idéaux à gauche de l'anneau A :

$$
\begin{array}{ccccccc}
P_o(I_o) & & P_o(I_1) & \ldots & P_o(I_j) & \ldots \\
\downarrow\sigma & & \downarrow\sigma & & \downarrow\sigma & \\
P_1(I_o) & & P_1(I_1) & \ldots & P_1(I_j) & \ldots \\
\downarrow\sigma & & \downarrow\sigma & & \downarrow\sigma & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \\
P_i(I_o) & & P_i(I_1) & \ldots & P_i(I_j) & \ldots
\end{array}
$$

dans lequel les idéaux d'une même ligne forment une suite croissante d'après la définition de $P_n(I)$, et les idéaux d'une même colonne forment une suite σ-croissante en raison de l'inclusion (6).

D'après la condition noethérienne (N), les idéaux à gauche de la 1ère ligne sont stationnaires à partir du rang n_o . Considérons alors les idéaux à gauche de la 2^e ligne à partir de la colonne n_o ; ils sont stationnaires à partir du rang n_1 . Comme $P_o(I_{n_o})$ est injecté par σ dans $P_1(I_{n_o})$ et que $P_1(I_{n_o}) \subset P_1(I_{n_1})$, on a aussi $P_o(I_{n_o}) \xhookrightarrow{\sigma} P_1(I_{n_1})$ et on forme ainsi la suite σ-croissante



$$P_o(I_{n_o}) \xhookrightarrow{\sigma} P_1(I_{n_1}) \xhookrightarrow{\sigma} \ldots \xhookrightarrow{\sigma} P_k(I_{n_k}) \xhookrightarrow{\sigma} P_{k+1}(I_{n_{k+1}}) \xhookrightarrow{\sigma} \ldots$$

D'après la condition σ-noethérienne (N_σ), cette suite est σ-croissante à partir du rang m et on a donc pour $k \geqslant m$: $A\,\sigma(P_k(I_{n_k})) = P_{k+1}(I_{n_{k+1}})$.

Or on a les inclusions :

$$A\sigma(P_k(I_{n_k})) \subset P_{k+1}(I_{n_k}) \subset P_{k+1}(I_{n_{k+1}}) \subset \ldots \subset P_{k+1}(I_{n_{k+1}}) \ .$$

L'égalité des termes extrêmes entraîne celle des termes intermédiaires ; on en déduit par conséquent $n_{k+1} = n_k$ et par suite :

$$n_k = m \quad \text{dès que} \quad k \geqslant m \ .$$

On peut alors appliquer le lemme 3.1, d'où :

$$I_m = I_{m+1} = \ldots$$

et le théorème 3.1 est démontré.

Corollaire 3.1 - *Si* A *est noethérien à gauche, et* σ *un automorphisme de* A, $B = A[X, \sigma, \delta]$ *est noethérien à gauche*. Conséquence de la propriété 2.1.

Corollaire 3.2 - *Si* A *est artinien simple, ou semi-simple, ou quasi-frobeniusien,* $B = A[X, \sigma, \delta]$ *est noethérien à gauche quel que soit l'endomorphisme injectif* σ *de l'anneau* A *et la* σ*-dérivation* δ. Conséquence de la propriété 2.2.

Remarque. Lorsque A est artinien simple, G. CAUCHON et J.C. ROBSON [1] ont démontré tout récemment que $A[X, \sigma, \delta]$ est principal à gauche.

4 - *Transfert de la propriété d'anneau premier*

Théorème 4.1 - *Soit* A *un anneau unitaire,* σ *un endomorphisme injectif de l'anneau* A, δ *une* σ*-dérivation de* A. *Si* A *est premier et vérifie les conditions* σ*-noethériennes* (N), (N_σ) *et* (P_σ), *l'anneau de polynômes* $A[X, \sigma, \delta]$ *est premier et noethérien à gauche*.

Nous utilisons le lemme suivant, qui a son intérêt propre.

Lemme 4.1 - *Soit* A *un anneau unitaire noethérien à gauche vérifiant la condition* (P_σ) *pour l'endomorphisme injectif* σ *de* A. *Si* s *est régulier à droite, il en est de même de* $\sigma(s)$.

Supposons $u\,\sigma(s) = 0$, $u \neq 0$. L'anneau A étant noethérien à gauche, il existe un entier minimum n tel que :

$$\sigma^n(u) = \lambda_{n-1}\, \sigma^{n-1}(u) + \ldots + \lambda_1\, \sigma(u) + \lambda_0\, u \quad . \tag{7}$$

On a $n > 1$, car $\sigma(u) = \lambda_0 u \Longrightarrow \sigma(us) = \sigma(u)\,\sigma(s) = \lambda_0\, u\, \sigma(s) = 0$, donc $us = 0$ et $u = 0$. En multipliant l'égalité (7) par $\sigma(s)$, on obtient :

$$\sigma^n(u)\,\sigma(s) = \lambda_{n-1}\, \sigma^{n-1}(u)\,\sigma(s) + \ldots + \lambda_1\, \sigma(u)\,\sigma(s)$$

d'où, en appliquant la propriété (P_σ) :

$$\sigma^{n-1}(u)\, s = \mu_{n-1}\, \sigma^{n-2}(u)\, s + \ldots + \mu_1\, us$$

et, comme s est régulier à droite :

$$\sigma^{n-1}(u) = \mu_{n-1} \quad \sigma^{n-2}(u) + \dots + \mu_1 \ u$$

ce qui est contraire au choix de n minimum pour (7).

<u>Démonstration du théorème</u> 4.1 – Soit $B = A[X,\sigma,\delta]$, A noethérien à gauche premier satisfaisant la condition (P_σ). On vérifie aisément que l'endomorphisme injectif σ de A peut s'étendre à l'anneau de fractions à gauche A' de A , qui est artinien simple d'après le théorème de Goldie. Si $s^{-1}a \in A'$, on pose $\sigma(s^{-1}a) = (\sigma(s))^{-1} \ \sigma(a)$, ce qui est légitime puisque $\sigma(s)$ est régulier d'après le lemme 4.1, et on effectue les vérifications de routine nécessaires. Supposons alors :

$$\alpha B \beta = 0 \ , \quad \alpha = a_o + a_1 X + \dots + a_p X^p \neq 0 \ , \ \beta = b_o + b_1 X + \dots + b_q X^q \neq 0 \ .$$

On a donc $a_p \neq 0$, $b_q \neq 0$. L'hypothèse $\alpha B \beta = 0$ entraîne $\alpha A \beta = 0$, et, en prenant le terme de plus haut degré :

$$\forall \lambda \in A \ , \quad a_p \ \sigma^p(\lambda) \ \sigma^p(b_q) = 0 \quad .$$

Dans l'anneau de fractions à gauche A' , qui est quasi-simple, on a : $\sum_{i=1}^{h} \alpha_i \ b_q \ \beta_i = 1$, avec $\alpha_i = s^{-1} \ \ell_i$, s régulier, d'où $\sum_{i=1}^{h} \ell_i \ b_q \ \beta_i = s$ et, en appliquant σ^p : $\sum_{i=1}^{h} \sigma^p(\ell_i) \ \sigma^p(\ell_q) \ \sigma^p(\beta_i) = \sigma^p(s)$.

En multipliant à gauche par a_p , il vient : $a_p \ \sigma^p(s) = 0$, ce qui entraînerait $a_p = 0$ puisque $\sigma^p(s)$ est régulier. L'anneau B est bien premier.

C'est le cas si A est noethérien à gauche premier, σ étant un automorphisme de A et δ une σ-dérivation quelconque, ou bien encore :

<u>Corollaire</u> 4.1 – <u>Si</u> A <u>est artinien simple</u>, $A[X,\sigma,\delta]$ <u>est noethérien à gauche premier quel que soit</u> σ , <u>endomorphisme injectif de</u> A , <u>et</u> δ , σ <u>-dérivation de</u> A .

5 – <u>Transfert des conditions</u> σ <u>-noethériennes</u> (N), (N_σ) <u>et</u> (P'_σ) <u>lorsque</u> $\delta = 0$.

Soit A un anneau unitaire vérifiant les conditions noethériennes (N) et (N_σ). Lorsque $\delta = 0$, il existe un endomorphisme injectif de l'anneau $B = A[X,\sigma]$

prolongeant σ de façon naturelle, et défini par $\sigma(X) = X$, donc :

$$P = a_o + a_1X + \ldots + a_nX^n \longrightarrow \sigma(P) = \sigma(a_o) + \sigma(a_1)X + \ldots + \sigma(a_n)X^n \quad .$$

On démontre alors le théorème de transfert suivant :

<u>Théorème</u> 5.1 (de transfert des conditions σ -noethériennes).

<u>Soit</u> A <u>un anneau vérifiant les conditions noethériennes</u> (N) <u>et</u> (N_σ) <u>pour un endomorphisme injectif</u> σ . <u>Alors l'anneau</u> $B = A[X,\sigma]$ <u>vérifie aussi les conditions</u> σ <u>-noethériennes</u> (N) <u>et</u> (N_σ).

Le transfert de la condition noethérienne à gauche (N) a été démontré au théorème 3.1 sans supposer $\delta = 0$.

La démonstration de la condition σ -noethérienne (N_σ) est analogue. On adapte les lemmes de la façon suivante :

<u>Lemme</u> 5.1 - I <u>et</u> J <u>étant deux idéaux à gauche de</u> B <u>tels que</u> $\sigma(I) \subset J$, <u>l'égalité</u> $A\,\sigma(P_n(I)) = P_n(J)$ <u>supposée valable pour tout</u> n <u>entraîne</u> $B\sigma(I) = J$.

La démonstration est analogue à celle du lemme 3.1. Considérons un polynôme f de degré minimum m appartenant à J et n'appartenant pas à $B\,\sigma(I)$; soit $f = a_mX^m + \ldots \in J$. Comme on a $P_m(J) = A\,\sigma(P_m(I))$, le coefficient $a_m \in P_m(J)$ peut s'écrire sous la forme $a_m = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, \sigma(b_i)$ avec $f_i = b_iX^m + \ldots \in I$. On en déduit $f - \sum \lambda_i\, \sigma(f_i) = g \in J$, avec $d^o\, g < m$, et $g \notin B\,\sigma(I)$, ce qui est contraire au choix de m .

<u>Démonstration du théorème</u> - Soit la suite σ -croissante d'idéaux à gauche dans B :

$$I_o \overset{\sigma}{\hookrightarrow} I_1 \overset{\sigma}{\hookrightarrow} \cdots$$

On en déduit le tableau à double entrée d'idéaux à gauche de A

$$\begin{array}{ccccccc}
P_o(I_o) & \overset{\sigma}{\hookrightarrow} & P_o(I_1) & \overset{\sigma}{\hookrightarrow} \cdots & P_o(I_j) & \overset{\sigma}{\hookrightarrow} & \cdots \\
\downarrow{\scriptstyle\sigma} & & \downarrow{\scriptstyle\sigma} & & \downarrow{\scriptstyle\sigma} & & \\
P_1(I_o) & \overset{\sigma}{\hookrightarrow} & P_1(I_1) & \overset{\sigma}{\hookrightarrow} \cdots & P_1(I_j) & \overset{\sigma}{\hookrightarrow} & \cdots \\
\downarrow{\scriptstyle\sigma} & & \downarrow{\scriptstyle\sigma} & & \downarrow{\scriptstyle\sigma} & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
P_i(I_o) & \overset{\sigma}{\hookrightarrow} & P_i(I_1) & \overset{\sigma}{\hookrightarrow} \cdots & P_i(I_j) & \overset{\sigma}{\hookrightarrow} & \cdots
\end{array}$$

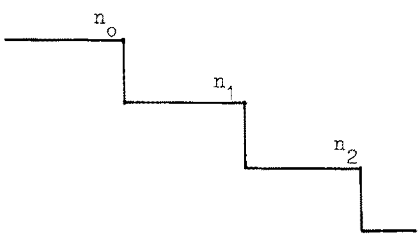
dans lequel les lignes et les colonnes forment des suites σ-croissantes d'idéaux à gauche de A . D'après la condition σ-noethérienne (N_σ) dans A , la 1ère ligne est σ-stationnaire à partir du rang n_o . On considère la suite σ-croissante constituée par la 2ème ligne à partir de n_o ; elle sera σ-stationnaire à partir du rang n_1 , et ainsi de suite. Considérons alors la suite σ-croissante : $P_o(I_o) \overset{\sigma}{\hookrightarrow} P_o(I_1) \overset{\sigma}{\hookrightarrow} \cdots \overset{\sigma}{\hookrightarrow}$

$$P_o(I_{n_o}) \overset{\sigma}{\hookrightarrow} P_1(I_{n_o}) \overset{\sigma}{\hookrightarrow} P_1(I_{n_o+1}) \overset{\sigma}{\hookrightarrow} \cdots \overset{\sigma}{\hookrightarrow} P_1(I_{n_1})$$

$$\overset{\sigma}{\hookrightarrow} P_2(I_{n_1}) \hookrightarrow P_2(I_{n_1+1})$$

$$\hookrightarrow P_2(I_{n_2}) \overset{\sigma}{\hookrightarrow} \cdots$$

D'après la condition σ-noethérienne (N_σ), cette suite est σ-stationnaire à partir d'un certain rang h . On choisit l'entier m tel que $P_m(I_{n_m})$ se place



dans la suite précédente au delà de ce rang h . On aura donc la suite partielle :

$$P_m(I_{n_m}) \overset{\sigma}{\hookrightarrow} P_{m+1}(I_{n_m}) \overset{\sigma}{\hookrightarrow} P_{m+1}(I_{n_m+1}) \overset{\sigma}{\hookrightarrow} \cdots \overset{\sigma}{\hookrightarrow} P_{m+1}(I_{n_{m+1}})$$

avec les propriétés :

$$A\sigma(P_m(I_{n_m})) = P_{m+1}(I_{n_m}) \ ; \ A\sigma(P_{m+1}(I_{n_m})) = P_{m+1}(I_{n_m+1}) \ ; \ \ldots$$

$$A\sigma(P_{m+1}(I_{n_{m+1}-1})) = P_{m+1}(I_{n_{m+1}}) \ .$$

Cela prouve que : $n_{m+1} = n_m$, et on voit de même que $n_k = n_m$ dès que $k \geqslant m$. On peut alors appliquer le lemme 5.1, qui démontre :

$$I_m = I_{m+1} = \ldots$$

c'est-à-dire le théorème 5.1.

Toujours dans le cas $\delta = 0$, on peut compléter le théorème 5.1 en démontrant que les conditions noethériennes (N) et (N_σ) dans A sont <u>nécessaires</u> pour que l'anneau $B = A[X, \sigma]$ soit noethérien à gauche.

<u>Théorème</u> 5.2 - <u>Si l'anneau</u> $B = A[X, \sigma]$ <u>est noethérien à gauche</u>, <u>l'anneau</u> A <u>vérifie les conditions noethériennes</u> (N) <u>et</u> (N_σ).

<u>Démonstration</u> - <u>Pour</u> (N) il suffit de démontrer que, si I est un idéal à gauche de A , l'idéal à gauche BI engendré par I dans B vérifie :

$$BI \cap A = I .$$

En effet, B étant noethérien à gauche, l'idéal BI est engendré par un nombre fini de générateurs $i_1, \dots, i_p \in I$. Soit alors $x = f_1 i_1 + \dots + f_p i_p \in BI \cap A$, avec $f_j \in B$, $j = 1, \dots, p$. En prenant le terme de degré zéro du second membre, on obtient :

$$x = a_1 i_1 + \dots + a_p i_p \in I .$$

(Cette égalité ne serait plus vraie si $\delta \neq 0$).

<u>Pour</u> (N_σ) , on considère la suite d'idéaux à gauche de A σ-croissante : $I_0 \overset{\sigma}{\hookrightarrow} I_1 \overset{\sigma}{\hookrightarrow} \dots$, et, dans $B = A[X, \sigma]$, la suite croissante avec n d'idéaux à gauche :

$$BI_0 + BI_1 + \dots + BI_n X^n .$$

La condition noethérienne à gauche dans B implique l'existence de m tel que, pour $n > m$, on ait :

$$I_{n+1} X^{n+1} \subset BI_0 + BI_1 X + \dots BI_n X^n .$$

Donc, quel que soit $i_{n+1} \in I_{n+1}$, on a en prenant le terme $i_{n+1} X^{n+1}$, l'égalité :

$$i_{n+1} = \sum \lambda_0 \sigma^{n+1}(i_0) + \sum \lambda_1 \sigma^n(i_1) + \dots + \sum \lambda_n \sigma(i_n) ,$$

les $\sum$ désignant des sommes finies. Or le 2ème membre appartient par hypothèse à $A\sigma(I_n)$, ce qui démontre :

$$I_{n+1} = A\sigma(I_n) \quad \text{dès que } n > m .$$

<u>Corollaire</u> 5.1 - <u>Si</u> $B = A[X, \sigma]$ <u>est noethérien à gauche</u>, B <u>est également</u> σ<u>-noethérien</u> <u>à gauche</u>.

<u>Corollaire</u> 5.2 - <u>Si</u> A <u>est noethérien et</u> σ <u>-noethérien à gauche, il en est de même pour</u> $A[X_1, X_2, \dots, X_n, \sigma]$.

Enfin, on peut noter également la propriété de transfert de la condition (P'_σ) du paragraphe 2 .

<u>Théorème</u> 5.3 (Transfert de (P'_σ)) - <u>Si l'anneau</u> A <u>vérifie la propriété</u> (P'_σ), <u>il en est de même de l'anneau</u> $B = A[X, \sigma]$.

Ecrivons en effet dans l'anneau B les égalités :

$$(8) \qquad \sigma(A_i) = \sum_{j=1}^{q} \Lambda_j \, \sigma(B_{ij}) \quad , \quad i = 1, \dots, p \ .$$

Explicitons les polynômes :

$$A_i = \sum_{r=o}^{n} a_{ir} X^r \quad , \quad B_{ij} = \sum_{r=1}^{n} b_{ijr} X^r \quad , \quad \Lambda_j = \sum_{r=1}^{n} \lambda_{jr} X^r$$

n étant le degré maximum, certains des coefficients pouvant être nuls. Les égalités (8) donnent dans A :

$$(9) \qquad \sigma(a_{ir}) = \sum_{\substack{j=1,\dots,q \ ; \\ s=0,\dots,r}} \lambda_{js} \, \sigma^{s+1}(b_{ij,r-s}) \ ; \quad i = 1,\dots,p \ ; \quad r = 0,\dots, n \ .$$

La condition (P'_σ) valable dans l'anneau A peut s'appliquer aux $p(n+1)$ équations (9) pour remplacer les $q(n+1)$ coefficients λ_{js} par des termes $\sigma(\mu_{js})$. On obtient ainsi :

$$A_i = \sum_{j=1}^{q} \mu_j \, B_{ij} \quad ; \quad i = 1, \dots, p$$

où le polynôme μ_j est $\sum_{r=o}^{n} \mu_{jr} X^r$. La propriété (P'_σ) est donc démontrée dans B .

<u>Corollaire</u> 5.3 - <u>Si</u> A <u>est un anneau artinien simple, ou semi-simple, ou quasi-frobeniusien, et si</u> σ <u>est un endomorphisme injectif de</u> A , <u>l'anneau de polynômes de Ore</u> $A[X_1, X_2, \dots, X_n, \sigma]$ <u>vérifie les conditions noethériennes</u> (N) <u>et</u> (N_σ) <u>et la condition</u> (P'_σ) .

6 - Remarques et problèmes

1. Si l'on suppose $\delta = 0$ et A artinien simple (resp. semi-simple), l'anneau $B = A[X, \sigma]$ est noethérien à gauche (Corollaire 3.1) et l'idéal $BX = \mathcal{P}$ est bilatère premier (resp. semi-premier). J'ai démontré [3] que la condition de Ore à gauche est vérifiée dans B pour les éléments réguliers modulo $\mathcal{P}$. Cette démonstration est même à l'origine de ce travail, car les conditions (N), (N_σ) et (P'_σ) y jouent un rôle.

2. Sans avoir étudié systématiquement l'indépendance des conditions (N), (N_σ), (P_σ), (P'_σ), je peux noter le résultat suivant :

(N) et (P_σ) n'impliquent pas (N_σ). Il suffit de prendre l'anneau $A = k[Y]$, k corps commutatif, et l'endomorphisme $\sigma : f(Y) \longmapsto f(Y^2)$. On considère l'idéal à gauche $I = AY$ pour lequel $\sigma(I) \subset I$; si (N_σ) était vérifiée la suite σ-croissante :

$$I \underset{\sigma}{\hookrightarrow} I \underset{\sigma}{\hookrightarrow} \cdots \hookrightarrow I \underset{\sigma}{\hookrightarrow} \cdots$$

serait σ-stationnaire, ce qui donnerait $I = A\,\sigma(I)$. Or on a $A\,\sigma(I) = A\,Y^2$ et $I = AY \neq AY^2$. De plus, le lecteur pourra vérifier facilement que les conditions (P_σ) et (P'_σ) sont satisfaites. Par contre, si A est artinien à gauche, (P_σ) implique (N_σ) comme on l'a vu au paragraphe 2.

3. Enfin, il reste à étudier le cas où $\delta \neq 0$, et d'abord les extensions possibles de σ et δ, qui sont définis sur A, à l'anneau $B = A[X, \sigma, \delta]$. J'ai des résultats dans cette voie dans deux cas intéressants : le cas où $\sigma = \mathrm{Id}$, et le cas où σ et δ sont permutables.

Références

[1] G. Cauchon et J.C. Robson - Endomorphismes et dérivations dans les anneaux artiniens simples ; article en préparation

[2] C. Faith - Algebra : Rings, Modules and Categories I ; Die Grundlehren der Math. Wiss ; Band 190, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New-York, (1973)

[3] L. Lesieur - Sur les anneaux de polynômes de Ore $A[X,\sigma]$, A étant un anneau noethérien à gauche. Réunion des Mathématiciens d'expression latine, Palma de Mallorca, (sept. 1977)

[4] O. Ore - On a special class of polynomials. Trans. Amer. Math. Soc. 35, p. 559-584 (1933)

[5] G. Renault - Algèbre non commutative ; Collection "Varia Mathematica", Paris, Gauthier-Villars, (1975)

Manuscrit reçu le 14 Mars 1977

PROPRIETES DE TRANSFERT DES EXTENSIONS D'ORE

par

Elena WEXLER-KREINDLER

§1 - Introduction

Dans toute la suite tous les anneaux seront supposés associatifs et unitaires.

Nous dirons qu'un anneau A est muni d'un couple différentiel (τ,δ) si τ est un endomorphisme injectif de A, $\tau(1) = 1$ et si δ est une τ-dérivation de A, i.e. un endomorphisme du groupe abélien sous-jacent à A, qui vérifie

$$\forall a \in A , \quad \forall b \in A , \quad \delta(ab) = \tau(a)\ \delta(b) + \delta(a)\ b \ .$$

Si τ est l'identité, δ est une dérivation usuelle de A.

Un sur anneau R de A, ayant même unité que A, s'appelle extension d'Ore de A associée au couple différentiel (τ,δ), si R contient un élément t, tel que l'ensemble $\{t^n \in R \mid n \in \mathbb{N}\}$ soit une base du A-module à gauche ${}_A R$ et tel que pour tout $a \in A$, $ta = \tau(a)t + \delta(a)$. Notation : $R = A[t\ ;\tau,\delta]$. Les éléments de R sont des polynômes en t à coefficients dans A et ces derniers ne commutent pas avec t. Le <u>degré</u> et le <u>coefficient directeur</u> d'un élément non nul f de $A[t\,;\tau,\delta]$ ont leur signification usuelle dans un anneau de polynômes. Notation : $\deg(f)$ et $c(f)$. Nous allons désigner par $U(A)$ le groupe des éléments inversibles de A, par $Z(A)$ son centre et par $\mathrm{Fix}(\tau/A)$ l'ensemble $\{a\in A \,/\, \tau(a) = a\}$.

Ces "anneaux de polynômes" ont été introduits par O. Ore (14), qui a montré que si K est un corps, alors $K[t\,;\tau,\delta]$ est principal à gauche et que si en plus τ est surjectif, alors c'est aussi un anneau principal à droite. La théorie des extensions d'Ore apparaît comme une bonne source de "mauvais exemples" en algèbre non-commutative, spécialement lorsque τ n'est pas surjectif. C'est là qu'on trouve des anneaux admettant des corps de fractions seulement d'un seul côté, ou bien des anneaux héréditaires à gauche et dont la dimension globale à droite est un entier positif quelconque ou bien infinie (v. (10) et (11)). On peut trouver un aperçu des résultats les plus connus dans (4), (6) et (7).

Dans ce qui suit nous présentons une classification des extensions d'Ore (§2), une étude de certains cas où la quasi-simplicité de l'anneau A entraîne la même propriété pour son extension d'Ore (§3), ainsi que certains résultats de A.V. Jategaonkar ((12) et (13)) sur les extensions d'Ore d'anneaux semi-simples et d'ordres dans des anneaux artiniens à gauche, associées à un endomorphisme injectif, dont le théorème final est le théorème 7 du §4. Le choix de réunir dans un même exposé ces propriétés permet entre autres de prouver par des exemples, peut-être moins connus, l'existence des différents types d'extensions d'Ore.

§2 - <u>Classification</u>

<u>Lemme</u> 1 - <u>Pour une extension d'Ore</u> $R = A[t\,;\tau,\delta]$ <u>de l'anneau</u> A, <u>il y a équivalence entre</u> :

i) $s = xt + y$, <u>avec</u> $(x,y)\in U(A)\times A$;

ii) $R = A[s\,;\tau',\delta']$ <u>et les éléments de</u> R <u>ont même degré par rapport aux bases</u> $\{t^n\,;\,n\in\mathbb{N}\}$ <u>et</u> $\{s^n\,;\,n\in\mathbb{N}\}$.

<u>Si ces conditions sont remplies, alors on a</u> :

$$(*)\quad \forall a\in A\,,\ \tau'(a) = x\,\tau(a)x^{-1} \quad \text{et} \quad \delta'(a) = ya - \tau'(a)y + x\,\delta(a)\,.$$

Nous dirons que les couples (τ,δ) et (τ',δ') de A sont <u>équivalents</u>, s'ils vérifient la condition (*) du lemme 1 . C'est une relation d'équivalence dans l'ensemble des couples différentiels sur A . Si τ est un endomorphisme injectif de l'anneau A et $x \in A$, alors l'application $a \longmapsto xa - \tau(a)x$ est une τ-dérivation de A , appelée τ-dérivation <u>intérieure</u> définie par x .

Soit $R = A[t\,;\tau,\delta]$; τ est un automorphisme intérieur de A si et seulement si toute la classe d'équivalence de A contient seulement des automorphismes intérieurs ; dans ce cas cette classe contient le couple $(1,\delta')$, δ' étant une dérivation usuelle. De même, δ est τ-intérieure si et seulement si toute la classe de (τ,δ) contient seulement des dérivations intérieures, auquel cas cette classe contient le couple $(\tau', 0)$ où 0 est la dérivation nulle.

Lorsque A est un corps, $\tau(A) = A$ et si ni τ ni δ ne sont intérieurs, on a l'inclusion $Z(A) \subsetneq \operatorname{Ker}\delta \cap \operatorname{Fix}(\tau/A)$. Dans (4) P.M. Cohn pose le problème d'étendre ce résultat lorsque τ n'est pas surjectif. Nous allons montrer que le même résultat reste valable dans les cas suivants :

a) A corps et $\tau(A) \neq A$

b) A quasi-simple et $\tau(A) = A$. C'est une conséquence du théorème suivant (17) :

<u>Théorème</u> 1 - <u>Toute extension d'Ore</u> R , <u>associée à un couple différentiel</u> (τ,δ) <u>de l'anneau</u> A , <u>vérifie une des conditions suivantes</u> :

1°) <u>il existe</u> $x \in R$, <u>tel que</u> $R = A[x]$;

2°) <u>il existe</u> $x \in R$ <u>et une dérivation usuelle</u> δ' <u>de</u> A , <u>tels que</u> $R = A[t\,;\delta']$;

3°) <u>il existe</u> $x \in R$ <u>et un endomorphisme injectif</u> τ' <u>de</u> A , <u>tels que</u> $R = A[t\,;\tau']$;

4°) τ <u>laisse fixes les éléments du centre</u> $Z(A)$ <u>et</u> $\delta(Z(A)) \cap U(A) = \emptyset$;

5°) τ <u>ne laisse pas fixes les éléments du centre</u> $Z(A)$ <u>et</u> $(1-\tau)(Z(A)) \cap U(A) = \emptyset$.

La démonstration s'obtient à partir des lemmes suivants, où A est un anneau, sur lequel est défini un couple différentiel (τ,δ).

<u>Lemme</u> 2 - <u>Si</u> $z \in Z(A)$ <u>et</u> $\delta_{\delta(z)}$ <u>est la</u> τ-<u>dérivation intérieure de</u> A <u>définie par</u> $\delta(z)$, <u>alors pour tout</u> $a \in A$, $\delta_{\delta(z)}(a) = (z - \tau(z))\,\delta(a)$.

Lemme 3 - Si τ ne laisse pas fixes les éléments du centre $Z(A)$ et s'il existe $z \in Z(A)$ avec $z - \tau(z) \in U(A)$, alors δ est intérieure, définie par $(z-\tau(z))^{-1}\delta(z)$.

Lemme 4 - Si τ laisse fixes les éléments du centre et si celui-ci contient un élément z dont la dérivée est inversible, alors τ est intérieur et défini par $\delta(z)$.

Lorsque A est un corps, la condition 5° du théorème 1 est contradictoire et par conséquent, si ni τ ni δ ne sont intérieurs, alors $Z(A) \subseteq \mathrm{Fix}\,(\tau/A)$ et $\delta(Z(A)) = 0$. Lorsque A est un corps commutatif, la condition 4° coïncide avec 1° et par conséquent ou bien τ, ou bien δ sont intérieurs. Dans ce cas, si $\tau(A) \neq A$, alors δ est intérieure.

Corollaire - Soit (τ,δ) un couple différentiel défini sur l'anneau quasi-simple A et soit $\tau(A) = A$. Si ni τ ni δ ne sont intérieurs, alors $Z(A) \subseteq \mathrm{Fix}(\tau/A)$ et $\delta(Z(A)) = \{0\}$.

En effet, dans ce cas $Z(A)$ est un corps commutatif, $\tau(Z(A)) = Z(A)$ et par conséquent 5° est contradictoire. Il reste que $A[t\,;\tau,\delta]$ vérifie 4°.

Dans le paragraphe suivant on va exposer un exemple, dû à P.M. Cohn (3), d'extension d'Ore du type 4° d'un corps, où τ n'est pas surjectif et δ n'est pas intérieure. Dans le dernier paragraphe nous allons construire un exemple d'extension d'Ore d'un anneau semi-simple A qui vérifie la condition 5°, où $\tau(A) \neq A$ et δ n'est pas intérieure.

§3 - Extensions d'Ore d'anneaux quasi-simples

Lorsque A est un anneau quasi-simple de caractéristique 0 et δ est une dérivation non intérieure de A, l'extension $R = A[t\,;\delta]$ est quasi-simple et $Z(R) = \mathrm{Ker}\,\delta \cap Z(A)$, cf. (1). Ce théorème peut être obtenu à partir d'un résultat quelque peu plus général, qu'on va établir plus loin.

Donnons d'abord quelques résultats techniques, pour un couple différentiel (τ,δ) de l'anneau A, avec $\tau(A) = A$.

<u>Lemme</u> 5 - <u>Pour tout entier</u> $n \geqslant 0$, <u>l'application</u> $\delta_n = \sum_{k=0}^{n} \tau^k \delta \tau^{-k}$ <u>est une</u> τ<u>-dérivation de</u> A . <u>Si</u> δ <u>est intérieure et définie par</u> x , <u>alors</u> δ_n <u>est intérieure et définie par</u> $\sum_{k=0}^{n} \tau^k(x)$.

<u>Lemme</u> 6 - <u>Pour tout élément</u> a <u>de</u> A <u>et tout entier</u> $n \succ 1$, <u>il existe</u> $p_{na} \in A[t\,;\tau,\delta]$ <u>de degré</u> $\leqslant n-2$, <u>tel que</u>

$$t^n a = \tau^n(a)\, t^n + \delta_{n-1}\, \tau^{n-1}(a)\, t^{n-1} + p_{na} .$$

Dans ce qui suit nous allons supposer que A est quasi-simple, que $\tau(A) = A$ et nous allons établir quelques résultats concernant les idéaux bilatères des extensions d'Ore $A[t\,;\tau,\delta]$. Une partie de ces résultats sont analogues à ceux présentés, pour le cas d'un <u>corps</u> A de coefficients, par G. Cauchon dans son exposé au Colloque d'algèbre qui a eu lieu en juin 1976 à Orsay en l'honneur du professeur L. Lesieur.

<u>Proposition</u> 1 - <u>Tout idéal bilatère non nul</u> I <u>d'une extension d'Ore</u> $R = A[t\,;\tau,\delta]$ <u>d'un anneau quasi-simple</u> A <u>est principal à gauche et à droite et il est engendré par un polynôme unitaire</u> $f = t^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i$, <u>tel que pour tout</u> $a \in A$, $fa = \tau^n(a) f$ <u>et il existe</u> $c \in A$, <u>tel que</u> $tf = f(t+c)$.

<u>Preuve</u> - Soit I un idéal non nul de R de degré minimum n , i.e. $n = \min\{\deg(f) \mid 0 \neq f \in I\}$. On désigne par $C_n(I) = \{0\} \cup \{a \in A\} \mid \exists f \in I$, $f = at^n + f_1$, $\deg(f_1) < n\}$. $C_n(I)$ est un idéal à gauche non nul de A et, puisque τ est surjectif, c'est aussi un idéal à droite, par conséquent $C_n(I) = A$ et il existe $f \in I$, tel que $f = t^n + g$, où $\deg(g) < n$. Il est immédiat que f est unique avec ces propriétés. On utilise le lemme 6 et on montre que tout élément non nul de I est divisible à gauche et à droite par f , d'où $I = Rf = fR$. Alors pour tout $a \in A$, $fa \in I$ et il existe $b \in A$, tel que $fa = bf$. Or $c(fa) = \tau^n(a)$, d'où $b = \tau^n(a)$. De même $tf \in I$ et il existe $g \in R$ de degré 1 , avec $tf = fg$ et puisque f est unitaire $g = t+c$, $c \in A$.

Soit τ un automorphisme non intérieur d'un anneau quelconque A . Nous désignons par $\hat{\tau}$ l'image de τ dans $\mathrm{Aut}(A)/\mathrm{Int}(A)$ par la surjection canonique et par $\mathrm{Int}_\tau(A)$ l'ensemble des automorphismes intérieurs de A qui sont définis par des éléments inversibles de A et laissés fixes par τ . $\mathrm{Int}_\tau(A)$ est un sous-groupe de $\mathrm{Int}(A)$ et un sous-groupe normal du sous-groupe $\langle \tau \rangle \mathrm{Int}_\tau(A)$ de $\mathrm{Aut}(A)$, car τ

commute avec tout élément de $\mathrm{Int}_\tau(A)$. Nous désignons par τ^* l'image de τ par la surjection canonique de $\langle\tau\rangle\,\mathrm{Int}_\tau(A)$ sur le groupe cyclique $\langle\tau\rangle\,\mathrm{Int}_\tau(A)/\mathrm{Int}_\tau(A)$ engendré exactement par τ^*. Dans ces conditions on a le résultat suivant.

Lemme 7 -

a) Le groupe $\langle\hat{\tau}\rangle$ est fini si et seulement si $\langle\tau^*\rangle$ est fini ;

b) Soient $s = |\langle\hat{\tau}\rangle|$ et $m = |\langle\tau^*\rangle|$ finis. Alors s divise m et $m/s = [\langle\tau\rangle \cap \mathrm{Int}(A) : \langle\tau\rangle \cap \mathrm{Int}_\tau(A)]$;

c) Soit $u \in \mathbb{N}$, tel que $\tau^u \in \mathrm{Int}_\tau(A)$. Alors m divise u et $a^{-\frac{u}{m}}\,y \in Z(A)$, où a et y sont des éléments inversibles de A, laissés fixes par τ, qui définissent τ^m et τ^u, respectivement.

Preuve [1)]

a) Notons que l'ordre de $\hat{\tau}$ est le plus petit entier positif s, tel que $\tau^s \in \mathrm{Int}(A)$, s'il en existe, sinon $|\langle\hat{\tau}\rangle|$ est infini. Soit $b \in U(A)$, tel que τ^s soit intérieur et défini par b. Posons $c = \tau^{s-1}(b) \ldots \tau(b)b$. Alors $\tau(c) = bcb^{-1} = \tau^s(c)$. Or $\tau^s(c) = \tau^{2s-1}(b) \ldots \tau^s(b) = c$, car $\tau^s(b) = b$. On en déduit $c \in \mathrm{Fix}(\tau/U(A))$. On vérifie que $\tau^{s^2}(x) = cxc^{-1}$ pour tout $x \in A$, et $\tau^{s^2} \in \mathrm{Int}_\tau(A)$, τ^* d'ordre fini. La réciproque est évidente.

b) Les isomorphismes

$$\langle\tau^*\rangle = \langle\tau\rangle\,\mathrm{Int}_\tau(A)/\mathrm{Int}_\tau(A) \simeq \langle\tau\rangle/\langle\tau\rangle \cap \mathrm{Int}_\tau(A)$$

$$\langle\hat{\tau}\rangle = \langle\tau\rangle\,\mathrm{Int}(A)/\mathrm{Int}(A) \simeq \langle\tau\rangle/\langle\tau\rangle \cap \mathrm{Int}(A) \simeq$$

$$\simeq (\langle\tau\rangle/\langle\tau\rangle \cap \mathrm{Int}_\tau(A))/(\langle\tau\rangle \cap \mathrm{Int}(A)/\langle\tau\rangle \cap \mathrm{Int}_\tau(A))$$

prouvent l'assertion.

c) Soient a et y deux éléments de $\mathrm{Fix}(\tau/U(A))$, tels que pour tout $x \in A$, on ait $\tau^m(x) = axa^{-1}$ et $\tau^u(x) = yxy^{-1}$. Alors $\tau^{*u} = 1$ et m divise u. Pour tout $x \in A$, on a

$$a^{-\frac{u}{m}}\,y\,x\,y^{-1}\,a^{\frac{u}{m}} = a^{-\frac{u}{m}}\,\tau^u(x)\,a^{\frac{u}{m}} = x$$

ce qui prouve $a^{-\frac{u}{m}}\,y \in Z(A)$.

---

1) La démonstration du fait de $\tau^s \in \mathrm{Int}(A)$ entraîne $\tau^{s^2} \in \mathrm{Int}_\tau(A)$ nous a été communiquée par G. Cauchon. Nous l'en remercions.

Le lemme précédent permet de déterminer les idéaux bilatères de l'extension d'Ore $A[t\,;\tau]$ d'un anneau quasi-simple. Par la suite A est de nouveau supposé quasi-simple.

Lemme 8 - L'élément non nul $f \in R = A[t\,;\tau]$, $f = t^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i$ engendre un idéal bilatère Rf si et seulement si $tf = ft$ et pour tout $x \in A$ et tout entier $i \in [0,n-1]$, $a_i\,\tau^i(x) = \tau^n(x)\,a_i$. Dans ce cas, les coefficients non nuls de f sont inversibles et laissés fixes par τ.

Preuve - On utilise la proposition 1 et on note que $t^n x = \tau^n(x)\,t^n$, pour tout $x \in A$. Alors $\forall i \in [0,n-1]$, $\forall x \in A$, $a_i\,\tau^i(x) = \tau^n(x)\,a_i$. Si $a_i \neq 0$, alors $a_i A = A a_i$ et c'est un idéal bilatère non nul de A, par conséquent $a_i A = A$ et a_i est inversible. De $tf = f(t+c)$ on déduit

$$t^{n+1} + \sum_{i=0}^{n-1} \tau(a_i)\,t^{i+1} = t^{n+1} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i\,t^{i+1} + \tau^n(c)\,t^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i\,\tau^i(c)\,t^i\,.$$

Si $a_o \neq 0$, alors de $a_o c = 0$, on déduit $c = 0$. Soit $a_j = 0$, pour tout $j \in [0,i-1]$ et $a_i \neq 0$. On déduit de $0 = a_i\,\tau^i(c)$ que $c=0$ et pour tout $i \in [0,n-1]$, $\tau(a_i) = a_i$.

Dans l'énoncé suivant on utilise les notations du lemme 7.

Proposition 2 - L'extension $R = A[t\,;\tau]$ n'est pas quasi-simple. R admet les idéaux bilatères $R\,t^n$ pour tout entier positifs n. Si $\hat{\tau}$ est d'ordre infini, alors ce sont les seuls idéaux de R. Si $\hat{\tau}$ est d'ordre fini, les idéaux bilatères $Rf = fR$ autres que les $R\,t^n$ sont de degré minimum supérieur ou égal à l'ordre m de τ^* et sont engendrés par des polynômes unitaires :

$$f = t^{mh+k} + \sum_{j=0}^{h-1} c_j\,a^{h-j}\,t^{mj+k}$$

où $h \in \mathbb{N}^*$, $k \in [0,m-1]$, $c_j \in \mathrm{Fix}(\tau/Z(A))$, a ayant la signification du lemme 7.

Preuve - Puisque $t^n a = \tau^n(a)\,t^n$, $Rt^n = t^n R$ est un idéal bilatère non nul de R. Par le lemme 8, si $Rf = fR$ et si a_i est un coefficient non nul de f, τ^{n-i}

est intérieur, ce qui entraîne que $\hat{\tau}$ est d'ordre fini. Dans ce cas, pour les entiers $i \in [0,n-1]$, pour lesquels $a_i \neq 0$, $\tau^{n-i} \in \mathrm{Int}_{\tau}(A)$. Par le lemme 7, m divise n-i et $c_i = a^{-\frac{n-i}{m}} a_i \in Z(A)$. On déduit $n \geq m$,

$c'_i = a^{-\frac{n-i}{m}} a_i \in \mathrm{Fix}(\tau/Z(A) \cap U(A))$ si $a_i \neq 0$ et $c'_i = 0$ si $a_i = 0$.

Posons $a_i = a^{\frac{n-i}{m}} c_i$. Soit I un idéal bilatère de degré minimum $n = mh + k$, $0 \leq k < m$, engendré par le polynôme unitaire f et soit $i \in [0,n-1]$, tel que m divise n-i. Alors $i = n-m\ell$, où $\ell \in [1,h]$. Posons $j=h-\ell$, $j \in [0,h-1]$ et $i_j = mj+k$. Si $i \neq i_j$, alors $a_i=0$. Si $i = i_j$, alors $\frac{n-i_j}{m} = h-j$ et $a_{i_j} = a^{h-j} c_j$, où on pose $c_j = c'_{i_j}$. Alors

$$f = t^{mh+k} + \sum_{j=o}^{h-1} c_j\, a^{h-j}\, t^{mj+k} ,$$

où $a_j \in \mathrm{Fix}(\tau/Z(A))$, $a \in \mathrm{Fix}(\tau/U(A))$ avec $\tau^m(x) = axa^{-1}$, pour tout $x \in A$ et m l'ordre de τ^*. Réciproquement, un tel polynôme engendre un idéal bilatère Rf=fR, car il vérifie les hypothèses du lemme 8. En effet, ft=tf, puisque les coefficients de f sont laissés fixes par τ. D'autre part, l'égalité, pour tout $x \in A$, $c_j\, a^{h-j}\, \tau^{mj+k}(x) = \tau^{mh+k}(x)\, c_j\, a^{h-j}$, équivaut à $\tau^{mh-mj}(y) = a^{h-j}\, y\, a^{j-h}$ pour tout $y \in A$, qui est vraie d'après la définition de m et de a et d'après le fait que $c_j \in Z(A)$.

<u>Corollaire</u> - <u>Si $\hat{\tau}$ est d'ordre infini, alors</u> $Z(R) = \mathrm{Fix}(\tau/Z(A))$. <u>Si $\hat{\tau}$ est d'ordre fini, alors</u> $Z(R) = F[a^{-1}t^m]$, où $F = \mathrm{Fix}(\tau/Z(A))$, m <u>l'ordre de τ^* et</u> $a \in \mathrm{Fix}(\tau/U(A))$, <u>tel que</u> $\tau^m(x) = axa^{-1}$ <u>pour tout</u> $x \in A$.

Dans ce qui suit on suppose que δ est une dérivation non intérieure de l'anneau quasi-simple A. On utilise la proposition 1 pour vérifier le résultat suivant.

<u>Proposition</u> 3 - <u>Le polynôme unitaire</u> $f \in R = A[t\,;\delta]$ <u>engendre un idéal bilatère</u> Rf = fR <u>si et seulement si</u> $f \in Z(R)$. R <u>est quasi-simple si et seulement si</u> $Z(R) = \mathrm{Ker}\,\delta \cap Z(A)$.

Le résultat d'Amitsur montre que, en caractéristique nulle, $Z(R) = \mathrm{Ker}\,\delta \cap Z(A)$.

<u>Remarque</u> - Soit A un anneau quasi-simple de caractéristique $p > 0$ et soit $R = A[t\,;\delta]$, où δ n'est pas intérieure. Tout polynôme $f \in Z(R)$ est de degré $n \equiv 0 \pmod p$ et ses coefficients sont de dérivée nulle.

Théorème 2 - Soit τ un automorphisme non intérieur de l'anneau quasi-simple A et soit $R = A[t;\tau,\delta]$. Si, pour tout entier $n \geq 0$, la τ-dérivation $\delta_n = \sum_{k=0}^{n} \tau^k \delta \tau^{-k}$ n'est pas intérieure, alors R est quasi-simple.

Preuve - Soit I un idéal bilatère non nul de R et soit $f = t^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i$ le polynôme unitaire de R, tel que $I = Rf$. On suppose $n > 0$. On utilise la proposition 1 et on déduit que pour tout $a \in A$,

$$\delta_{n-1} \tau^{n-1}(a) + a_{n-1} \tau^{n-1}(a) - \tau^n(a)\, a_{n-1} = 0$$

car c'est le coefficient de t^{n-1} dans $fa - \tau^n(a)f$. Alors δ_{n-1} est intérieure, ce qui contredit l'hypothèse. Il reste $n=0$, $f=1$ et $I=R$.

Remarque - Si τ est l'identité, alors $\delta_n = n\delta$. Si A est de caractéristique 0, alors $n\delta$ n'est pas intérieure si δ ne l'est pas et on retrouve le résultat d'Amitsur (1).

Nous terminons ce paragraphe par un résultat dû à J.H. Cozzens (5) concernant la quasi-simplicité de l'extension d'Ore d'un corps de caractéristique 0, associée à un couple (τ,δ), où τ n'est pas surjectif.

Théorème 3 - Soit A un corps de caractéristique 0 et soit $R = A[t;\tau,\delta]$, où τ et δ ne sont pas intérieures et vérifient les conditions suivantes :

a) $\tau\delta + \delta\tau = 0$;

b) si $x \in A$ vérifie $x\,\tau^n(a) = \tau^{n-j}(a)x$ pour tout $a \in A$ et pour un entier $j \in [1,n]$, alors $x=0$;

c) quel que soit l'entier $m \geq 1$, δ^n n'est pas la restriction à $\tau^m(A)$ d'une τ^n-dérivation intérieure de A, où $n = 1,2$;

d) quel que soit l'entier $n \geq 1$, δ^n n'est pas une τ^n-dérivation intérieure de A, définie par un élément de $\mathrm{Fix}(\tau/\mathrm{Ker}\,\delta)$.

Alors R est un anneau quasi-simple, principal à gauche et intègre.

Preuve - Soit I un idéal bilatère non nul de R. Puisque I est principal à gauche, il existe un polynôme $f \in R$ unitaire, tel que $I = Rf$. Puisque $IR \subseteq I$, on déduit que pour tout $a \in A$, $fa = \tau^n(a)f$ et qu'il existe $b \in A$, tel que $ft = (t+b)f$. Si $\deg(f) = 2n > 0$, alors on déduit $f = t^m + a_o$, ce qui entraîne $b=0$ et $a_o \in \mathrm{Fix}(\tau/\mathrm{Ker}\,\delta)$. Par conséquent $\delta^{2n}(a) + a_o a = \tau^{2n}(a)a_o$, pour tout $a \in A$, ce qui contredit d). Si $\deg(f) = 2n+1$, alors $fa = \tau^n(a)f$, pour tout $a \in A$, contredit c). On déduit $\deg f = 0$ et $I=R$.

Remarque 1 - Si τ est surjectif le résultat précédent ne s'obtient pas du théorème 2, car la condition a) signifie δ_1 nulle. Si A est un anneau quelconque, τ un endomorphisme injectif et si $\delta(A)$ contient des non-diviseurs de zéro à droite, alors la condition a) est équivalente à la condition suivante :

a') δ^2 est une τ^2-dérivation de A.

Remarque 2 - Si τ est un automorphisme non intérieur de l'anneau quasi-simple A et si le couple (τ,δ) vérifie les hypothèses du théorème 3, alors $R = A[t\,;\tau,\delta]$ est quasi-simple.

Exemple (cf. (3) et (5)) - Soit k un corps commutatif de caractéristique 0 et soit A l'algèbre associative libre sur k, engendrée par l'ensemble $B = \{x_0, x_1, \ldots\}$, $A = k\langle x_0, x_1, \ldots\rangle$. Il existe un endomorphisme injectif unique $\tau : A \longrightarrow A$, $\tau(x_0) = -x_0$, $\tau(x_i) = x_{i+1}$, $i \geq 1$. On pose $[x_i, x_0] = \tau(x_i)x_0 - x_0 x_i = y_{i0}$ et on définit par récurrence $y_{i,\ell+1} = [y_{i\ell}, x_0] = \tau(y_{i\ell})\, x_0 - x_0\, y_{i\ell}$. On plonge A dans un corps gauche K de la manière suivante. Soit $\bar{k} = k(t_{in}\,;\, i \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^*)$ le corps des fractions rationnelles sur k en les indéterminées t_{in}. Soit $\sigma : \bar{k} \longrightarrow \bar{k}$ un endomorphisme de $\bar{k}$ qui laisse fixes les éléments de k et tel que $\sigma(t_{in}) = t_{i,n+1}$, pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $D = \bar{k}[Y\,;\sigma]$ l'extension d'Ore de $\bar{k}$ associée à σ. D admet un corps de fractions à gauche, soit K. On plonge A dans K : on associe $t_{i1}Y$ à x_i et à tout élément de k le même élément dans K, cf. (8). On identifie x_i à $t_{i1}Y$ et on définit un monomorphisme d'anneaux $\tau : K \longrightarrow K$ qui prolonge celui de A, en posant $\tau(a) = a$ pour tout $a \in k$, $\tau(t_{on}) = -t_{on}$ pour tout $n \geq 1$, $\tau(t_{in}) = t_{i+1,n}$ pour tout $i \geq 1$ et $\tau(Y^n) = Y^n$ pour tout $n \geq 1$. On a $\tau\sigma = \sigma\tau$, $\tau(K) \neq K$, car $x_1 \notin \tau(K)$. Sur K on définit la τ-dérivation intérieure : $\delta(y) = \tau(y)x_0 - x_0 y$, pour tout $y \in K$. Soit E le plus petit sous-corps de K, contenant k, les x_i, $i \geq 1$, les $[x_i, x_0]$, $i \geq 1$ et les $[y_{i\ell}, x_0]$ pour tout $i \geq 1$ et tout $\ell \geq 0$. Alors $\tau\delta + \delta\tau = 0$, $\delta(E) \subseteq E$, $\tau(E) \subseteq E$ et δ n'est pas intérieure, car $x_0 \notin E$ (voir (3)).

Les lemmes suivants permettent de montrer que le couple (τ,δ) vérifie les hypothèses du théorème 3 sur le corps E et que par conséquent $E[t\,;\tau,\delta]$ est quasi-simple.

Lemme 9 - Soit $a \in K$. On suppose qu'il existe un entier $N > 0$, tel que pour tout entier $n \geqslant N$, $at_{n1}Y = t_{n-j,1}\,Ya$, où $n-j \geqslant 0$. Alors $j = 0$ et $a \in k$.

Lemme 10 - Si $a \in E$ vérifie $\tau(a) = a$ et $\delta(a) = 0$, alors $a \in k$.

Remarque - Le centre de E est k , puisque ni τ ni δ ne sont intérieurs et par le théorème 1, $Z(E) \subseteq \mathrm{Fix}(\tau/\mathrm{Ker}\,\delta)$ d'où l'égalité $k = Z(E)$.

§4 - Extensions d'Ore d'ordres dans des anneaux artiniens à gauche

On sait qu'un anneau de polynômes sur un ordre dans un anneau artinien est un ordre dans un anneau artinien (16). Nous allons exposer quelques résultats dûs à A.V. Jategaonkar ((12) et (13)) qui montrent que ce résultat reste vrai lorsqu'il s'agit des extensions $A[t\,;\tau]$, où A est un anneau semi-simple ou plus généralement un ordre dans un anneau artinien à gauche et τ un endomorphisme injectif de A . A la fin du paragraphe nous donnons un exemple d'extension d'Ore d'anneau semi-simple, qui vérifie la condition 5° du théorème de classification.

On considère un anneau semi-simple A , qu'on décompose en somme directe d'idéaux bilatères minimaux. (Pour les questions concernant ces anneaux, voir (2)). Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble fini, de cardinal m , des idéaux bilatères minimaux de A . On désigne par I_m l'intervalle $[1,m]$ dans $\mathbb{N}$. Une numération de $\mathcal{B}$ est une bijection $\varphi : I_m \longrightarrow \mathcal{B}$. Posons $\varphi(i) = B_i$, alors $A = \bigoplus_{i=1}^{m} B_i = \bigoplus_{i=1}^{m} \varphi(i)$. On désigne par g_i l'idempotent de A , tel que $B_i = B_ig_i = Ag_i$.

Proposition 4 - Soit τ un endomorphisme injectif de l'anneau semi-simple A . Pour toute numération des composantes simples de A , il existe exactement une permutation $\pi \in \mathcal{S}_m$, telle que $\tau(B_i) \subseteq B_{\pi(i)}$ pour tout entier $i \in I_m$. Les composantes simples B_i et $B_{\pi(i)}$ ont même longueur et $\tau(g_i) = g_{\pi(i)}$. Soient $E_1,\dots,E_k$ les orbites de π dans I_m . Alors, pour chaque $\ell \in I_k$, l'idéal bilatère $A_\ell = \bigoplus_{i \in E_\ell} B_i$ est τ-stable, ne dépend pas de la numération choisie et admet dans $R = A[t\,;\tau]$ l'extension d'Ore $R_\ell = A_\ell\,[tf_\ell\,;\tau_\ell]$, où $f_\ell = \sum_{i \in E_\ell} g_i$ et τ_ℓ est la restriction de τ à A_ℓ. R_ℓ est un idéal bilatère de R et $R = \bigoplus_{\ell=1}^{k} R_\ell$.

Preuve - Soit $A = \overset{n}{\underset{j=1}{\oplus}} A e_j$ la décomposition de A en somme directe d'idéaux à gauche minimaux. Alors $\sum_{j=1}^{n} \tau(e_j) = 1$, $\tau(A) = \overset{n}{\underset{j=1}{\oplus}} \tau(A)\ \tau(e_j)$, $\tau(A)\ \tau(e_j) \subseteq A\tau(e_j)$ et $\{\tau(e_j)\}_{1\leq j\leq n}$ est un ensemble d'idempotents orthogonaux. On déduit que $A = \overset{n}{\underset{j=1}{\oplus}} A\ \tau(e_j)$ et que par conséquent pour chaque $j \in I_n$, $A\tau(e_j)$ est un idéal à gauche minimal. En plus les A-modules Ae_j et $Ae_{j'}$ sont isomorphes si et seulement si sont isomorphes $A\tau(e_j)$ et $A\tau(e_{j'})$. Par conséquent il existe une permutation $\pi \in \mathcal{S}_m$, telle que pour tout $i \in I_m$, $\tau(B_i) \subseteq B_{\pi(i)}$. Soit n_i la longueur de la composante simple B_i . Alors $\sum_{i=1}^{m} n_i = \sum_{i=1}^{m} n_{\pi(i)} = n$ et puisque $n_i \leq n_{\pi(i)}$ on déduit $n_i = n_{\pi(i)}$. Soit $B_i = \underset{e_j \in B_i}{\oplus} Ae_j$ la décomposition de B_i en idéaux minimaux isomorphes. On obtient $B_{\pi(i)} = \underset{e_j \in B_i}{\oplus} A\tau(e_j)$ et si $g_i = \sum_{e_j \in B_i} e_j$ est tel que $B_i = B_i g_i = Ag_i$, alors $g_{\pi(i)} = \tau(g_i)$. L'élément unité de l'anneau A_ℓ étant $f_\ell = \sum_{i\in E_\ell} g_i$, on déduit que $\tau(f_\ell) = f_\ell$ et il s'en suit que A_ℓ est τ-stable. Si φ_1 est une autre numération de $\mathcal{B}$, alors il existe $\sigma \in \mathcal{S}_m$, tel que $\varphi = \varphi_1 \sigma$ et la permutation associée à φ_1 est $\pi_1 = \sigma\pi\sigma^{-1}$, dont les orbites sont exactement $\sigma(E_1),\ldots, \sigma(E_k)$. L'égalité $A_\ell = \underset{i\in E_\ell}{\oplus} \varphi(i) = \underset{j\in\sigma(E_\ell)}{\oplus} \varphi_1(j)$ prouve l'indépendance de A_ℓ . On vérifie sans difficulté les autres affirmations.

<u>Proposition</u> 5 - <u>Soit</u> τ <u>un endomorphisme injectif de l'anneau semi-simple</u> A , <u>tel que la permutation</u> $\pi \in \mathcal{S}_m$ <u>associée à</u> τ <u>soit circulaire</u>. <u>Il existe un endomorphisme injectif</u> ψ <u>de l'anneau</u> A , <u>équivalent à</u> τ <u>et pour chaque</u> $i \in I_n$ <u>un corps</u> $D_i \subseteq B_i$ <u>ayant même élément unité que</u> B_i , <u>tels que</u> :

a) <u>le sous-anneau semi-simple</u> $D = \overset{m}{\underset{i=1}{\oplus}} D_i$ <u>soit</u> ψ<u>-stable</u> ;

b) <u>la permutation associée à la restriction</u> ψ_D <u>de</u> ψ <u>à</u> D <u>est égale à</u> π ;

c) $R = A[t\ ;\tau] \simeq A[s\ ;\psi] \simeq \mathcal{M}_m(D[s\ ;\psi_D])$.

Preuve - On suppose que pour $i \in I_{m-1}$, $\pi(i) = i+1$ et que $\pi(m) = 1$. Soit $B_1 = \overset{n}{\underset{j=1}{\oplus}} B_1 e_j$ la décomposition de la composante simple B_1 de A en somme directe d'idéaux minimaux à gauche. Par la proposition 4 tous les B_i ont même longueur et admettent les décompositions en somme directe d'idéaux minimaux $B_i = \overset{n}{\underset{j=1}{\oplus}} B_i\ \tau^{i-1}(e_j)$ par conséquent $B_1 = \overset{n}{\underset{j=1}{\oplus}} B_1\ \tau^{m}(e_j)$, $g_i = \sum_{j=1}^{n} \tau^{i-1}(e_j)$ et

$g_1 = \sum_{j=1}^{n} e_j$. On suppose d'abord que τ^m laisse fixes tous les éléments du système d'unités matricielles $\Sigma = \{e_{jk}, (j,k) \in I_n^2\}$ de l'anneau simple B_1, avec $e_{jj} = e_j$, $j \in I_m$. Pour tout $i \in I_m$, soit D_i le centralisateur dans B_i du système d'unités matricielles $\tau^{i-1}(\Sigma)$ de B_i . D_i un corps inclus dans B_i, ayant même élément unité g_i que B_i, et il existe un isomorphisme d'anneaux φ_i de B_i sur $\mathcal{M}_n(D_i)$. Pour tout $i \in I_{m-1}$, $\tau(D_i) \subseteq D_{i+1}$ et $\tau(D_m) \subseteq D_1$. Par conséquent les corps D_i engendrent dans A le sous-anneau τ-stable et semi-simple D, dont ils sont les composantes simples et $D = \bigoplus_{i=1}^{m} D_i$. Soit τ_D la restriction de τ à D . On construit une application φ de $A[t;\tau]$ dans $\mathcal{M}_n(D[t;\tau_D])$ de la manière suivante : $\varphi(t) = \mathrm{diag}_n(t)$; si $a \in A$, avec $a = \sum_{i=1}^{m} a_i$, $a_i \in B_i$, on pose $\varphi(a) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(a_i)$. On vérifie que φ est un isomorphisme d'anneaux.

Si τ^m ne laisse pas fixes les éléments de Σ, il existe un élément inversible v de B_1, tel que $\tau^m(e_{jk}) = v\, e_{jk} v^{-1}$, pour tout $(j,k) \in I_m^2$ (cf. (8)). L'élément $u = v + \sum_{i=2}^{m} \tau^{i-1}(g_1)$ est inversible dans A . Posons $\psi(x) = u^{-1}\tau(x)u$, pour tout $x \in A$. Alors $\psi^m(x) = w^{-1}\tau^m(x)w$, où $w = \sum_{i=0}^{m-1} \tau^i(v)$ et ψ^m laisse fixes les e_{jk}. On applique ce qui précède à $A[s;\psi] = A[t;\tau]$, $s = u^{-1}t$, cf. le lemme 1 .

Par la suite si $R = A[t;\tau]$, on désigne par $\mathfrak{D}(R)$ l'ensemble des polynômes de R ayant pour coefficients directeurs les éléments inversibles de A .

Théorème 4 - *Soit A un anneau semi-simple dont les m composantes simples sont des corps et soit τ un endomorphisme injectif τ de A, tel que la permutation associée soit circulaire. Alors :*

a) $R = A[t;\tau]$ *est isomorphe à un sous-anneau de* $\mathcal{M}_m(B[z;\tau^m])$, *où* B *est l'une des composantes simples de* A ;

b) R *est un anneau premier héréditaire et noethérien à gauche* ;

c) R *est un ordre dans l'anneau simple* $R_{\mathfrak{D}(R)}$.

Preuve -

a) Soit $A = \bigoplus_{i=1}^{m} B_i$ la décomposition de A en somme directe de composantes simples. On peut supposer que $\tau(B_i)\subseteq B_{i+1}$ pour tout $i\in I_{m-1}$, $\tau(B_m)\subseteq B_1$ et $B = B_m$. Soit $K_i = \tau^{m-i}(B_i)$, $i\in I_m$. On a la suite finie de corps $K_1\subseteq \dots \subseteq K_m = B$ et $\tau^m(B)\subseteq K_1$. Soit $D_i = K_i[z\ ;\ \tau^m]$ une extension d'Ore de K_i et soit P le sous-anneau de $\mathcal{M}_m(D_m)$ formé par les matrices $(d_{ij})\in \mathcal{M}_m(D_m)$, telles que $d_{ij}\in D_i$ pour tout couple $(i,j)\in I_m\times I_m$ et $d_{ij}\in D_i z$, si $i<j$. On définit un monomorphisme d'anneaux $\xi : R \longrightarrow \mathcal{M}_m(B[z\ ;\ \tau^m])$ dont l'image est P , comme suit. Soit $B_i = Ae_i$, $e_i^2 = e_i$. Alors $R = \underset{i,j}{\oplus}\ e_i R e_j$ et la projection de $f\in R$ dans $e_i R e_j$ est $f_{ij} = h_{ij}\, t^{\theta_{ij}}$, où $\theta_{ij} = i-j$ pour $i\geqslant j$, sinon $\theta_{ij} = m+i-j$ et $h_{ij} = \sum_k q_{i-j-km}\, e_i\, t^{km}$. On pose $\xi(f) = h^{\#}_{ij}\, z^{\varepsilon_{ij}}$, où $h^{\#}_{ij} = \sum_k \tau^{m-i}(q_{i-j-km}\, e_i)\in D_i$ et $\varepsilon_{ij} = 0$ si $i\geqslant j$, sinon $\theta_{ij} = 1$.

b et c) On désigne par $\{e_{ij}\mid (i,j)\in I_m^2\}$ l'ensemble des unités matricielles de $\mathcal{M}_m(D_m)$. On identifie R à P . Pour tout $i\in I_m$, e_i s'identifie à $e_{i,i}$. Soit I un idéal bilatère non nul de R et soit f_{kj} un élément non nul de la matrice non nulle $f\in I$. Alors $e_{mk}\, f\, e_{jm}\, z\in I$ et $f_{kj}\, z\in D_m$. Puisque D_m admet un corps de fractions à gauche on déduit que $f_{kj}\, z \neq 0$ et $e_m I e_m \neq 0$, ce qui prouve que R est un anneau premier. Soit $D = \overset{m}{\underset{i=1}{\oplus}} D_i$ le sous-anneau des matrices diagonales de P . Puisque chaque D_i est principal à gauche, R est un D-module à gauche de type fini et noethérien. On déduit que R est noethérien à gauche et c'est un ordre à gauche dans un anneau simple. $\mathfrak{D}(R)$ contient l'ensemble E des matrices diagonales $\neq 0$, ayant sur la diagonale des polynômes de même degré. D est un ordre dans l'anneau de fractions D_E qui est semi-simple et puisque E vérifie la condition d'Ore à gauche dans R , on plonge $D_E\subseteq R_E$. R_E est un D_E-module de type fini, donc artinien et puisque R est premier, R_E est simple. On déduit cf. (16) que R_E est l'anneau total de fractions de R et par conséquent $R_E = R_{\mathfrak{D}(R)}$.

Soit $0\neq I$ un idéal à gauche de R , $\subseteq R\,e_1$. On montre qu'il existe $k\in I_m$, tel que $I\simeq R\,e_k$, donc I est projectif. D'autre part, pour tout $i\in I_m$, $R\,e_i\simeq R\,e_{i1}\subseteq R\,e_1$ et tout idéal de R , $\subseteq R\,e_i$ est encore projectif ce qui prouve que R est héréditaire à gauche.

Les résultats précédents permettent de prouver sans difficulté le :

<u>Théorème</u> 5 - <u>Soit</u> τ <u>un endomorphisme injectif de l'anneau semi-simple</u> A . <u>L'extension d'Ore</u> $R = A[t\ ;\tau]$ <u>est un anneau semi-premier</u>, <u>héréditaire et noethérien à gauche et c'est un ordre à gauche dans l'anneau semi-simple</u> $R_{\mathfrak{D}(R)}$.

Ce théorème permet essentiellement de prouver les deux résultats suivants de (12).

Théorème 6 - Si A est artinien à gauche, alors $R = A[t ; \tau]$ est un ordre dans l'anneau artinien à gauche $R_{\mathfrak{D}(R)}$.

Théorème 7 - Soit A un ordre à gauche dans l'anneau artinien à gauche Q . Alors $R = A[t ; \tau]$ est un ordre à gauche dans un anneau artinien à gauche $Q^{\#}$. $Q^{\#}$ est semi-simple si et seulement si A est semi-premier. $Q^{\#}$ est simple si et seulement si tout idéal bilatère de A τ-stable est un idéal à gauche essentiel de A .

Nous terminons ce paragraphe par une remarque concernant les couples différentiels (τ,δ) définis sur des anneaux semi-simples A , qui permet de retrouver un analogue du théorème 5 pour les extensions d'Ore $A[t ;\tau,\delta]$. En plus nous donnons un exemple d'une telle extension qui vérifie la condition 5° du théorème de classification.

Soit (τ,δ) un couple différentiel défini sur l'anneau semi-simple A . Nous utilisons les notations et les résultats de la proposition 4. On a la décomposition en composantes simples de A : $A = \bigoplus_{i=1}^{m} B_i$.

Proposition 5 - Les idéaux bilatères τ-stables A_ℓ de A sont δ-stables. La τ-dérivation δ est intérieure si et seulement si pour tout $\ell \in I_k$ la restriction δ_ℓ de δ à A_ℓ est une τ_ℓ-dérivation intérieure de A_ℓ . Si A_ℓ n'est pas une composante simple de A , alors δ_ℓ est intérieure. A_ℓ admet dans $R = A[t ;\tau,\delta]$ une extension d'Ore $R_\ell = A_\ell[tf_\ell ;\tau_\ell,\delta_\ell]$. R_ℓ est un idéal bilatère de R et $R = \bigoplus_{\ell=1}^{k} R_\ell$.

Preuve - Soient $E_1,\dots,E_k$ les orbites de la permutation π associée à τ . $A_\ell = \bigoplus_{i\in E_\ell} B_i$ et soit g_i l'idempotent central, tel que $B_i = B_i g_i = Ag_i$. Pour tout $x\in A$, on a $\delta(xg_i) = \tau(x)\,\delta(g_i) + \delta(x)g_i = \tau(g_i)\,\delta(x) + \delta(g_i)x$. On déduit $\delta(B_i) \subseteq B_i \oplus B_{\pi(i)} \subseteq A_\ell$ et par conséquent $\delta(A_\ell) \subseteq A_\ell$. Si δ est intérieure définie par y , alors δ_ℓ est intérieure et définie par yf_ℓ , où $A_\ell = A_\ell f_\ell = Af_\ell$. Réciproquement si δ_ℓ est intérieure définie par $y_\ell \in A_\ell$, alors δ est intérieure définie par $\sum_{\ell=1}^{k} y_\ell f_\ell$. Si A_ℓ n'est pas un idéal bilatère minimal, alors l'orbite E_ℓ a plus d'un élément. Soit $\delta_{\ell y}$ une τ-dérivation intérieure de A_ℓ , définie par $y\in A_\ell$. Alors pour tout $i\in E_\ell$,

$\delta_{\ell y}(g_i) = yg_i - g_{\pi(i)}\, y$ et $g_i\,\delta_{\ell y}(g_i) = yg_i$, ce qui entraîne $y = \sum_{i\in E_\ell} g_i\,\delta_{\ell y}(g_i)$. Soit δ_ℓ une τ_ℓ-dérivation quelconque de A_ℓ et $z = \sum_{i\in E_\ell} g_i\,\delta_\ell(g_i)$. Si $f_\ell = \sum_{i\in E_\ell} g_i$, on a $\delta_\ell(f_\ell) = 0$, par conséquent $z = -\sum_{i\in E_\ell} g_{\pi(i)}\,\delta_\ell(g_i)$. Soit $\delta'_\ell = \delta_\ell - \delta_{\ell z}$. On remarque que pour tout $i \in E_\ell$, $\delta_\ell(g_i) = \delta_{\ell z}(g_i)$, par conséquent $\delta'_\ell(g_i) = 0$ pour tout $i \in E_\ell$ et puisque E_ℓ a plus d'un élément, ceci entraîne $\delta'_\ell(A_\ell) = 0$. On déduit que δ_ℓ est intérieure et définie par $z = \sum_{i\in E_\ell} g_i\ \delta_\ell(g_i)$. On vérifie sans difficulté les autres affirmations.

Corollaire - Soit τ un endomorphisme injectif de l'anneau semi-simple A . Si la permutation π associée à τ n'admet pas de points fixes, alors toute τ-dérivation de A est intérieure.

Exemple - Soit K un corps muni d'un couple différentiel (τ_1,δ_1), où τ_1 n'est pas surjectif et δ_1 n'est pas intérieure. Soit A un anneau semi-simple ayant trois composantes simples, $A = B_1 \oplus B_2 \oplus B_3$, telles que $B_1 = K_1$, $B_i \simeq K$, $i = 2,3$ et soient $\varphi_i : B_i \longrightarrow K$ les isomorphismes respectifs. On définit $\tau : A \longrightarrow A$ comme suit : pour $x \in B_1$, $\tau(x) = \tau_1(x)$. Pour $x \in B_i$, $\tau(x) = \varphi^{-1}_{\gamma(i)}\ \tau_1\ \varphi_i(x)$ où $i = 2,3$ et γ est la transposition $(2,3)$. Il est évident que τ est injectif, $\tau(A) \neq A$ et que la permutation $\pi \in \mathcal{S}_3$, associée à τ , est γ . Soit δ une application additive de A dans lui-même qui coïncide avec δ_1 sur B_1 et nulle sur $B_2 \oplus B_3$. δ est une τ-dérivation de A qui n'est pas intérieure. D'autre part τ ne laisse pas fixes les éléments du centre $Z(A)$. Si $u \in A$ est inversible, $u = \sum_{i=1}^{3} u_i$, $u_i \in U(B_i)$. Soit $z \in Z(A)$, $z = \sum_{i=1}^{3} z_i$, $z_i \in Z(B_i)$. Alors $\tau(z) = z_1 + \varphi_3^{-1}\ \tau_1\ \varphi_2(z_2) + \varphi_2^{-1}\ \tau_1\ \varphi_3(z_3)$. Soient $z_2 \neq 0$, $z_3 \neq 0$. Alors $0 \neq z - \tau(z) \in \mathrm{Ann}(B_1)$ par conséquent $(1-\tau)(Z(A)) \cap U(A) = \emptyset$, ce qui prouve que $A[t\,;\tau,\delta]$ vérifie la condition 5° du théorème de classification.

Bibliographie

(1) S.A. AMITSUR - Derivations in simple rings, Proc. of the London Math. Soc (3) 7 (1957), pp. 87-112

(2) N. BOURBAKI - "Modules et anneaux semi-simples", Algèbre, ch. 8 , Hermann, Paris, 1958.

(3) P.M. COHN - Quadratic extensions of skew fields, Proc. of London Math. Soc (3) 11 (1961), pp. 531-556

(4) P.M. COHN - "Free rings and their relations", Ac. Press, 1971

(5) J.H. COZZENS - Simple principal left ideals domains, J. of Algebra, 23 (1972), pp. 66-75

(6) C. FAITH - "Algebra : Rings, Modules and Categories I", Springer-Verlag, 1973

(7) C. FAITH - "Algebra II, Ring theory", Springer-Verlag, 1976

(8) N. JACOBSON - Structure of rings, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. 37 (1964)

(9) A.V. JATEGAONKAR - Ore domains and free algebras, Bull. London Math. Soc. 1 (1969), pp. 45-46

(10) A.V. JATEGAONKAR - A counter-example in ring theory and homological algebra, J. **Algebra**, 12 (1969), pp. 418-440

(11) A.V. JATEGAONKAR - "Left principal ideal rings", Lecture Notes in Mathematics, vol. 123, Springer-Verlag, 1970

(12) A.V. JATEGAONKAR - Skew polynomial rings over semi-simple rings, J. Algebra, 19 (1971), pp. 315-328

(13) A.V. JATEGAONKAR - Skew polynomial rings over orders in artinian rings, J. Algebra, 21 (1972), pp. 51-59

(14) O. ORE - Theory of non-commutative polynomials, Ann. of Math., 34 (1933), pp. 480-508

(15) G. RENAULT - "Algèbre non commutative", Gauthiers-Villars 1975

(16) L. SMALL - Orders in Artinian rings, J. Alg. 4 , pp. 13-41 (1966), & addendum, ibid. pp. 505-507

(17) E. WEXLER-KREINDLER - Sur une classification des extensions d'Ore, C.R. Ac. Sci. Paris 282, Série A (1976), pp. 1331-1333

Manuscrit reçu, le 8 novembre 1976

Madame Elena WEXLER-KREINDLER
Université Pierre et Marie Curie
Mathématiques
4, Place Jussieu

75230 PARIS CEDEX 05

Cohomologie locale des algèbres enveloppantes d'Algèbres de Lie nilpotentes

par Geneviève Barou

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente de dimension finie sur un corps k de caractéristique 0 et soit $W(\mathfrak{g})$ le $\mathfrak{g}$-module des formes k-linéaires sur l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$, formes qui s'annulent sur une puissance de l'idéal d'augmentation $\mathfrak{I} = \mathfrak{g}\, U(\mathfrak{g})$; il a été démontré [13] [14] que la cohomologie de $\mathfrak{g}$ à valeur dans $W(\mathfrak{g})$, $H^*(\mathfrak{g}, W(\mathfrak{g}))$, est nulle en degré > 0. D'autre part, on vérifie que $H^*(\mathfrak{g}, W(\mathfrak{g}))$ coïncide avec $\varinjlim_r \operatorname{Ext}^*_{U(\mathfrak{g})}\left(\frac{U(\mathfrak{g})}{\mathfrak{I}^r}, \frac{U(\mathfrak{g})}{\mathfrak{I}}\right)$.

Si R est un anneau (commutatif) local noetherien, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, les $\varinjlim_r \operatorname{Ext}^i_R(\frac{R}{\mathfrak{m}^r}, -)$ sont les foncteurs de cohomologie locale, relativement à $\mathfrak{m}$. Dans le but de généraliser, tout au moins dans certaines situations, les résultats de [13] et [14] nous avons été conduite à introduire les foncteurs de cohomologie locale pour des algèbres enveloppantes (et leurs localisés) d'algèbres de Lie nilpotentes $\mathfrak{g}$. Ces résultats développent les deux notes aux CRAS [1] et [2].

Rappelons que, si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie nilpotente de dimension finie sur un corps de caractéristique 0, son algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$ est intègre, noethérienne à droite et à gauche ; chaque idéal de $U(\mathfrak{g})$ peut être engendré par une famille centralisante et chaque idéal premier P est complètement premier. De plus, on peut construire l'anneau de fractions $A = U_P$, à dénominateurs dans U-P. Cet anneau est local au sens que son radical de Jacobson $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal (à droite et à gauche) ; on a $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{m}^n = 0$. L'anneau A hérite des propriétés de $U(\mathfrak{g})$, à savoir : il est intègre, noethérien à droite et à gauche, chacun de ses idéaux peut être engendré par une famille centralisante et tout idéal premier de A est complètement premier. De plus A est régulier [22] [23] dans le sens que le radical $\mathfrak{m}$ peut être engendré par une A-suite centralisante régulière de longueur égale à la K-dimension de A et à la dimension homologique globale (à droite ou à gauche) de A. Par "idéal" on entendra toujours idéal bilatère.

I - Idéaux centraux premiers

Définition 1.1 - On appelle système centralisant un ensemble d'éléments $r_1, r_2, \ldots, r_m$ d'un anneau A tel que pour tout $i = 1, \ldots, m$, r_i appartienne au centre de A modulo $(r_1, \ldots, r_{i-1})$.

Définition 1.2 - Un idéal à gauche I d'un anneau A sera dit central premier, s'il est propre et si pour tout système centralisant $r_1, \ldots, r_m$ d'éléments de A on a : $(I : r_{i_o}) = I$ si $i_o = \mathrm{Min}\{i \mid i = 1, \ldots, m \ , r_i \notin I\}$.

Signalons quelques propriétés des idéaux centraux premiers.

Proposition 1.3 - Soit A un anneau noetherien des deux côtés. On suppose que chaque idéal bilatère de A admet un système centralisant de générateurs. Alors, pour un idéal à gauche propre I de A, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) L'idéal I est central-premier ;
2) Si $aAb \subseteq I$, a et $b \in A$, alors $AaA \subseteq I$ ou $b \in I$;
3) Si $aAb \subseteq I$, a et $b \in A$, alors $a \in I$ ou $b \in I$.

Preuve

1) $\Longrightarrow$ 2) Supposons que $aAb \subseteq I$ et $AaA \nsubseteq I$. Soit $r_1, r_2, \ldots, r_m$ un système centralisant de générateurs de AaA et soit $i_o = \mathrm{Min}\{i \ , 1 \leq i \leq m \ , r_i \notin I\}$. Puisque I est un idéal à gauche, on a $Aa.Ab \subseteq I$; donc $r_{i_o} b \in I$. D'où d'après 1) $b \in I$.

L'implication 2) $\Longrightarrow$ 3) est évidente.

3) $\Longrightarrow$ 1) Soit $r_1, r_2, \ldots, r_m, r_{m+1}$ un système centralisant d'éléments de A tel que : $r_1, r_2, \ldots, r_m \in I$ et $r_{m+1} \notin I$. Soit $b \in A$ tel que $br_{m+1} \in I$. Alors quelque soit l'élément x de A, on a $xb\, r_{m+1} - r_{m+1}\, xb \in (r_1, \ldots, r_m) \subseteq I$. Donc, puisque I est un idéal à gauche, on a : $r_{m+1}\, xb \in I$ pour tout $x \in A$ et, d'après 3), $b \in I$ ‖

La condition 3) de la proposition 1.3 a été étudiée en [17].

Proposition 1.4 - Soit A un anneau, M un A-module à gauche et I un élément maximal de la famille des idéaux à gauche de A de la forme $\mathrm{Ann}_A\, x$ où $x \in M$ $x \neq 0$. Alors I est central premier.

Preuve - Posons $I = \mathrm{Ann}_A\, z$, $z \in M$, $z \neq 0$. Soit $r_1, \ldots, r_m$ une famille centralisante d'éléments de A, non contenue dans I et soit $i_o = \mathrm{Min}\{i \mid r_i \notin I\}$. Si $a \in I$, alors $ar_{i_o} - r_{i_o} a \in I$ et donc $(ar_{i_o} - r_{i_o} a)\, z = 0$. Puisque $az = 0$ on a $ar_{i_o} z = 0$; d'où $a \in \mathrm{Ann}_A(r_{i_o} z)$ et $I \subseteq \mathrm{Ann}_A(r_{i_o} z)$. Du fait du caractère maximal de I on a l'égalité $I = \mathrm{Ann}_A(r_{i_o} z)$. Soit donc b un élément de A

tel que $r_{i_o} b \in I$. Puisque $r_{i_o} b - b r_{i_o} \in I$ on a $b r_{i_o} \in I$. Donc $b \in \mathrm{Ann}_A(r_{i_o} z)$ et $b \in I$. Donc I est central premier.∎

Définition 1.5 - Soient A un anneau, M un A-module à gauche, et I un idéal à gauche central premier. Alors M contient un sous-module isomorphe à A/I si et seulement s'il existe un élément non nul $x \in M$ tel que $\mathrm{Ann}_A x = I$. On dira alors que I est un idéal central-associé à M . On notera $\text{C-Ass}_A M$ l'ensemble des idéaux à gauche centraux associés à M .

. On obtient un certain nombre de propriétés analogues à celles du cas commutatif.

Lemme 1.6 - Soit A un anneau, M un A-module à gauche, J un élément maximal de l'ensemble des idéaux à gauche de A de la forme $\mathrm{Ann}_A x$, où $x \in M$, $x \neq 0$, alors $J \in \text{C-Ass}_A M$.

Lemme 1.7 - Si A est un anneau noethérien à gauche, le A-module à gauche M est nul si et seulement si $\text{C-Ass}_A M$ est vide ; l'ensemble des éléments de A , diviseurs de zéro dans M est $\bigcup_{P \in \text{C-Ass}_A M} P$.

Lemme 1.8 - Soit A un anneau noethérien à gauche, soit $Z(A)$ son centre et soit $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ une suite exacte de A-modules à gauche. Alors l'ensemble $\{I \cap Z(A),\ I \in \text{C-Ass}_A M\}$ est contenu dans la réunion des ensembles $\{I \cap Z(A),\ I \in \text{C-Ass}_A M'\}$ et $\{I \cap Z(A),\ I \in \text{C-Ass}_A M''\}$.

Preuve - Soit I un idéal à gauche central-premier associé à M . Il existe donc un sous-module N de M isomorphe à A/I . Si $N \cap f(M') = (0)$, N est isomorphe à un sous-module de M'' ; donc $I \in \text{C-Ass}_A M''$. Supposons $N \cap f(M') \neq 0$ et soit $x \in N \cap f(M')$, $x \neq 0$, un élément tel que $\mathrm{Ann}_A x$ soit maximal dans l'ensemble des annulateurs d'éléments non nuls de $N \cap f(M')$. Alors $J = \mathrm{Ann}_A(x)$ est un idéal à gauche central-premier et central-associé à M' et on vérifie que $I \cap Z(A) = J \cap Z(A)$.

Lemme 1.9 - Soit A un anneau noethérien à gauche, M un A-module de type fini non nul. Alors il existe une suite de sous-A-modules de M : $(0) = M_o \subseteq M_1 \subseteq \ldots \subseteq M_m = M$, telle que $M_i/M_{i-1} \simeq A/J_i$, $1 \leq i \leq m$, où J_i est un idéal à gauche central-premier de A . De plus, si $Z(A)$ désigne le centre de A , l'ensemble $\{I \cap Z(A),\ I \in \text{C-Ass}_A M\}$ est contenu dans $\{J_i \cap Z(A)\quad i = 1, \ldots, m\}$. En particulier l'ensemble $\{I \cap Z(A),\ I \in \text{C-Ass}_A M\}$ est fini.

Preuve - L'existence des J_i résulte du lemme 6 de [15]. D'après 1.6, l'ensemble $\{I \cap Z(A) \quad I \in C\text{-}Ass_A M\}$ est contenu dans la réunion des ensembles $\{I \cap Z(A), \quad I \in C\text{-}Ass_A\ A/J_i\}$ pour $i = 1,\dots,m$. Or $J_i \in C\text{-}Ass_A\ A/J_i$, puisque J_i est l'annulateur de la classe de 1 dans A/J_i . Inversement si J est un idéal à gauche central-premier associé à A/J_i , il existe un élément $x \in A$, $x \notin J_i$ tel que $J = Ann_A(\bar{x})$ où $\bar{x}$ désigne la classe de x modulo J_i . Pour tout élément a du centre de A , on a : $a \in J_i$ si et seulement si $ax \in J_i$, donc si et seulement si $a \in Ann_A \bar{x} = J$. On a donc $\{I \cap Z(A), \quad I \in C\text{-}Ass_A\ A/J_i\}$ $= \{J_i \cap Z(A)\}$, d'où le résultat.

Proposition 1.10 - Soit I un idéal à gauche central premier d'un anneau A et $r_1, r_2, \dots, r_m$ une famille centralisante d'éléments de A non contenue dans I . Soit $i_o = \text{Min}\{i \ , \ r_i \notin I\}$. Alors la multiplication à gauche par r_{i_o} dans A/I est un A-homomorphisme injectif.

Preuve - On a pour $a, b \in A$: $(ar_{i_o} - r_{i_o}a)\, b \in I$. Donc la multiplication par r_{i_o} est un A-homomorphisme. Si $r_{i_o} b \in I$ on a $b \in I$; donc l'homomorphisme précédent est injectif.

Proposition 1.11 - Soit A un anneau noethérien à gauche et M un A-module à gauche. Alors M est injectif si et seulement si il vérifie la condition suivante : quel que soit l'idéal à gauche central-premier I de A et l'homomorphisme de A-modules $\varphi : I \longrightarrow M$, il existe $x \in M$ tel que $\varphi(a) = ax$ pour tout $a \in I$.

Preuve - Il suffit de reprendre la démonstration du théorème 3.2 (Chapitre I.[6]). La condition est évidemment nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante et soit M un A-module la vérifiant. Soit N un A-module à gauche, N' un sous-module de N , $f : N' \longrightarrow M$ un A-homomorphisme. On considère l'ensemble $\mathcal{F}$ des couples (N'', f'') où N'' est un sous-module de N , $N' \subseteq N''$ et $f'' : N'' \longrightarrow M$ est un A-homomorphisme prolongeant f . On ordonne $\mathcal{F}$ par prolongement, de la façon habituelle. Cet ensemble est inductif et on note (N_o, f_o) un élément maximal. On démontre que $N_o = N$ par l'absurde. Supposons qu'il existe $y \in N$ $y \notin N_o$. Posons $J_y = \{a \in A \quad ay \in N_o\}$ et désignons par J_{y_o} un élément maximal de l'ensemble des idéaux à gauche J_y , $y \in N$, $y \notin N_o$. L'idéal J_{y_o} est central-premier. Soit $f'_o : J_{y_o} \longrightarrow M$ l'application définie par :

$$f'_o(a) = f_o\,(ay_o)$$

Par hypothèse, il existe $x \in M$ tel que $f'_o(a) = ax = f_o(ay_o)$ pour tout $a \in J_{y_o}$. Posant alors $f'(z + ay_o) = f_o(z) + ax$ pour $a \in A$ $z \in N_o$, on obtient un A-homomorphisme. $f' : N_o + Ay_o \longrightarrow M$ qui prolonge f_o, ce qui contredit le choix de (N_o, f_o).

II - Foncteur de cohomologie locale

Définition 2.1 - Soit $\mathfrak{a}$ un idéal bilatère d'un anneau A. Considérons le foncteur $L_{\mathfrak{a}}$ de la catégorie des A-modules à gauche vers elle-même, défini par :

1) $L_{\mathfrak{a}}(M) = \bigcup_{k \geq 1} \mathrm{Ann}_M(\mathfrak{a}^k)$

2) Si f est un A-homomorphisme, $L_{\mathfrak{a}}(f)$ est la restriction de f.

Le foncteur (additif) $L_{\mathfrak{a}}$ est appelé foncteur de cohomologie local relatif à $\mathfrak{a}$.

Proposition 2.2 - Soit A un anneau noethérien des deux côtés et $\mathfrak{a}$ un idéal bilatère de A. Le foncteur $\varinjlim_{k \geq 1} \mathrm{Hom}_A(\frac{A}{\mathfrak{a}^k}, -)$ est naturellement équivalent à $L_{\mathfrak{a}}$; il est, ainsi que $L_{\mathfrak{a}}$, exact à gauche.

Preuve - La démonstration est la même que dans le cas commutatif [18].

On notera $E_A(M)$ l'enveloppe injective d'un A-module (à gauche) M.

Proposition 2.3 - Soit A un anneau noethérien des deux côtés, $\mathfrak{a}$ un idéal bilatère de A et I un idéal à gauche central premier de A. On suppose que $\mathfrak{a}$ est engendré par une famille centralisante et que $\mathfrak{a} \not\subseteq I$. On a alors : $L_{\mathfrak{a}}[E_A(A/I)] = (0)$ et $L_{\mathfrak{a}}(A/I) = (0)$.

Preuve - Il suffit de prouver que si $x \in E_A(A/I)$ et $\mathfrak{a}x = 0$ alors $x=0$.

Si l'on avait $x \neq 0$, on pourrait trouver, puisque l'extension $A/I \subset E_A(A/I)$ est essentielle, des éléments $y, a \in A$ tels que $ax = \bar{y} \neq \bar{0}$, où $\bar{y}$ est la classe de y modulo I. Soit $r_1, \ldots, r_m$ un système de générateurs centralisant de $\mathfrak{a}$ et soit $i_o = \mathrm{Min}\{i \mid r_i \notin I\}$. Puisque $r_{i_o} a \in \mathfrak{a}$ on a $r_{i_o} . \bar{y} = r_{i_o} ax = \bar{0}$; d'où $r_{i_o} y \in I$ et $y \in I$, car I est central premier, ce qui contredit le choix de y.

Proposition 2.4 - Soit $\mathfrak{a}$ un idéal bilatère d'un anneau noethérien A et M un A-module à gauche de type fini. On suppose que $\mathfrak{a}$ est engendré par un système centralisant et que M est annulé par $\mathfrak{a}$. Alors l'enveloppe injective de M est réunion de sous-modules annulés par les idéaux $\mathfrak{a}^n$, $n>0$.

Preuve - Il suffit de reprendre la démonstration de [10] (page 84).

Proposition 2.5 - Soit A un anneau noethérien, $\mathfrak{a}$ un idéal bilatère de A engendré par une famille centralisante. Alors :

1) Pour tout entier $k>0$, l'idéal $\mathfrak{a}^k$ possède un système de générateurs centralisant ;

2) Si M est un A-module à gauche tel que $L_{\mathfrak{a}}(M) = M$, on a $L_{\mathfrak{a}}(E_A(M)) = E_A(M)$.

Preuve - 1) Soit $r_1, r_2, \dots, r_n$ un système centralisant de générateurs de $\mathfrak{a}$. Considérons, sur l'ensemble $(\{1,2,\dots,n\})^k$ des k-uples d'entiers compris entre 1 et n , l'ordre lexicographique ; c'est un ordre total. On notera $\vec{1}, \vec{2}, \dots, \vec{n^k}$ la suite croissante des éléments de $(\{1,2,\dots,n\})^k$. A tout i , $1 \leq i \leq n^k$, correspond donc un unique k-uple : $\vec{i} = (i_1, \dots, i_k)$ et on pose $y_{\vec{i}} = r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_k}$. On va montrer, par récurrence sur k , que $y_{\vec{1}}, y_{\vec{2}}, \dots, y_{\vec{n^k}}$ est un système de générateurs centralisant de $\mathfrak{a}^k$. Lorsque $k=1$, le résultat est vrai par hypothèse. Supposons $k>1$ et le résultat démontré pour $\mathfrak{a}^{k-1}$. Il est bien évidemment que l'idéal à gauche $\mathfrak{a}^k$ est engendré par les $y_{\vec{i}} = r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_k}$. Il reste à vérifier que, pour l'ordre lexicographique, les $y_{\vec{i}}$ forment un système centralisant. Soit $\vec{i} = (i_1, \dots, i_k)$ un k-uple d'entiers compris entre 1 et n et soit $u \in A$. Posons

$\Delta = r_{i_1} \dots r_{i_k} u - u r_{i_1} \dots r_{i_k}$. On a :

$$\Delta = r_{i_1} \dots r_{i_{k-1}} (r_{i_k} u - u r_{i_k}) + (r_{i_1} \dots r_{i_{k-1}} u - u r_{i_1} \dots r_{i_{k-1}}) r_{i_k} .$$

D'où par hypothèse de récurrence :

$$\Delta = (r_{i_1} \dots r_{i_{k-1}}) \sum_{j < i_k} v_j r_j + \Big(\sum_{\vec{j}=(j_1,\dots,j_{k-1}) < (i_1,\dots,i_{k-1})} v_{\vec{j}} r_{j_1} \dots r_{j_{k-1}} \Big) r_{i_k}$$

pour certains éléments $v_j \in A$ et $v_{\vec{j}} \in A$. D'autre part, toujours par hypothèse de récurrence on a, pour tout $j < i_k$:

$$r_{i_1} \dots r_{i_{k-1}} v_j = v_j r_{i_1} \dots r_{i_{k-1}} + \sum_{\vec{j}=(j_1,\dots,j_{k-1}) < (i_1,\dots,i_{k-1})} t^{(j)}_{\vec{j}} r_{j_1} \dots r_{j_{k-1}} .$$

Finalement :

$$\Delta = \sum_{j < i_k} \sum_{\vec{j}=(j_1,\ldots,j_{k-1}) < (i_1,\ldots,i_{k-1})} t_{\vec{j}}^{(j)} r_{j_1} \ldots r_{j_{k-1}} r_j$$

$$+ \sum_{j < i_k} v_j r_{i_1} \ldots r_{i_{k-1}} r_j + \sum_{\vec{j}=(j_1,\ldots,j_{k-1}) < (i_1,\ldots,i_{k-1})} v_{\vec{j}} r_{j_1} \ldots r_{j_{k-1}} r_{i_k}$$

2) Pour montrer que, pour tout $x \in E_A(M)$, il existe un entier $k \geq 1$ tel que $\mathfrak{a}^k x = 0$, il suffit de vérifier que pour tout sous-module de type fini N de $E_A(M)$, $N \neq (0)$, on a $L_{\mathfrak{a}}(N) = N$. Soit N un tel sous-module ; on a :

$$N \cap M \subseteq N \subseteq E_A(N) \subseteq E_A(M) \quad .$$

Puisque $N \cap M$ est de type fini et que $L_{\mathfrak{a}}(M) = M$, le module $N \cap M$ est annulé par une puissance de $\mathfrak{a}$. D'après 2.4, $E_A(N \cap M)$ est réunion de sous-modules annulés par des $\mathfrak{a}^i$, $i \geq 1$. Donc $L_{\mathfrak{a}}(E_A(N \cap M)) = E_A(N \cap M)$ et, puisque l'extension $N \cap M \subset E_A(N)$ est essentielle on a : $E_A(N \cap M) = E_A(N)$; d'où le résultat.//

<u>Corollaire</u> 2.6 - <u>Soit</u> A <u>un anneau noethérien dont le radical de Jacobson est un idéal maximal à droite et à gauche et est engendré par un système centralisant.</u> <u>Soit</u> I <u>un idéal à gauche central premier de</u> A . <u>Alors</u> :

1) <u>Si</u> $I \subsetneq \mathfrak{m}$ <u>on a</u> : $L_{\mathfrak{m}}(A/I) = L_{\mathfrak{m}}(E_A(A/I)) = (0)$;

2) <u>On a</u> : $L_{\mathfrak{m}}(E_A(A/\mathfrak{m})) = E_A(A/\mathfrak{m}) \neq (0)$.

<u>Preuve</u> - Il suffit d'appliquer 2.3 et 2.5 //

<u>Théorème</u> 2.7 - <u>Soit</u> A <u>un anneau noethérien dont le radical de Jacobson</u> $\mathfrak{m}$ <u>est un idéal maximal à droite et à gauche et est engendré par un système centralisant. Pour tout A-module à gauche de type fini</u> M , <u>le module</u> $L_{\mathfrak{m}}(M)$ <u>est de longueur finie</u>.

<u>Preuve</u> - D'après 1.9, il existe une suite de modules :

$$(0) = M_o \subset M_1 \subset \ldots \subset M_k = M$$

où $M_i/M_{i-1} \simeq A/I_i$, $i = 1,\ldots,k$, et I_i étant un idéal à gauche central premier de A . D'après 2.6, $L_{\mathfrak{m}}(A/I_i)$ est de longueur finie. En raisonnant par récurrence sur k , supposons démontré que $L_{\mathfrak{m}}(M_{k-1})$ est de longueur finie. On a, puisque $L_{\mathfrak{m}}$ est exact à gauche, la suite exacte :

$$0 \longrightarrow L_{\mathfrak{m}}(M_{k-1}) \longrightarrow L_{\mathfrak{m}}(M) \longrightarrow L_{\mathfrak{m}}(M/M_{k-1})$$

Donc $L_{\mathfrak{m}}(M)$ est de longueur finie.

<u>Corollaire</u> 2.8 - <u>On suppose que l'anneau</u> A <u>vérifie les hypothèses</u> 2.7

1) <u>Si</u> M <u>est un A-module à gauche de longueur finie</u>, <u>on a</u> $L_{\mathfrak{a}}(M) = M$ <u>pour tout idéal bilatère</u> $\mathfrak{a}$ <u>de</u> A ;

2) <u>Si</u> M <u>est un A-module à gauche de type fini</u>, <u>alors</u> $L_{\mathfrak{m}}(M)$ <u>est le plus grand sous-module de</u> M <u>de longueur finie</u>.

<u>Preuve</u> - 1) résulte de : $M = L_{\mathfrak{m}}(M) \subseteq L_{\mathfrak{a}}(M) \subseteq M$

2) résulte de 1) et de 2.7.||

<u>Définition</u> 2.9 - Soit A un anneau noethérien et $\mathfrak{a}$ un idéal bilatère de A engendré par une famille centralisante ; on appelle <u>i-ème foncteur de cohomologie locale relativement à</u> $\mathfrak{a}$, et on note $H^i_{\mathfrak{a}}$, le i-ème foncteur dérivée droit de $L_{\mathfrak{a}}$.

On démontre comme dans le cas commutatif [18], à l'aide de [6] et [11] et de 2.2, les théorèmes suivants :

<u>Théorème</u> 2.10 - <u>Soit</u> A <u>un anneau noethérien</u>, $\mathfrak{a}$ <u>un idéal bilatère engendré par un système centralisant</u>. <u>Alors pour tout entier</u> $m \geq 0$ <u>les foncteurs</u> <u>(de la catégorie des A-modules à gauche dans elle-même)</u> $H^m_{\mathfrak{a}}$ <u>et</u> $\varinjlim_k \mathrm{Ext}^m_A(\frac{A}{\mathfrak{a}^k}, -)$ <u>sont naturellement équivalents</u>.

<u>Théorème</u> 2.11 - <u>Soit</u> A <u>un anneau noethérien</u>, $\mathfrak{a}$ <u>un idéal bilatère engendré par un système centralisant</u>, N <u>la limite inductive d'un système préordonné filtrant à droite de A-modules à gauche</u> $(N_\alpha , f_{\beta\alpha})$. <u>Alors pour tout entier</u> $m \geq 0$, <u>les A-homomorphismes naturels</u> : $\varinjlim_\alpha H^m_{\mathfrak{a}}(N_\alpha) \longrightarrow H^m_{\mathfrak{a}}(N)$ <u>sont des isomorphismes</u>.

III - <u>Enveloppe injective du corps résiduel d'un anneau local régulier</u>

<u>Définition</u> 3.1 - On appellera <u>anneau local</u> un anneau A noethérien à droite et à gauche dont le radical de Jacobson $\mathfrak{m}$ est un idéal (à droite et à gauche) maximal. Si, de plus, $\mathfrak{m}$ peut être engendré par une suite centralisante régulière on dira que l'anneau local A est <u>régulier</u>.

Proposition 3.2 - Soit A un anneau local régulier de dimension n ([23]) et $\mathfrak{m}$ son radical. Alors :

1) $\mathrm{Ext}^i_A(A/\mathfrak{m}, A) = (0)$ si $i \neq n$ et les A-modules à gauche $A/\mathfrak{m}$ et $\mathrm{Ext}^n_A(A/\mathfrak{m}, A)$ sont isomorphes.

2) Pour tout A-moudule à gauche M de longueur finie et tout entier $i \neq n$, on a : $\mathrm{Ext}^i_A(M,A) = 0$.

3) $\mathrm{Ext}^n_A(-,A)$ est un foncteur exact de la catégorie des A-modules à gauche de longueur finie dans celle des groupes abéliens.

Preuve - 1) Puisque n est la dimension homologique globale de A (cf. [23]) on a $\mathrm{Ext}^i_A(\frac{A}{\mathfrak{m}}, A) = 0$ pour $i \gneq n$. Si $i \lneq n$ et si $a_1, \dots, a_n$ est une A-suite régulière centralisante qui engendre $\mathfrak{m}$, on a :

$$\mathrm{Ext}^i_A(\frac{A}{\mathfrak{m}}, A) \simeq \mathrm{Hom}_{A/(a_1,\dots,a_i)}(A/\mathfrak{m}, \frac{A}{(a_1,\dots,a_i)}) = 0$$

Si $i=n$ les modules à gauche $\mathrm{Ext}^n_A(A/\mathfrak{m}, A)$ et $\mathrm{Tor}^o_A(A/\mathfrak{m}, A) \cong A/\mathfrak{m}$ sont isomorphes [15];

2) s'obtient à partir de 1) à l'aide d'une récurrence sur la longueur de M ;

3) Si $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ est une suite exacte de A-modules à gauche de longueur finie, la suite de groupes abéliens :

$$0 = \mathrm{Ext}^{n-1}(M',A) \longrightarrow \mathrm{Ext}^n(M'',A) \longrightarrow \mathrm{Ext}^n(M,A) \longrightarrow \mathrm{Ext}^n(M',A) \longrightarrow 0$$

est exacte ; d'où le résultat.‖

Dans la suite, on notera ${}_A\mathrm{Mod}$ la catégorie des A-modules à gauche, ${}_A\mathrm{Mod}^f$ (resp. ${}_A\mathrm{Mod}^{\ell f}$) celle des A-modules à gauche de type fini (resp. de longueur finie) et Ab la catégorie des groupes abéliens.

Lemme 3.3 - Soit A un anneau, $\mathcal{L}$ un idéal bilatère de A et M un A-module à gauche annulé par $\mathcal{L}$. Si $m \in M$, on définit un A-homomorphisme : $\varphi_m : A/\mathcal{L} \longrightarrow M$ en posant : $\varphi_m(\bar{a}) = am$, où $\bar{a}$ est la classe modulo $\mathcal{L}$ de $a \in A$. Soit $T = \mathrm{Ext}^j_A(-, A) : {}_A\mathrm{Mod} \Longrightarrow \mathrm{Ab}$. Alors, pour tout $m \in M$, $a \in A$, $x \in T(M)$ on a :

$$[T(\varphi_{am})](x) = a\,[(T(\varphi_m))(x)]$$

où $T(A/\mathcal{L}) = \mathrm{Ext}^j_A(A/\mathcal{L}, A)$ est muni de la structure de A-module à gauche provenant de la structure de A-module à droite de $A/\mathcal{L}$.

Preuve - On considère une résolution de A par des A-modules à gauche injectifs : $0 \longrightarrow A \longrightarrow I_o \xrightarrow{d_o} I_1 \xrightarrow{d_1} \ldots$ Pour un indice j fixé, posons :

$$\psi = \mathrm{Hom}_A(\varphi_m, \mathrm{id}_{I_j}) \qquad \psi' = \mathrm{Hom}_A(\varphi_{am}, \mathrm{id}_{I_j})$$

Soit $g \in \mathrm{Hom}_A(M, I_j)$, $b \in A$, $\bar{b}$ la classe de b modulo $\mathcal{L}$. On a :

$$[\psi'(g)]\ (\bar{b}) = (g \circ \varphi_{am})\ (\bar{b}) = g(b\ a\ m)$$

$$[a\ \psi(g)]\ (\bar{b}) = \psi(g)\ (\overline{ba}) = (g \circ \varphi_m)\ (\overline{ba}) = g(b\ a\ m)$$

Donc $\psi'(g) = a\ \psi(g)$ et les applications $T(\varphi_m)$ et $T(\varphi_{am})$ de $\mathrm{Ext}^j_A(M,A)$ dans $\mathrm{Ext}^j_A(A/\mathcal{L},A)$ vérifient $[T(\varphi_{am})]\ (x) = a[(T(\varphi_m))\ (x)]$ pour tout $x \in \mathrm{Ext}^j_A(M,A)$.

Lemme 3.4 - Soit $\mathcal{L}$ un idéal bilatère d'un anneau A, on a $\mathcal{L}.\ \mathrm{Ext}^i_A(A/\mathcal{L},A) = 0$ pour tout entier i ‖.

Lemme 3.5 - Soit A un anneau, T un foncteur additif contravariant de ${}_A\mathrm{Mod}$ vers Ab. On suppose $T(A)$ muni d'une structure de A-module à gauche satisfaisant à la condition (P_∞) suivante :

(P_∞) Pour tout A-module à gauche M et tout $m \in M$ on a :
$T(\varphi_{a.m})\ (y) = a\ [(T(\varphi_m))\ (y)]$ quel que soit $y \in T(M)$ et $a \in A$, où φ_m désigne le morphisme $A \longrightarrow M$, $\varphi_m(b) = bm$ si $b \in A$.

Alors, posant $[\phi(M)\ (x)]\ (m) = T(\varphi_m)\ (x)$ pour tout A-module à gauche M, $m \in M$ et $x \in T(M)$ on définit un morphisme fonctoriel $\phi : T \Longrightarrow \mathrm{Hom}_A(-,T(A))$.

Preuve - Pour tout A-module à gauche M et tout $x \in T(M)$ la formule :

$$[\phi(M)\ (x)]\ (m) = T(\varphi_m)\ (x)$$

définit, grâce à la condition (P_∞), un élément $\phi(M)\ (x)$ de $\mathrm{Hom}_A(M,T(A))$. On vérifie facilement que $\phi(M)$ est un homomorphisme de groupes. Vérifions la fonctorialité de ϕ ; soit $g : M \longrightarrow M'$ un morphisme de ${}_A\mathrm{Mod}$; le diagramme suivant, où $g^*(h) = h \circ g$ si $h \in \mathrm{Hom}_A(M',T(A))$, est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
T(M') \arrow[r, "T(g)"] \arrow[d, "\phi(M')"'] & T(M) \arrow[d, "\phi(M)"] \\
\mathrm{Hom}_A(M',T(A)) \arrow[r, "g^*"'] & \mathrm{Hom}_A(M,T(A))
\end{tikzcd}$$

En effet, soit $y \in T(M')$ $x \in M$; on a :

$$[(\phi(M) \circ T(g))(y)](x) = [\phi(M)(T(g)(y))](x)$$
$$= (T(\varphi_x))(T(g)(y)) = [T(g \circ \varphi_x)](y)$$

$$[(g^* \circ \phi(M'))(y)](x) = [g^*(\phi(M')(y))](x)$$
$$= [(\phi(M')(y)) \circ g](x) = (\phi(M')(y))(g(x))$$
$$= T(\varphi_{g(x)})(y)$$

Or pour tout $a \in A$, on a $\varphi_{g(x)}(a) = ag(x) = g(ax) = (g \circ \varphi_x)(a)$; c'est-à-dire $\varphi_{g(x)} = g \circ \varphi_x$; d'où l'égalité cherchée.‖

Lemme 3.6 - Soit A un anneau noethérien à gauche. On suppose vérifiées les hypothèses de 3.5. Alors :

1) Les conditions suivantes sont équivalentes

i) La restriction de T est un foncteur exact à gauche de ${}_A\mathrm{Mod}^f$ vers Ab

ii) Pour tout A-module à gauche M de type fini $\phi(M)$ est un isomorphisme, ϕ étant le morphisme fonctoriel défini en 3.5

2) Si les conditions de 1) sont remplies, alors $T : {}_A\mathrm{Mod}^f \longrightarrow \mathrm{Ab}$ est exact si et seulement si $T(A)$ est un A-module à gauche injectif.

Preuve - 1) Puisque le foncteur :

$$\mathrm{Hom}_A(-, T(A)) : {}_A\mathrm{Mod}^f \longrightarrow \mathrm{Ab}$$

est exact à gauche, il est évident que ii) entraîne i). Réciproquement, supposons i) vérifiée. Alors $\phi(A) : T(A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(A, T(A))$ est, en raison de la condition (P_∞), l'isomorphisme canonique ; en effet :

$[\phi(A)(x)](y) = [T(\varphi_y)](x)$ pour $x \in T(A)$ et $y \in A$; et

$[T(\varphi_y)](x) = y[T(\varphi_1)(x)] = yx$ puisque $T(\varphi_1) = T(id_A) = id_{T(A)}$.

On en déduit que pour tout $r \geq 1$, $\phi(A^r)$ est un isomorphisme, puisque $\phi(A^r)$ est somme directe des isomorphismes $\phi(A)$. Soit M un A-module à gauche de type fini ; comme l'anneau A est noethérien à gauche il existe une suite exacte :

$$A^s \longrightarrow A^r \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

d'où un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & T(M) & \longrightarrow & T(A^r) & \longrightarrow & T(A^s) \\ & & \big\downarrow{\scriptstyle \phi(M)} & & \big\downarrow & & \big\downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(M,T(A)) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(A^r,T(A)) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(A^s,T(A)) \end{array}$$

où les deux dernières flèches verticales sont des isomorphismes. Il en résulte que $\phi(M)$ est un isomorphisme.

2) Supposons les conditions du 1) remplies. Si $T(A)$ est un A-module à gauche injectif, le foncteur $\mathrm{Hom}_A(-, T(A))$ est exact ; il en est donc de même du foncteur : $T : {}_A\underline{\mathrm{Mod}}^f \Longrightarrow \underline{\mathrm{Ab}}$. Réciproquement si $T : {}_A\underline{\mathrm{Mod}}^f \Longrightarrow \underline{\mathrm{Ab}}$ est exact, alors $\mathrm{Hom}_A(-, T(A)) : {}_A\underline{\mathrm{Mod}}^f \Longrightarrow \underline{\mathrm{Ab}}$ aussi et, puisque l'anneau A est noethérien à gauche, le module $T(A)$ est injectif.

<u>Lemme</u> 3.7 - <u>Soit</u> A <u>un anneau local régulier</u>, $\mathfrak{m}$ <u>son radical</u>, $T : {}_A\underline{\mathrm{Mod}}^{\ell f} \Longrightarrow \underline{\mathrm{Ab}}$ <u>un foncteur additif et contravariant, vérifiant les conditions suivantes</u>

a) <u>Pour tout</u> $k \geq 1$, $T(A/\mathfrak{m}^k)$ <u>est muni d'une structure de A-module à gauche de sorte que si</u> $k \leq k'$, <u>l'image par</u> T <u>du morphisme canonique</u> $A/\mathfrak{m}^{k'} \longrightarrow A/\mathfrak{m}^k$ <u>est A-linéaire</u> ;

2) <u>Pour ces structures, et pour tout entier</u> k , T <u>vérifie la propriété</u> (P_k) <u>suivante</u> :

<u>Pour tout A-module à gauche de longueur finie</u> M , <u>tel que</u> $\mathfrak{m}^k M = 0$, <u>on a</u> :

$$[T(\varphi^k_{am})]\ (x) = a\,[(T(\varphi^k_m))\ (x)]$$

<u>quel que soit</u> $m \in M$, $a \in A$, $x \in T(M)$, <u>où</u> $\varphi^k_m : A/\mathfrak{m}^k \longrightarrow M$ <u>est le morphisme défini par</u>

$$\varphi^k_m\ (\bar{a}) = am$$

($\bar{a}$ <u>désignant la classe de</u> a <u>modulo</u> $\mathfrak{m}^k$).

<u>Dans ces conditions, il existe un morphisme fonctoriel</u> :

$$\phi_{\mathfrak{m}} : T \Longrightarrow \mathrm{Hom}_A(-, I)$$

<u>où</u> $I = \varinjlim_k T(A/\mathfrak{m}^k)$, <u>de sorte que si</u> M <u>est un A-module de longueur finie tel que</u> $\mathfrak{m}^k M = (0)$, <u>on a</u> :

$$[\phi_{\mathfrak{m}}(M)\ (y)]\ (x) = (j_k \circ T(\varphi^k_x))\ (y)$$

<u>quels que soient</u> $x \in M$, $y \in T(M)$ <u>et où</u> j_k <u>désigne le morphisme canonique</u> : $T(A/\mathfrak{m}^k) \longrightarrow I$.

Preuve - Soit M un A-module à gauche de longueur finie ; il existe un entier $k \geq 1$, tel que $\mathfrak{m}^k M = (0)$. Pour $x \in M$ $y \in T(M)$, on pose :

$$[(\phi_{\mathfrak{m}}(M))\ (y)]\ (x) = (j_k \circ T(\varphi_x^k))\ (y)$$

Cette expression est indépendante du k choisi vérifiant $\mathfrak{m}^k M = (0)$. D'autre part, en raison de la propriété (P_k), $\phi_{\mathfrak{m}}(M)\ (y)$ est un élément de $\mathrm{Hom}_A(M,I)$. Ceci permet de vérifier que $\phi_{\mathfrak{m}}$ est un morphisme fonctoriel : $T \Longrightarrow \mathrm{Hom}_A(-,I)$.‖

<u>Lemme</u> 3.8 - <u>Soit</u> A <u>un anneau local régulier,</u> $\mathfrak{m}$ <u>son radical,</u> T <u>un foncteur additif contravariant</u> : ${}_A\mathrm{Mod}^f \Longrightarrow \mathrm{Ab}$. <u>On suppose que la restriction de</u> T <u>à</u> ${}_A\mathrm{Mod}^{\ell f}$ <u>vérifie les hypothèses de</u> 3.7 <u>et est un foncteur exact à gauche. Si pour tout entier</u> $k \geq 1$, <u>on a</u> $\mathfrak{m}^k.T(A/\mathfrak{m}^k) = (0)$, <u>alors pour tout A-module à gauche de longueur finie</u> M, <u>le morphisme</u> $\phi_{\mathfrak{m}}(M)$ <u>défini en</u> 3.7 <u>est un isomorphisme.</u>

Preuve - Soit k un entier ≥ 1. Pour tout $A/\mathfrak{m}^k$-module à gauche de type fini N, on peut définir $T(N)$. On obtient ainsi un foncteur, additif contravariant, $\overline{T}$: ${}_{A/\mathfrak{m}^k}\mathrm{Mod}^f \Longrightarrow \mathrm{Ab}$ qui, puisque T vérifie la propriété (P_k), vérifie la propriété (P_∞) de : 3.5. On en déduit un isomorphisme fonctoriel $\overline{\Phi} : \overline{T} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{A/\mathfrak{m}^k}(-, \overline{T}(A/\mathfrak{m}^k))$. Mais tout A-module à gauche M de longueur finie vérifiant $\mathfrak{m}^k.M = (0)$, peut être considéré comme un $A/\mathfrak{m}^k$-module à gauche de type fini ; on peut donc définir :

$$\overline{\Phi}(M) : \overline{T}(M) = T(M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{A/\mathfrak{m}^k}(M, T(A/\mathfrak{m}^k)) = \mathrm{Hom}_A(M, T(A/\mathfrak{m}^k))\ .$$

On vérifie facilement que pour tout $x \in T(M)$ et $y \in M$ on a :

$$[\phi_{\mathfrak{m}}(M)\ (x)]\ (y) = (j_k \circ T(\varphi_y^k))\ (x)$$

$$= j_k\ [(\overline{\phi}(M)\ (x))\ (y)] = [j_k \circ \overline{\phi}(M)\ (x)]\ (y)\ .$$

Puisque T est exact à gauche sur ${}_A\mathrm{Mod}^{\ell f}$, le morphisme j_k est injectif ; par conséquent $\phi_{\mathfrak{m}}(M)$ est injectif. Vérifions que $\phi_{\mathfrak{m}}(M)$ est surjectif ; soit $g \in \mathrm{Hom}_A(M,I)$; puisque le module M est de type fini et que les morphismes canoniques $T(A/\mathfrak{m}^i) \longrightarrow T(A/\mathfrak{m}^{i+1})$ sont injectifs (car T est exact à gauche sur ${}_A\mathrm{Mod}^{\ell f}$), il existe un entier $k \geq 1$ tel que $g(M)$ est contenu dans $T(A/\mathfrak{m}^k)$ et g se décompose en :

$$g = j_k \circ h \quad \text{où} \quad h \in \mathrm{Hom}_A(M, T(A/\mathfrak{m}^k)) \quad ;$$

on peut choisir k assez grand pour que $\mathfrak{m}^k M = (0)$. Pour un tel k, on définit $\overline{\Phi}$ comme précédemment. Puisque $\overline{\phi}(M)$ est un isomorphisme, il existe $x \in T(M)$ tel que $\overline{\phi}(M)\ (x) = h$; d'où $\phi_{\mathfrak{m}}(M)\ (x) = j_k \circ h = g$.‖

<u>Lemme</u> 3.9 - <u>Sous les hypothèses de</u> 3.8, <u>les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

i) <u>le foncteur</u> $T : {}_A\underline{\mathrm{Mod}}^{\ell f} \Longrightarrow \underline{\mathrm{Ab}}$ <u>est exact</u> ;

ii) <u>le</u> <u>A-module</u> <u>à gauche</u> $I = \varinjlim_k T(A/\mathfrak{m}^k)$ <u>est injectif</u>.

<u>Preuve</u> - Puisque $T : {}_A\underline{\mathrm{Mod}}^{\ell f} \Longrightarrow \underline{\mathrm{Ab}}$ est naturellement équivalent à $\mathrm{Hom}_A(-,I)$, il suffit de démontrer : i) $\Longrightarrow$ ii) et pour celà il suffit de vérifier que si I est un A-module à gauche tel que $L_{\mathfrak{m}}(I) = I$ et que $\mathrm{Hom}_A(-, I)$ est exact sur ${}_A\underline{\mathrm{Mod}}^{\ell f}$, alors I est un module injectif. L'idéal $\mathfrak{m}$ vérifiant la propriété d'Artin-Rees, la démonstration de la proposition 4.7 de [12], s'adapte à notre cas. Soit J un idéal à gauche de A et $f : J \longrightarrow I$ un A-homomorphisme. Alors le module $f(J)$ est de type fini et on a : $L_{\mathfrak{m}}(f(J)) = f(J)$, puisque $f(J) \subseteq I$ et que $L_{\mathfrak{m}}(I) = I$. Il existe donc un entier $k \geqslant 1$ tel que $\mathfrak{m}^k f(J) = 0$. D'où, par la propriété d'Artin-Rees, l'existence d'un entier r tel que $f(\mathfrak{m}^r \cap J) = (0)$. Soit $f_1 : \frac{J}{\mathfrak{m}^r \cap J} \longrightarrow I$ l'application déduite de f ; on a donc $f = f_1 \circ p$ où $p : J \longrightarrow J/\mathfrak{m}^r \cap J$ est la surjection canonique. Puisque, par i), le foncteur $\mathrm{Hom}_A(-, I)$ est exact sur ${}_A\underline{\mathrm{Mod}}^{\ell f}$, l'application f_1 se décompose en $f_2 \circ g$ où $g : \frac{J}{\mathfrak{m}^r \cap J} \longrightarrow A/\mathfrak{m}^r$ vers I. Soit $q : A \longrightarrow A/\mathfrak{m}^r$ la surjection canonique ; on a :

$$(f_2 \circ q)\,(a) = f(a) \quad \text{pour tout} \quad a \in J$$

et $f_2 \circ q$ est un prolongement de f à A .||

<u>Proposition</u> 3.10 - <u>Soit</u> A <u>un anneau local régulier de dimension</u> n <u>et de radical</u> $\mathfrak{m}$. <u>Soit</u> $E_A(A/\mathfrak{m})$ <u>l'enveloppe injective du</u> <u>A-module</u> <u>à gauche</u> $A/\mathfrak{m}$. <u>Alors</u> :

1) $H^n_{\mathfrak{m}}(A) = \varinjlim_k \mathrm{Ext}^n_A(A/\mathfrak{m}^k, A)$ <u>est isomorphe à</u> $E_A(A/\mathfrak{m})$; <u>l'injection de</u> $A/\mathfrak{m}$ <u>dans</u> $H^n_{\mathfrak{m}}(A)$ <u>est donnée par l'isomorphisme</u> : $A/\mathfrak{m} \simeq \{x \in H^n_{\mathfrak{m}}(A) \;\; \mathfrak{m}x = 0\}$;

2) <u>Pour tout</u> <u>A-module</u> <u>à gauche de longueur finie</u> M <u>les groupes</u> $\mathrm{Ext}^n_A(M,A)$ <u>et</u> $\mathrm{Hom}_A(M, E_A(A/\mathfrak{m}))$ <u>sont isomorphes</u>.

<u>Preuve</u> - On raisonne comme en [12]. Le foncteur $T = \mathrm{Ext}^n_A(.,A)$ de ${}_A\underline{\mathrm{Mod}}^f$ vers $\underline{\mathrm{Ab}}$ est additif contravariant et sa restriction à ${}_A\underline{\mathrm{Mod}}^{\ell f}$ vérifie, d'après 3.2, 3.3 et 3.4, les hypothèses de 3.8.

IV - Propriété artinienne des foncteurs de cohomologie locale

Les démonstrations de ce paragraphe sont inspirés de [4] et de l'exposé du Séminaire de Caen 1969/70, d'après [4]. Rappelons d'abord les définitions et résultats de [16] suivants :

Définition 4.1 - Un A-module à gauche M est *indécomposable* s'il ne peut s'écrire sous forme d'une somme directe de deux sous-modules propres.

Définition 4.2 - Un idéal à gauche J d'un anneau A est *inter-irréductible* s'il n'est pas intersection de deux idéaux à gauche de A le contenant strictement.

Théorème 4.3 - *Un A-module à gauche M est injectif indécomposable si et seulement s'il est isomorphe à l'enveloppe injectif d'un A-module à gauche de la forme A/J où J est un idéal à gauche inter-irréductible de A et, dans ce cas, pour tout $x \in M$ $x \neq 0$, l'idéal à gauche $\mathrm{Ann}_A\, x$ est inter-irréductible et M est isomorphe à $E_A(A/\mathrm{Ann}_A\, x)$.*

Proposition 4.4 - *Soit A un anneau local dont le radical $\mathfrak{m}$ est engendré par une famille centralisante et soit M un A-module à gauche injectif. Alors :*

1) *Le module M admet une décomposition en somme directe*

$$M = [\oplus \mu \quad E_A(A/\mathfrak{m})] \oplus N$$

où $\oplus \mu \; E_A(A/\mathfrak{m})$ est la somme directe de μ-copies de l'enveloppe injective à gauche de $A/\mathfrak{m}$ et où N est somme directe de modules du type $E_A(A/I)$, où I est un idéal à gauche de A, central-premier, inter-irréductible et strictement contenu dans $\mathfrak{m}$;

2) *Si $M = [\oplus \mu' \quad E_A(A/\mathfrak{m})] \oplus N'$ est une autre décomposition de M, alors $\mu = \mu'$. On posera $\nu(M) = \mu$.*

Preuve - 1) D'après le théorème 2.5 de [16], le module M admet une décomposition en somme directe d'injectifs indécomposables. Soit E un A-module injectif indécomposable non nul et $x \in E$, $x \neq 0$, un élément tel que $J = \mathrm{Ann}_A(x)$ soit maximal parmi les annulateurs d'éléments non nuls de E. D'après 1.4, l'idéal à gauche J est central-premier et d'après 4.3, J est inter-irréductible et E est isomorphe à $E_A(A/J)$;

2) D'après la proposition 2.7 de [16] la décomposition de M est unique, à permutations et à isomorphismes près. D'après 2.6, les modules $E_A(A/\mathfrak{m})$ et $E_A(A/I)$ où I est un idéal à gauche central premier $\neq \mathfrak{m}$, ne sont pas isomorphes ; d'où $\mu = \mu'$.

Notation - On posera désormais, pour tout module à gauche M, sur un anneau A local dont le radical est engendré par une famille centralisante, $\mu_i^A(M) = \nu(E_i)$, $i \in \mathbb{N}$, si : $0 \longrightarrow M \longrightarrow E_o \longrightarrow E_1 \longrightarrow \ldots$, est une résolution injective maximale et où $\nu(E_i)$ est définie en 4.4.

Rappelons le résultat de [3] suivant :

Proposition 4.5 - Soit $\mathfrak{a}$ un idéal bilatère d'un anneau noethérien A ; alors le foncteur exact à gauche $\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, -) : {}_A\mathrm{Mod} \Longrightarrow {}_A\mathrm{Mod}$ conserve les monomorphismes essentiels et les modules injectifs.‖

Proposition 4.6 - Soit A un anneau local, $\mathfrak{m}$ son radical et M une A-module à gauche. Soit :

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E_o \xrightarrow{d_o} E_1 \xrightarrow{d_1} \ldots$$

une résolution injective minimale de M et $x \in \mathfrak{m}$ un élément du centre de A, non diviseur de zéro dans M ni dans A. Alors

(✱) $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(A/Ax,\ d_o(E_o)) \xrightarrow{\bar{d}_o} \mathrm{Hom}_A(A/Ax,\ E_1) \xrightarrow{\bar{d}_1} \ldots$ est une résolution injective du A/xA-module $\mathrm{Hom}_A(A/Ax,\ d_o(E_o))$ lequel est isomorphe à M/xM.

Preuve - La démonstration est la même que dans le cas commutatif [4].

Puisque $\mathrm{Ext}_A^i(A/Ax,\ M) = 0$ pour $i \geq 2$, la suite (✱) est exacte en $\mathrm{Hom}_A(A/Ax,\ E_j)$ pour $j \geq 2$. D'autre part la suite $0 \longrightarrow d_o(E_o) \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_2$ étant exacte, il en est de même de : $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(A/Ax,\ d_o(E_o)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(A/Ax,\ E_1) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(A/Ax,\ E_2)$. D'où l'exactitude de la suite (✱). Puisque, pour $i \geq 1$, E_i est l'enveloppe injective de $d_{i-1}(E_{i-1})$, il résulte de 4.5 que $\mathrm{Hom}_A(A/Ax,\ E_i)$ est enveloppe injective du A/Ax-module $\mathrm{Hom}_A(A/Ax,\ \mathrm{Im}\, d_{i-1})$.
Vérifions que le morphisme naturel de A/Ax-modules :
$\varphi : \bar{d}_{i-1}(\mathrm{Hom}_A(A/Ax,\ E_{i-1})) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(A/Ax,\ d_{i-1}(E_{i-1}))$ est un isomorphisme ;
φ est évidemment injectif ; montrons qu'il est surjectif. Soit
$g \in \mathrm{Hom}_A(A/Ax,\ d_{i-1}(E_{i-1}))$; alors g définit un élément $\tilde{g} \in \mathrm{Hom}_A(A/Ax,\ E_i)$ et on a : $\bar{d}_i(\tilde{g}) = d_i \circ \tilde{g} = 0$ car $\mathrm{Im}\, \tilde{g} \subseteq d_{i-1}(E_{i-1}) = \ker d_i$. Par suite
$\tilde{g} \in \ker \bar{d}_i = \mathrm{Im}\, \bar{d}_{i-1}$ et il existe $f \in \mathrm{Hom}_A(A/Ax,\ E_{i-1})$ tel que : $\tilde{g} = \bar{d}_{i-1}(f)$;

d'où $\varphi(\bar{d}_{i-1}(f)) = g$. Par conséquent ($\star$) est une résolution injective minimal de son premier terme. Enfin, puisque x est non diviseur de zéro dans M , il est non diviseur de zéro dans l'enveloppe injective E_o de M . De plus, E_o étant un A-module divisible et x étant non diviseur de zéro dans A , on a : $E_o = xE_o$ et la multiplication par x est un automorphisme de E_o .

Considérons le diagramme du serpent dans la catégorie des A-modules :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(A/Ax,\ d_o(E_o)) \arrow[d, "i"] & \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "d_{-1}"] \arrow[d, "x"] & E_o \arrow[r, "d_o"] \arrow[d, "x"] & d_o(E_o) \arrow[r] \arrow[d, "x"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "d_{-1}"] \arrow[d, "p"] & E_o \arrow[r, "d_o"] \arrow[d] & d_o(E_o) \arrow[r] & {} \\
 & M/xM \arrow[r] \arrow[d] & 0 & & \\
 & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

où i est l'isomorphisme d'identification : $\mathrm{Hom}_A(\frac{A}{Ax},\ d_o(E_o)) \simeq \mathrm{Ann}_{d_o(E_o)}(x)$.
Il en résulte un isomorphisme de A (et donc de A/Ax)-module

$$\psi : \mathrm{Hom}_A(A/Ax,\ d_o(E_o)) \cong M/xM \ .\|$$

<u>Corollaire</u> 4.7 - <u>Soit</u> A <u>un anneau local dont le radical</u> $\mathfrak{m}$ <u>est engendré par une famille centralisante</u>, M <u>un A-module à gauche</u>, $x \in \mathfrak{m}$ <u>un élément du centre de</u> A <u>non diviseur de zéro dans</u> A <u>ni dans</u> M . <u>On a alors</u> :

$$\mu_i^{A/xA}\ (M/xM) = \mu_{i+1}^{A}\ (M).$$

<u>Preuve</u> - Soit :

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E_o \longrightarrow E_1 \longrightarrow \cdots$$

une résolution injective minimal de M ; alors :

$$E_i = [\oplus\ \mu_i^A\ (M)\quad E_A(A/\mathfrak{m})] \oplus N_i \quad ,$$

où N_i est somme directe de module du type $E_A(A/I)$ où I est un idéal à gauche de A , central-premier, inter-irréductible et distinct de $\mathfrak{m}$. Soit I un idéal à gauche central premier ; si $x \notin I$, alors x n'est pas diviseur de zéro dans A/I ni dans $E_A(A/I)$ et par suite : $\mathrm{Hom}_A(A/Ax,\ E_A(A/I)) = 0$; si $x \in I$ alors par 4.5, $\mathrm{Hom}_A(A/Ax,\ E_A(A/I)) \simeq E_{A/Ax}\ (A/I)$. **Enfin**, toujours par 4.5,

$\mathrm{Hom}_A(A/Ax, E_A(A/\mathfrak{m})) \simeq E_{A/Ax}(A/\mathfrak{m})$. On a donc pour $i \geqslant 0$:

$$\mathrm{Hom}_A(A/Ax, E_i) = \mathrm{Ann}_{E_i}(x) = [\oplus\, \mu_i^A(M)\ \mathrm{Hom}_A(\tfrac{A}{Ax}, E_A(A/\mathfrak{m}))] \oplus M_i$$

où M_i est somme directe de A/Ax-modules de la forme $\mathrm{Hom}_A(A/Ax, E_A(A/I))$ où I est un idéal à gauche de A, central-premier inter-irréductible, tel que $x \in I$ et $I \neq \mathfrak{m}$; pour conclure que $\mu_i^A(M) = \mu_{i-1}^{A/Ax}(M/xM)$ il suffit donc de vérifier que I/Ax est un idéal à gauche de A/Ax central-premier, inter-irréductible et distinct de $\frac{\mathfrak{m}}{Ax}$ et d'appliquer 4.6. Il est évident que I/Ax est inter-irréductible si I l'est et que $I/Ax \neq \mathfrak{m}/Ax$ si $I \neq \mathfrak{m}$. Vérifions que I/Ax est central-premier. Soit $r_1,\dots,r_p$ une famille d'éléments de A dont les classes modulo Ax, soit $\bar{r}_1,\dots,\bar{r}_p$, forment une famille centralisante. Supposons que $\{\bar{r}_1,\dots,\bar{r}_p\} \not\subseteq \bar{I} = I/Ax$ et posons $i_o = \mathrm{Min}\{i,\ i=1,\dots,p\ ,\ \bar{r}_i \notin \bar{I}\}$. Puisque $x \in I$, on a $\bar{r}_i \in \bar{I}$ si et seulement si $r_i \in I$. Donc la famille centralisante $x, r_1,\dots,r_p$ n'est pas contenue dans I et $i_o = \mathrm{Min}\{i\ ,\ r_i \notin I\}$. Soit $a \in A$, et $\bar{a}$ la classe de a modulo Ax. Si $\bar{r}_{i_o}\bar{a} \in \bar{I}$, on a $r_{i_o} a \in I$; donc $a \in I$ et par suite $\bar{a} \in \bar{I}$. ||

Remarque - Dans le cas où tout idéal bilatère de l'anneau A admet un système de générateur centralisant, on peut dans la démonstration précédente **simplifier** la preuve du fait que I/Ax est central-premier. En utilisant la caractérisation donnée en 1.3. En effet $\bar{A} = A/Ax$ possède la même propriété que A. Si $\bar{a}\,\bar{A}\,\bar{b} \subseteq \bar{I}$, $a, b \in A$, alors $a\,A\,b \subseteq I$ donc a ou $b \subseteq I$ et $\bar{a}$ ou $\bar{b} \in \bar{I}$.

Proposition 4.8 - Soit A un anneau local régulier de dimension n et de radical $\mathfrak{m}$ et M un A-module à gauche. Alors :

1) Quelque soit i : $\mu_i^A(M) = \dim_{A/\mathfrak{m}} \mathrm{Ext}_A^i(A/\mathfrak{m}, M)$, dimension du $A/\mathfrak{m}$-espace vectoriel à gauche $\mathrm{Ext}_A^i(A/\mathfrak{m}, M)$;

2) Si M est de type fini, $\mu_i^A(M)$ est fini pour tout i.

Preuve - La démonstration est une adaptation du cas commutatif [4]. Considérons une résolution injective minimale de M

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{d_{-1}} E_o \xrightarrow{d_o} E_1 \longrightarrow \dots$$

où $E_i = [\oplus\, \mu_i^A(M)\, E_A(A/\mathfrak{m})] \oplus N_i$ et où N_i est somme directe de modules de type $E_A(A/I)$, I étant un idéal à gauche de A, central-premier inter-irreductible et distinct de $\mathfrak{m}$; pour un tel idéal I on a : $\{x \in A/I \mid \mathfrak{m}x = 0\} = (0)$;

en effet, soit $r_1, \dots, r_p$ une famille centralisante de générateurs de $\mathfrak{m}$ et, puisque $I \neq \mathfrak{m}$, on peut poser $i_o = \mathrm{Min}\{i \,,\, i = 1,\dots,p \,,\, r_i \notin I\}$; alors si $a \in A$ et $\mathfrak{m}\, a \subseteq I$ on a $r_{i_o}\, a \in I$; d'où, puisque I est central-premier, $a \in I$; (remarquons que, dans le cas où tout idéal bilatère de l'anneau A est engendré par un système centralisant, on peut pour démontrer la précédente assertion utiliser la caractérisation 1.3). Il résulte de ce qui précède, que, si l'idéal à gauche central-premier I est distinct de $\mathfrak{m}$, alors : $\{x \in E_A(A/I) \quad \mathfrak{m}\, x = 0\} = (0)$. On a donc $\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{m}, E_i) = \{x \in E_i \quad \mathfrak{m}\, x = 0\}$ $= \oplus\, \mu_i\, \{x \in E_A(A/\mathfrak{m}) \quad \mathfrak{m}\, x = 0\}$. Par conséquent $\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{m}, E_i)$ est somme directe de μ_i copies de $\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{m}, E_A(A/\mathfrak{m}))$ qui est, d'après 4.5, isomorphe à $A/\mathfrak{m}$. Donc $\mu_i = \dim_{A/\mathfrak{m}} \mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{m}, E_i)$. Posons $E_{-1} = M$ et démontrons que, pour tout $i \geq 0$, l'application $\bar{d}_i : \mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{m}, E_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{m}, E_{i+1})$ définie à l'aide de d_i, est nulle. Soit $x \in \mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{m}, E_i)$. Puisque E_i est l'enveloppe injective de $d_{i-1}(E_{i-1})$ il résulte de 4.5, que l'injection canonique $\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{m}, d_{i-1}(E_{i-1})) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(\frac{A}{\mathfrak{m}}, E_i)$ est un isomorphisme. Il en résulte aisément que $\bar{d}_i(x) = 0$. Considérons la suite de $A/\mathfrak{m}$ - espaces vectoriels

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{m}, M) \xrightarrow{\bar{d}_{-1}} \mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{m}, E_o) \xrightarrow{\bar{d}_o} \mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{m}, E_1) \longrightarrow \cdots$$

Pour $i \geq 1$, les $A/\mathfrak{m}$ -espaces vectoriels $\mathrm{Ext}^i_A(A/\mathfrak{m}, M)$ et $(\ker \bar{d}_i)/(\mathrm{Im}\, \bar{d}_{i-1}) = \mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{m}, E_i)$ sont isomorphes.

Pour $i = 0$, le fait que $\bar{d}_o = 0$ entraîne que $\bar{d}_{-1}$ est un isomorphisme.

2) D'après la proposition 2 de [15], les A-modules à gauche $\mathrm{Ext}^i_A(A/\mathfrak{m}, M)$ et $\mathrm{Tor}^A_{n-i}(A/\mathfrak{m}, M)$ sont isomorphes. Soit :

$$\cdots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_o \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

une résolution projective de type fini de M. Alors pour tout i les A-modules $A/\mathfrak{m} \otimes_A P_i$ sont de type fini et il en est donc de même des $\mathrm{Tor}^A_i(A/\mathfrak{m}, M)$ et des $\mathrm{Ext}^i_A(A/\mathfrak{m}, M)$.‖

<u>Définition</u> 4.9 - Un A-module à gauche M est <u>cofini</u> si son enveloppe injective est somme directe fini d'enveloppes injectives de modules simples.

La proposition suivante est la proposition 3.19 de [21].

<u>Proposition</u> 4.10 - <u>Soit</u> M <u>un A-module à gauche</u>. <u>Les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

i) le module M est cofini ;

ii) tout système inverse de sous-module non nuls de M admet une intersection non nulle.

La proposition suivante est le théorème 3.21 de [21] .

Proposition 4.11 - Soit M un A-module à gauche. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) Le module M est artinien ;

ii) Tout quotient de M est cofini.

Théorème 4.12 - Soit A un anneau local dont le radical $\mathfrak{m}$ est engendré par un système centralisant. Alors l'enveloppe injective du A-module à gauche $A/\mathfrak{m}$ est artinienne.

Preuve - On adapte la démonstration du théorème 4.3 de [21]. Notons E l'enveloppe injective du A-module à gauche $A/\mathfrak{m}$. On supposera que E n'est pas artinien et on en déduira une contradiction. Soit $\mathfrak{F}$ l'ensemble des idéaux bilatères $\mathfrak{a}$ de A tels que $\mathrm{Ann}_E(\mathfrak{a})$ n'est pas artinien ; cet ensemble n'est pas vide puisque $\mathrm{Ann}_E(0) = E$ est supposé non artinien. L'anneau A étant noethérien à gauche, l'ensemble $\mathfrak{F}$ possède un élément maximal, soit $\mathfrak{p}$. Comme $E = E_A(A/\mathfrak{m})$ est extension essentielle du module simple $A/\mathfrak{m}$, on a : $\mathrm{Ann}_E(\mathfrak{m}) = A/\mathfrak{m}$; donc $\mathfrak{m} \notin \mathfrak{F}$ et $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{m}$.

1) Montrons que $E_{A/\mathfrak{p}}(A/\mathfrak{m})$ est isomorphe au $A/\mathfrak{p}$ -module $\mathrm{Ann}_E\,\mathfrak{p}$. L'extension de $A/\mathfrak{p}$ -modules :

$$A/\mathfrak{m} \subset \mathrm{Ann}_E\,\mathfrak{p}$$

est évidemment essentielle. D'autre part $\mathrm{Ann}_E\,\mathfrak{p}$ est un $A/\mathfrak{p}$ -module injectif ; en effet soit J un idéal à gauche de $A/\mathfrak{p}$ et $f : J \longrightarrow \mathrm{Ann}_E\,\mathfrak{p}$ un $A/\mathfrak{p}$ -homomorphisme. Alors l'homomorphisme de A-modules $f : J \longrightarrow E$ se prolonge en un A-homomorphisme : $g : A/\mathfrak{p} \longrightarrow E$. Mais si $x \in A/\mathfrak{p}$ on a :

$$\mathfrak{p} \subseteq \mathrm{Ann}_A(x) \subseteq \mathrm{Ann}_A(g(x))$$

donc $g(x) \in \mathrm{Ann}_E\,\mathfrak{p}$. Par suite $g : A/\mathfrak{p} \longrightarrow \mathrm{Ann}_E\,\mathfrak{p}$ est un $A/\mathfrak{p}$ -homomorphisme qui prolonge f .

2) Soit $\varphi : A \longrightarrow A/\mathfrak{p}$ la surjection canonique et soit $\mathfrak{L}$ un idéal bilatère non nul de $A/\mathfrak{p}$; alors $\varphi^{-1}(\mathfrak{L}) = \mathfrak{a}$ est un idéal bilatère de A et $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{a}$. D'après la maximalité de $\mathfrak{p}$ dans $\mathfrak{F}$, le module $\mathrm{Ann}_E(\mathfrak{a})$ est artinien. Posons $E' = \mathrm{Ann}_E(\mathfrak{p}) = E_{A/\mathfrak{p}}(A/\mathfrak{m})$. On a $\mathrm{Ann}_{E'}\,\mathfrak{L} = \mathrm{Ann}_E\,\mathfrak{a}$ et

donc pour tout idéal bilatère non nul $\mathcal{L}$ de $A/\mathfrak{p}$ le $A/\mathfrak{p}$ -module $\mathrm{Ann}_{E'}\mathcal{L}$ est artinien.

3) Montrons que le $A/\mathfrak{p}$ -module E' est artinien. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi et notons $\mathcal{G}$ l'ensemble des sous-$A/\mathfrak{p}$ -module N de E' tel que E'/N ne soit pas cofini. D'après 4.11 et l'hypothèse faite sur E', l'ensemble $\mathcal{G}$ n'est pas vide. D'autre part, l'ensemble $\mathcal{G}$ est inductif pour l'ordre décroissant. En effet soit $(N_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille d'éléments de $\mathcal{G}$, totalement ordonnée pour l'inclusion. Vérifions que $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda$ appartient à $\mathcal{G}$. Au cas où il existe $\mu\in\Lambda$ tel que $\bigcap_{\mu\in\Lambda} N_\lambda = N_\mu$, le résultat est évidemment vrai. Sinon, pour tout $\mu\in\Lambda$, on a : $N_\mu/(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda) \neq (0)$ et $\bigcap_{\mu\in\Lambda} (N_\mu/\bigcap_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda) = (0)$.

Donc, d'après 4.11, le $A/\mathfrak{p}$ -module : $E'/\bigcap_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda$ n'est pas cofini ; par suite $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda \in \mathcal{G}$ dans tous les cas. Par conséquent, l'ensemble $\mathcal{G}$ est inductif et possède donc un élément minimal, soit N_o. Pour tout $A/\mathfrak{p}$ -module propre N_1 de N_o, le sous-module N_o/N_1 du module cofini E'/N_1 est lui-même cofini. Ceci implique que N_o est un $A/\mathfrak{p}$ -module artinien. L'anneau $A/\mathfrak{p} = A'$ étant local et son radical $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}/\mathfrak{p}$ étant engendré par un système centralisant, le $A/\mathfrak{p}$ -module $E_{A/\mathfrak{p}}(E'/N_o)$ admet une décomposition en somme directe du type :

$$(*) \qquad [\oplus \mu \,.\, E_{A/\mathfrak{p}}(A/\mathfrak{m})] \oplus N$$

où N est somme directe de $A/\mathfrak{p}$ -modules du type : $E_{A/\mathfrak{p}}(A'/I)$ où I est un idéal à gauche central-premier inter-irréductible de A' et $I \neq \mathfrak{m}'$. On va montrer que $N = (0)$; en effet sinon il existerait $y\in E'$ dont la classe modulo N_o, soit $\bar{y}$, serait un élément non nul de A'/I. Puisque $y\in E' = E_{A'}(A'/\mathfrak{m}')$ et que $L_{\mathfrak{m}}(E') = E'$, il existe d'après 2.6, un entier $k\geq 1$ tel que $\mathfrak{m}^k\, y = (0)$; d'où $\mathfrak{m}'^{(k)}\,\bar{y} = \bar{0}$ dans $E_{A'}(E'/N_o)$ et $\bar{y}$ appartiendrait à $L_{\mathfrak{m}'}(A'/I)$ qui est nul d'après 2.6. Par conséquent $\bar{y} = \bar{0}$ contrairement à l'hypothèse.

La décomposition $(*)$ s'écrit donc :

$$E_{A/\mathfrak{p}}(E'/N_o) = \oplus\, \mu\, E_{A/\mathfrak{p}}(A/\mathfrak{m})$$

et le socle du $A/\mathfrak{p}$ -module E'/N_o est :

$$\mathrm{Soc}(E'/N_o) = \oplus\, \mu \;\; \mathrm{Soc}\,[E_{A/\mathfrak{p}}(A/\mathfrak{m})] = \oplus\, \mu \,.\, A/\mathfrak{m} \quad .$$

Par conséquent $\mathfrak{m}'\,.\,\mathrm{Soc}(E'/N_o) = 0$. Puisque $\mathfrak{m}'$ est engendré par une famille centralisante et que $\mathfrak{p}\neq\mathfrak{m}$, on peut trouver un élément $r\in\mathfrak{m}'$ $r\neq 0$ tel que r appartient au centre de l'anneau $A/\mathfrak{p}$. Alors un tel élément r annule $\mathrm{Soc}(E'/N_o)$; d'où :

$$\mathrm{Soc}(E'/N_o) \subseteq \mathrm{Ann}_{E'/N_o}(r) .$$

D'autre part, puisque r appartient au centre de $A/\mathfrak{p}$, $r.A/\mathfrak{p}$ est un idéal bilatère non nul de $A/\mathfrak{p}$. D'après le point 2) de la démonstration, le $A/\mathfrak{p}$ -module $\mathrm{Ann}_{E'}(r.A/\mathfrak{p})$ est artinien. Posons :

$$N_o \underset{E'}{:} r = \{ x \in E' \quad r\,x \in N_o \}$$

et si $x \in N_o \underset{E'}{:} r$, notons $\psi(x)$ l'image dans $N_o/r\,N_o$ de l'élément $r\cdot x$ de N_o. Alors ψ est un $A/\mathfrak{p}$ -homomorphisme : $N_o \underset{E'}{:} r \longrightarrow N_o/rN_o$, de noyau égal à $N_o + \mathrm{Ann}_{E'}(r.A/\mathfrak{p})$. Par suite $\ker \psi$ est artinien comme somme de deux modules artiniens. L'image de ψ , étant contenue dans N_o/rN_o , est aussi un $\frac{A}{\mathfrak{p}}$ -module artinien. Par conséquent le module $(N_o \underset{E'}{:} r)/\ker \psi$ est artinien. Donc $(N_o \underset{E'}{:} r)$ est artinien et $\mathrm{Ann}_{E'/N_o}(r) \cong (N_o \underset{E'}{:} r)/N_o$ est artinien. Puisque $\mathrm{Soc}(E'/N_o)$ est contenu dans $\mathrm{Ann}_{E'/N_o}(r)$, il est artinien et μ est fini. On obtient ainsi ainsi :

$$E_{A/\mathfrak{p}}(E'/N_o) = \oplus\, \mu \,.\, E_{A/\mathfrak{p}}(A/\mathfrak{m})$$

où μ est fini. Donc E'/N_o est cofini, ce qui contredit le fait que $N_o \in \mathcal{G}$. Par suite le module E' est artinien.

4) Il en résulte que $\mathrm{Ann}_E\,\mathfrak{p} = E' = E_{A/\mathfrak{p}}(A/\mathfrak{m})$ est artinien, ce qui contredit le fait que $\mathfrak{p} \in \mathfrak{F}$ Donc le module E est artinien.

<u>Proposition</u> 4.13 - <u>Soit</u> A <u>un anneau local régulier de dimension</u> n <u>et de radical</u> $\mathfrak{m}$. <u>Si</u> M <u>est un A-module à gauche de type fini alors, pour tout</u> $i \geq 0$, <u>le A-module</u> $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ <u>est artinien.</u>

<u>Preuve</u> - Soit :

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E_o \longrightarrow E_1 \longrightarrow \cdots$$

une résolution injective minimal de M . Alors :

$$E_i = [\oplus\, \mu_i^A(M) \quad E_A(A/\mathfrak{m})] \oplus N_i$$

où N_i est somme directe de modules du type $E_A(A/I)$ où I est un idéal à gauche de A , inter-irréductible, central-premier et distinct de $\mathfrak{m}$. Puisque, pour un tel I on a $L_{\mathfrak{m}}(E_A(A/I)) = (0)$ et que $L_{\mathfrak{m}}(E_A(A/\mathfrak{m})) = E_A(A/\mathfrak{m})$ d'après 2.6, on en déduit que :

$$L_{\mathfrak{m}}(E_i) = \oplus\, \mu_i^A(M)\, E_A(A/\mathfrak{m})$$

D'après 4.8, $\mu_i^A(M)$ est fini et d'après 4.12, le module $E_A(A/\mathfrak{m})$ est artinien. Donc $L_{\mathfrak{m}}(E_i)$ est artinien pour tout i et il en est de même de $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$.

V - Annulation des foncteurs $H^i_{\mathfrak{a}}$

Définition 5.1 - Soit A un anneau local régulier de radical $\mathfrak{m}$, M un A-module à gauche. On appelle profondeur de M (en notation : $\mathrm{prof}_A M$) le plus petit entier $i \geq 0$, s'il existe, tel que $\mathrm{Ext}^i_A(A/\mathfrak{m}, M) \neq 0$; sinon on dira que la profondeur de M est infinie.

Lemme 5.2 - Soit A un anneau local régulier de radical $\mathfrak{m}$ et de dimension n et M un A-module à gauche

1) Si $\mathrm{Ext}^i_A(A,\mathfrak{m}, M) = 0$, alors $\mathrm{Ext}^i_A(N,M) = 0$ pour tout A-module à gauche N de longueur finie ;

2) Si M est de type fini, la profondeur de M est infinie si et seulement si $M = (0)$;

3) Si M est de type fini non nul on a : $\mathrm{prof}_A M + \mathrm{dh}_A M = n$.

Preuve - 1) Il suffit de procéder par récurrence sur la longueur de N .

2) D'après la proposition 2 de [15], le A-module à gauche $\mathrm{Ext}^n_A(A/\mathfrak{m},M)$ est isomorphe à $\frac{M}{\mathfrak{m}M}$. Si $\mathrm{Ext}^n_A(A/\mathfrak{m},M) = 0$, il résulte du lemme de Nakayama que $M = (0)$.

3) Posons $p = \mathrm{prof}_A(M)$. D'après 2), on a $p \leq n$. D'après la proposition 2 de [15] les A-modules à gauche $\mathrm{Ext}^{p-1}_A(A/\mathfrak{m}, M) = (0)$ et $\mathrm{Tor}^A_{n-p+1}(A/\mathfrak{m},M)$ sont isomorphes. Considérons une suite exacte de A-modules :

$$0 \longrightarrow S \longrightarrow P_{n-p-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_o \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

où les P_i sont projectifs de type fini. Alors $\mathrm{Tor}^A_1(A/\mathfrak{m},S) = (0)$ et d'après le corollaire 2 de la proposition 5, n° 2, §3 chapitre II de [5], le A-module S est libre ; d'où $\mathrm{dh}_A M \leq n-p$. Pour prouver l'égalité $\mathrm{dh}_A M = n-p$ on raisonne par l'absurde et on suppose que $\mathrm{dh}_A M < n-p$. Il existe donc une résolution projective de type fini de M :

$$0 \longrightarrow P_{n-p-1} \longrightarrow \cdots \qquad \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_o \longrightarrow M \longrightarrow 0 .$$

Puisque $\mathrm{Tor}^A_1(A/\mathfrak{m}, P_{n-p-1}) = 0$ on a $\mathrm{Tor}^A_{n-p}(A/\mathfrak{m},M) = 0$ d'où (loc.cit) $\mathrm{Ext}^p_A(A/\mathfrak{m}, M) = 0$ ce qui contredit la définition de p . On a donc $\mathrm{prof}_A M + \mathrm{dh}_A M = n$ //.

Théorème 5.3 - Soit A un anneau local régulier de radical $\mathfrak{m}$ et M un A-module à gauche. On a :

$$\mathrm{prof}_A(M) = \mathrm{Inf}\,\{i \ , \ H^i_{\mathfrak{m}}(M) \neq 0\} ,$$

le second membre étant ∞ si $H^i_{\mathfrak{m}}(M) = 0$ pour tout i .

Preuve - Il suffit de prouver, pour un entier $m \geqslant 0$, l'équivalence des conditions suivantes :

i) $H^i_{\mathfrak{m}}(M) = 0$ pour tout $i \lneqq m$

ii) $\mathrm{prof}_A\,(M) \geqslant m$.

Pour prouver i) $\Longrightarrow$ ii) on procède par récurrence sur m. Si $m=0$, il n'y a rien à démontrer. Supposons $m \geqslant 1$ et le résultat prouvé pour $m-1$. Alors de l'hypothèse : $H^i_{\mathfrak{m}}(M) = 0$ pour $i < m$, on déduit que $\mathrm{prof}_A(M) \geqslant m-1$. Par suite $\mathrm{Ext}^i_A(N,M) = 0$ si $i < m-1$ et si N est de longueur finie. Soit $k \leqslant k'$; l'application : $\mathrm{Ext}^{m-1}_A(A/\mathfrak{m}^k, M) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{m-1}_A(A/\mathfrak{m}^{k'}, M)$ déduite de la surjection canonique : $A/\mathfrak{m}^{k'} \longrightarrow A/\mathfrak{m}^k$, est injective. Puisque $H^{m-1}_{\mathfrak{m}}(M) = \varinjlim_k \mathrm{Ext}^{m-1}_A(A/\mathfrak{m}^k, M)$ on a : $\mathrm{Ext}^{m-1}_A(A/\mathfrak{m}, M) = 0$; d'où $\mathrm{prof}_A M \geqslant m$. Vérifions que ii) $\Longrightarrow$ i). On a donc $\mathrm{prof}_A(M) \geqslant m$; d'où $\mathrm{Ext}^i_A(N,M) = 0$ pour $i \lneqq m$ et tout A-module de longueur finie N. En particulier $\mathrm{Ext}^i_A(A/\mathfrak{m}^k, M) = (0)$ pour $i \lneqq m$ et pour tout entier $k \geqslant 0$. Donc $H^i_{\mathfrak{m}}(M) = \varinjlim_k \mathrm{Ext}^i_A(A/\mathfrak{m}^k, M) = (0)$ si $i < m$ ‖.

La fin du paragraphe est consacrée à la démonstration d'un théorème tendant à comparer la K-dimension de Gabriel-Rentschler (cf.[9]) d'un A-module M et le plus grand indice d'annulation du foncteur de cohomologie locale $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$.

Proposition 5.4 - Soit A un anneau noethérien (à droite et à gauche) $\mathfrak{a}$ un idéal bilatère de A engendré par une famille centralisante et M un A-module à gauche tel que $L_{\mathfrak{a}}(M) = M$. Alors on a : $H^i_{\mathfrak{a}}(M) = 0$ pour $i \geqslant 1$.

Preuve - Considérons une résolution injective minimale de M :

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E_0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow \cdots$$

D'après 2.5, on a $L_{\mathfrak{a}}(E_i) = E_i$ pour tout $i \geqslant 0$. D'où le résultat.‖

Corollaire 5.5 - Soit A un anneau local de radical $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{a}$ un idéal bilatère de A engendré par une famille centralisante et M un A-module à gauche de longueur finie. Alors $H^i_{\mathfrak{a}}(M) = 0$ pour $i \geqslant 1$.

Preuve - Puisque M est de longueur finie, il est annulé par une puissance de $\mathfrak{m}$ et donc aussi par une puissance de $\mathfrak{a}$. D'où $L_{\mathfrak{a}}(M) = M$ et par 5.4, on a $H^i_{\mathfrak{a}}(M) = (0)$ pour $i \geqslant 1$.‖

Proposition 5.6 - Soit A un anneau local, $\mathfrak{a}$ un idéal bilatère de A engendré par une famille centralisante et M un A-module à gauche artinien. On a pour tout $i > 0$, $H^i_{\mathfrak{a}}(M) = 0$.

Preuve - Le module M est réunion de la famille de ses sous-modules de type fini, lesquels sont de longueur finie. D'où le résultat par 5.5 et 2.11.∥

Dans l'énoncé et la démonstration des lemmes 5.7 et 5.8 on conservera les hypothèses et notations suivantes : soit A un anneau local de radical $\mathfrak{m}$, x un élément du centre de A, $x \in \mathfrak{m}$, $x \neq 0$, et I un idéal à gauche central premier de A. Notons $Z(A)$ le centre de A ; alors $I \cap Z(A)$ est un idéal premier de $Z(A)$. On notera S le complémentaire dans $Z(A)$ de $I \cap Z(A)$. Alors A/I est un $Z(A)$-module à gauche, $S^{-1}(A/I)$ est un A-module à gauche et le morphisme canonique : $\varphi : A/I \longrightarrow S^{-1}(A/I)$ est un A-homomorphisme injectif. On notera K le conoyau de φ.

Lemme 5.7 - Si N est un sous-A-module de type fini de K, la dimension de Krull de N est strictement inférieure à celle de A/I.

Preuve - On peut supposer le module N monogène. On a donc $N = Ae$ où $e \in K$. Soit $p : A \longrightarrow A/I$ et $r : S^{-1}(A/I) \longrightarrow K$ les surjections canoniques. On a alors $e = r(g)$ où $g \in S^{-1}(A/I)$ $g = t^{-1}.\, p(b)$ où $b \in A$ $t \in Z(A)$ $t \notin I$. L'élément $w = t^{-1}\, p(1)$ de $S^{-1}(A/I)$, où 1 est l'élément unité de A, vérifie $bw = g$. Soit z un élément de N ; alors $z = ae$ où $a \in A$. Donc $z = ar(g) = abr(w) = (ab)v$ en posant $v = r(w)$. On a donc $N \subseteq A.v$. D'autre part on vérifie que $I + At$ est contenu dans $\mathrm{Ann}_A v$. Par suite $Av \simeq A/\mathrm{Ann}_A v$ est isomorphe à un quotient de $A/I + At$ et on obtient les inégalités :

$$\text{K-dim } N \leq \text{K-dim } Av \leq \text{K-dim } \frac{A}{I + At}$$

et, puisque I est central-premier et que $t \notin I$ on a

$$\text{K-dim } \frac{A}{I + At} < \text{K-dim } \frac{A}{I} \quad .∥$$

Lemme 5.8 - La multiplication par x dans $S^{-1}(A/I)$ est un A-isomorphisme.

Preuve - Ceci résulte du fait que I est central-premier et que $x \in S$.∥

Lemme 5.9 - Soit A un anneau noethérien

a) Soit T un foncteur additif contravariant de ${}_A\mathrm{Mod}$ vers Ab ; et soit $((M_k)_{k\in\mathbb{N}}, \varphi_{kk'})$ un système projectif de A-modules à gauche.

On suppose que pour tout entier k, il existe $\tau(k) \geq k$ tel que $\varphi_{k.\tau(k)} = 0$.

Alors $\varinjlim_k T(M_k) = 0$;

b) En particulier, soit $\mathfrak{a}$ un idéal bilatère de A, engendré par une famille centralisante et z un élément du centre de A non diviseur de zéro dans A. Pour tout A-module à gauche M annulé par z et tout $j \geq 0$, on a :

$$\varinjlim_k \operatorname{Ext}^j_{\frac{A}{zA}}\left(\frac{\mathfrak{a}^k : Az}{\mathfrak{a}^k}, M\right) = 0$$

où $\mathfrak{a}^k : Az = \{a \in A \quad za \in \mathfrak{a}^k\}$.

Preuve - a) Soit $k \leq k'$ on a $\varphi_{kk'} : M_{k'} \longrightarrow M_k$ un A-homomorphisme. Il en résulte un homomorphisme de groupes abéliens

$$\psi_{k'k} : T(M_k) \longrightarrow T(M_{k'})$$

D'où un système inductif de groupes abéliens,; on notera ψ_k le morphisme canonique :

$$T(M_k) \longrightarrow \varinjlim_r T(M_r) \quad .$$

Soit $x \in \varinjlim_r T(M_r)$; il existe un entier $k \geq 1$ et un élément $x_k \in M_k$ tel que $x = \psi_k(x_k)$. Comme on a $\varphi_{k\,\tau(k)} = 0$, il en résulte que $\psi_{\tau(k).k} = 0$ d'où $x = \psi_k(x_k) = (\psi_k \circ \psi_{\tau(k)k})(x_k) = 0$;

b) On applique le résultat précédent à l'anneau $\frac{A}{zA}$ et au foncteur $\operatorname{Ext}^j_{A/zA}(-, M)$.

Si $k \leq k'$, on note $\varphi_{kk'} : \dfrac{\mathfrak{a}^{k'} : Az}{\mathfrak{a}^{k'}} \longrightarrow \dfrac{\mathfrak{a}^k : Az}{\mathfrak{a}^k}$ le A/zA-morphisme canonique :

L'idéal $\mathfrak{a}$ vérifie la propriété d'Artin-Rees. Donc, si m est un entier > 0, il existe des entiers $k_1, k_2, \dots$, tels que : $\mathfrak{a}^{m-1}z \cap \mathfrak{a}^{k_1} \subseteq \mathfrak{a}^m . z$, $\mathfrak{a}^{m-2} z \cap \mathfrak{a}^{k_2} \subseteq \mathfrak{a}^{m-1} z$, ... Notons $\tau(m) = \operatorname{Sup}\{m, k_1, k_2, \dots\}$.

On a, alors $Az \cap \mathfrak{a}^{\tau(m)} \subseteq \mathfrak{a}^m . z$. Donc, si $x \in \mathfrak{a}^{\tau(m)} : Az$, on a $x\,Az \subseteq \mathfrak{a}^m . z$ et, puisque z est non diviseur de zéro dans A, $xA \subseteq \mathfrak{a}^m$, d'où $x \in \mathfrak{a}^m$. D'où $\varphi_{m\,\tau(m)} = 0$.||

Théorème 5.10 - Soit A un anneau local régulier, de dimension n, $\mathfrak{m}$ son radical, $x_1, x_2, \dots, x_n$ une suite centralisante A-régulière engendrant $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{a}$

l'idéal bilatère de A engendré par $x_1, \ldots, x_m$, $m \leq n$.

Soit M un A-module à gauche de K-dimension finie s. Alors pour tout entier $i \gneq s$, on a $H^i_{\mathfrak{a}}(M) = 0$.

Preuve - On raisonne par récurrence sur m. Si $m = 0$, on a $\mathfrak{a} = (0)$ d'où $H^i_{\mathfrak{a}}(M) = (0)$ pour $i \geq 1$; d'où le résultat. Supposons $m \geq 1$ et le résultat démontré pour $m-1$ et raisonnons par récurrence sur s. pour $s = 0$, il suffit d'appliquer 5.6. Supposons $s > 0$ et le résultat démontré pour les modules de K-dimension $s' < s$. Chaque sous-module de M étant de K-dimension au plus s et M étant limite directe de ses sous-modules de type fini on se ramène, à l'aide de 2.11, au cas où M est de type fini. Alors il existe une suite de sous-modules de M :

$$(0) = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_r = M$$

telle que $M_j/M_{j-1} \simeq A/I_j$, $j = 1, \ldots, r$, où I_j est un idéal à gauche central-premier de A. On peut donc se ramener au cas où $M = A/I$, I étant un idéal à gauche central-premier de A, avec $K\text{-dim}\, A/I = s$, ceci en utilisant l'hypothèse de récurrence sur la K-dimension. Soit S le complémentaire dans le centre $Z(A)$ de A de l'idéal $I \cap Z(A)$, qui est un idéal premier de $Z(A)$. Considérons la suite exacte de A-modules :

$$0 \longrightarrow A/I \longrightarrow H \longrightarrow K \longrightarrow 0 \qquad \text{où} \qquad H = S^{-1} A/I$$

et où K est le conoyau de la flèche $A/I \longrightarrow H$. D'après 5.7, et l'hypothèse de récurrence sur la K-dimension, on a : $H^i_{\mathfrak{a}}(N) = (0)$ si $i \geq s$, pour tout sous-module de type fini N de K. D'où d'après 2.11, $H^i_{\mathfrak{a}}(K) = 0$ pour $i \geq s$. On considèrera séparement les cas où $x_1 \notin I$ et où $x_1 \in I$. Si $x_1 \notin I$, la multiplication par x_1 dans H est, d'après 5.8, un isomorphisme. Donc la multiplication par x_1 dans $H^i_{\mathfrak{a}}(H)$ est, pour tout i, un isomorphisme. Mais si $y \in H^i_{\mathfrak{a}}(H)$, il existe un entier $k \geq 1$ tel que $\mathfrak{a}^k\, y = (0)$; donc $x_1^k . y = 0$ et $y=0$. On a donc $H^i_{\mathfrak{a}}(H) = (0)$ si $i \geq 0$ et donc $H^i_{\mathfrak{a}}(A/I) = 0$ si $i > s$. Supposons $x_1 \in I$ et utilisons la suite spectrale (cf.[6]) :

$$\mathrm{Ext}^p_{A/x_1A}\left(\mathrm{Tor}^A_q\left(\frac{A}{x_1A}, \frac{A}{\mathfrak{a}^k}\right), \frac{A}{I}\right) \xrightarrow{\ p\ } \mathrm{Ext}^{p+q}_A\left(\frac{A}{\mathfrak{a}^k}, \frac{A}{I}\right)$$

Elle dégénère, puisque $dh_A \frac{A}{x_1A} = 1$ en une suite exacte longue

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Ext}^i_{A/x_1A}\left(\frac{A}{x_1A + \mathfrak{a}^k}, \frac{A}{I}\right) \longrightarrow \mathrm{Ext}^i_A\left(\frac{A}{\mathfrak{a}^k}, \frac{A}{I}\right) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{i-1}_{A/x_1A}\left(\frac{\mathfrak{a}^k : Ax_1}{\mathfrak{a}^k}, \frac{A}{I}\right) \longrightarrow \cdots$$

et d'après 5.9, on a :

$$H^i_{\mathfrak{a}}(A/I) = \varinjlim_k \mathrm{Ext}^i_A\left(\frac{A}{\mathfrak{a}^k}, \frac{A}{I}\right) = \varinjlim_k \mathrm{Ext}^i_{A/x_1A}\left(\frac{A}{x_1A + \mathfrak{a}^k}, \frac{A}{I}\right)$$

L'anneau $\bar{A} = A/x_1A$ est régulier et $\bar{\mathfrak{a}} = \frac{\mathfrak{a}}{Ax_1}$ est engendré les m-1 premiers éléments d'une suite centralisante $\bar{A}$-régulière engendrant le radical de $\bar{A}$.

On a $\bar{\mathfrak{a}}^k = \frac{\mathfrak{a}^k + Ax_1}{Ax_1}$ donc par hypothèse de récurrence sur m on a :

$$H^i_{\bar{\mathfrak{a}}}(A/I) = \varinjlim_k \mathrm{Ext}^i_{A/x_1A}\left(\frac{A}{x_1A + \mathfrak{a}^k}, \frac{A}{I}\right) = 0$$

pour $i > s$. D'où le résultat.▮

<u>Corollaire</u> 5.11 - <u>Soit</u> A <u>un anneau local régulier</u>, M <u>un A-module à gauche non nul de type fini</u>. <u>Alors on a</u> :

$$\mathrm{prof}_A\, M \leq K - \dim_A M < \infty$$

<u>Preuve</u> - On a : $\mathrm{prof}_A\, M = p < \infty$ d'après 5.2. D'après 5.3 et 5.10 on a : $H^p_{\mathfrak{m}}(M) \neq 0$ et $p \leq K - \dim_A M$. On sait (cf.[22]) que la K-dimension de M est finie.

Références

[1] G. Barou - Cohomologie locale d'algèbres enveloppantes d'algèbres de Lie nilpotentes. CRAS Paris (à paraître)

[2] G. Barou - Propriété artinienne des foncteurs de cohomologie locale en algèbre non commutative - CRAS Paris (à paraître)

[3] H. Bass - Injective dimension in noetherian rings - Trans Amer Math Soc. 102 (1962) 18-29

[4] H. Bass - On the ubiquity of Gorenstein rings - Math Zeit 82 (1963) 8-28

[5] N. Bourbaki - Algèbre commutative - Hermann - Paris

[6] H. Cartan et S. Eilenberg - Homological Algebra - Princeton Math Series

[7] J.C. Mc Connell - Localisation in envelopping rings - J. London Math Soc Vol 43 (1968) 421-428 et Vol 2 (n° 3) (1971) 409-410

[8] J. Dixmier - Algèbres enveloppantes - Gauthier-Villars 1974

[9] P. Gabriel et R. Rentschler - Sur la dimension des anneaux et des ensembles ordonnés - CRAS Paris - t. 265 (12 Nov 67) 712-715.

[10] P. Gabriel et Y. Nouazé - Idéaux premiers de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie nilpotente. J of Alg. 6 (1967) 77-99

[11] A. Grothendieck - Sur quelques points d'algèbre homologique - Tôhoku Math J , 9 (1957)

[12] A. Grothendieck et R. Hartshorne - Local cohomology Lecture Notes in Math n° 41 - Springer Verlag 1967

[13] J.L. Koszul - Sur les modules de représentations des algèbres de Lie résolubles - Amer J Math t. 76 (1954) 535-554

[14] T. Levasseur - Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes et enveloppes injectives - Bull. Sc. Math. 100 (1976) 377-383

[15] M.P. Malliavin - Cohomologie d'algèbres de Lie nilpotentes et caractéristiques d'Euler - Poincaré . Bull. Sc. Math. 100 (1976) 269-287

[16] S. Matlis - Injective modules over noetherian rings - Pac. J. Math 8 (1958) 511-528

[17] G.O. Michler - Prime right ideals and right noetherian rings. Ring Theory - Acad. Press New-York 1975

[18] R.Y. Sharp - Local cohomology theory in commutative algebra Quart. J. of Math - (2) 21 (1971) 425-434

[19] R.Y. Sharp et I.G. Mac Donald - An elementary proof of the non vanishing of certain local cohomology modules. Quart. J of Math. (2) 23 (1972) 197-204

[20] R.Y. Sharp - Some results on the vanishing of local cohomology modules. Proc London Math. Soc (3) 30 (1975) 177-195

[21] D.W. Sharpe et P. Vàmos - Injective modules - Cambridge Tracts in Math and Physics 62 , Cambridge Univ. Press 1972

[22] P.F. Smith - On non commutative regular local rings - Glasgow Math. J , (1976), 98-102

[23] R. Walker - Local rings and normalizing sets of elements Proc London Math Soc (3) 24 (1972) 27-45

Manuscrit remis le 7 Février 1977

Geneviève Barou
15, rue de Verdun

14000 CAEN

Recent developments in the classification theory
of algebraic varieties

Herbert POPP

The classification theory for surfaces over the complex numbers is due to Enriques [3] for algebraic surfaces and Kodaira [14], for compact complex surfaces.

We use the usual notation for the main numerical invariants of a compact complex manifold X, namely, K is a canonical divisor of X, $p_g(X)$ is the geometric genus, $p_m(X)$ the m-genus, $q(X)$ the irregularity, $\kappa(X)$ the Kodaira dimension, $a(X)$ the algebraic dimension, $b_i(X)$ the i-th Betti number and $\chi(X,\mathcal{O}_X)$ the Euler characteristic of the structure sheaf $\mathcal{O}_X$ (1). Then the classification table for surfaces is a follows.

X a relatively minimal surface

<table>
<tr><th>κ</th><th>P_{12}</th><th>P_2</th><th>p_g</th><th>K</th><th>K^2</th><th>q</th><th>b_1</th><th>χ</th><th>a</th><th>Structure of X</th></tr>
<tr><td>2</td><td>>0</td><td>>0</td><td></td><td></td><td>>0</td><td></td><td>$2/b_1$</td><td>>0</td><td>2</td><td>algebraic surface of general type</td></tr>
<tr><td>1</td><td>>0</td><td></td><td></td><td></td><td>0</td><td></td><td></td><td>≥ 0</td><td>2,1</td><td>elliptic surface of general type</td></tr>
<tr><td rowspan="6">0</td><td rowspan="6">1</td><td rowspan="4">1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>2</td><td>4</td><td>0</td><td>2,1,0</td><td>complex torus</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>2</td><td>3</td><td>0</td><td>1</td><td>elliptic surface (type VI_o)</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>2</td><td>2,1,0</td><td>K3 surface</td></tr>
<tr><td>0</td><td>$\neq 0$</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>Enriques surface</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1 or 0</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="2">$\neq 0$</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>0</td><td>2</td><td>hyperelliptic surface</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>elliptic surface (Type VII_o)</td></tr>
<tr><td rowspan="5">$-\infty$</td><td rowspan="5">0</td><td rowspan="5">0</td><td rowspan="5">0</td><td rowspan="5"></td><td>8 or 9</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ oder $\mathbb{P}^2$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>0</td><td>2</td><td>elliptic surface $\sim \mathbb{P}^1 \times C, g(C)=1$</td></tr>
<tr><td>$8(1-q) < 0$</td><td>≥ 2</td><td>$2q$</td><td>$1-q<0$</td><td>2</td><td>ruled surface of genus $q \geq 2$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>Hopf surface</td></tr>
<tr><td></td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>surface of type VII_o</td></tr>
</table>

(1) The invariants q, p_m and κ are defined below.

The rough classification of surfaces is achieved by proving that for surfaces the only combinations of numerical invariants possible are those listed in the table. The fine classification is the study of the surfaces of the classes in the table by moduli theory (as in the case of surfaces of general type, abelian surfaces, or K-3 surfaces) or by fibre space methods as in the case of elliptic surfaces and ruled surfaces.

For higher dimensional algebraic varieties, classification theory (in the rough sense) originated with Iitaka at the beginning of the seventies (cf. [9],[10]) (2). His idea was to use the m-canonical mappings and the Albanese mapping for the classification, as in the case of surfaces. For projective algebraic varieties, the procedure is as follows (3).

Let V be a smooth, projective algebraic variety over $\mathbb{C}$ and K_V a canonical divisor of V. For every positive multiple mK_V consider $H^o(V,mK_V) = \{f \,;\, f$ a rational function on V with $(f) \geq - mK_V\}$, the $\mathbb{C}$-module of global sections of the sheaf associated to mK_V. The <u>m-genus</u> of V, $p_m(V) = \dim H^o(V,mK_V)$, is a birational invariant, i.e. if V and V' are birationally isomorphic smooth projective algebraic varieties, then $p_m(V) = p_m(V')$ for all $m > 0$ (but not necessarily for $m < 0$).

If $H^o(V,mK_V)$ is not the zero module, let $f_o, \ldots, f_N$, $N = p_m(V) - 1$, be a basis of $H^o(V,mK_V)$ and consider the rational map, called the <u>m-canonical map</u> of V,

$$\phi_m : P \longmapsto (f_o(P) : \ldots : f_N(P))$$

from V into $\mathbb{P}^N$.

ϕ_m is uniquely determined up to a projective transformation of $\mathbb{P}^N$, corresponding to a different choice of basis of $H^o(V,mK_V)$ and is independent of the particular canonical divisor K_V. There are, however, algebraic varieties, for example the ruled varieties, for which ϕ_m does not exist for all $m > 0$.

(2) For curves the coarse classification is trivial and yields to the classes of curves of genus 0, curves of genus 1 and curves of genus > 1. The fine classification is the theory of moduli for curves (cf. [16],[20]).

(3) The procedure described works with some modification for reduced compact complex spaces and is a bimeromorphic theory, cf. [10],[23].

The Albanese map $\alpha : V \longrightarrow \mathrm{Alb}(V)$ over $\mathbb{C}$ is obtained as follows [4] : Take a basis $\omega_1, \dots, \omega_q$ of $H^0(V, \Omega^1_V)$, the module of global sections of the sheaf of holomorphic differential 1-forms of V, where $q = \dim H^1(V, O_V) = \dim H^0(V, \Omega^1_V)$, the <u>irregularity</u> of V (V is a smooth projective variety). Fix a point $P_0 \in V$ and define for $P \in V$

$$(*) \quad P \longrightarrow \left(\int_\gamma \omega_1, \dots, \int_\gamma \omega_q\right) \in \mathbb{C}^q ,$$

where γ is a real path on V from P_0 to P. The vector $(\int_\gamma \omega_i)$ depends on the chosen path γ connecting P_0 and P, but there exists a 2q-dimensional lattice L in $\mathbb{C}^q$ such that if γ and γ' are two paths from P_0 to P then $(\int_\gamma \omega_i) - (\int_{\gamma'} \omega_i) \in L$. (A basis of L may be obtained as follows : Let $\delta_1, \dots, \delta_{2q}$ be $2q$ closed paths of V through P_0 which generate the free part of $H_1(V, \mathbb{Z})$. Then L is spanned over $\mathbb{Z}$ by the 2q vectors $l_i = (\int_{\delta_i} \omega_1, \dots, \int_{\delta_i} \omega_q)$, $i = 1, \dots, 2q$). The quotient space $\mathrm{Alb}(V) = \mathbb{C}^q/L$ is called the <u>Albanese variety</u> of V. It is a complex torus which is algebraic and therefore an abelian variety. The holomorphic map induced by $(*)$ (it is even an algebraic map)

$$P \longrightarrow \alpha(P) \in \mathrm{Alb}(V)$$

is the <u>Albanese map</u> of V.

Now, concerning the structure of the maps Φ_m and α we consider first the fundamental theorem of Iitaka on the structure of the maps Φ_m.

Define the <u>Kodaira dimension</u> $\chi(V)$ of a projective variety V by

$$x(V) = \begin{cases} \max\limits_{p_m > 0} \dim \Phi_m(V) & \text{if } p_m > 0 \text{ for some } m \\ \\ -\infty & \text{if } p_m = 0 \text{ for all } m > 0 . \end{cases}$$

Then Iitaka's theorem states (cf. [9] of [23], theorem 6.11).

<u>Theorem</u> 1 - Let V ba an algebraic variety of Kodaira dimension ≥ 0. There exist smooth projective varieties V^* and W^* and a surjective proper morphism $f : V^* \longrightarrow W^*$ which satisfy the following conditions :

(4) For an algebraic definition and the universal properties of α see Lang [15].

1) V^* is a birationally isomorphic to V ;

2) $\dim W^* = \varkappa(V)$;

3) For a dense (non-empty) subset U of W^* each fibre $V^*_u = f^{-1}(u)$, $u \in U$, is irreducible, non-singular and has Kodaira dimension 0. $W^* - U$ is the union of countably many closed subvarieties ;

4) If $f^\# : V^\# \longrightarrow W^\#$ is a fibre space (5) satisfying the above conditions 1)-3), there are birational maps $g : V^* \longrightarrow V^\#$ and $h : W^* \longrightarrow W^\#$ such that the diagram

$$\begin{tikzcd} V^* \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & V^\# \arrow[d, "f^\#"] \\ W^* \arrow[r, "h"'] & W^\# \end{tikzcd}$$

is commutative. Moreover, the fibre space $f : V^* \longrightarrow W^*$ is birationally equivalent to a fibre space associated to the pluricanonical map $\Phi_m : V \longrightarrow W_m = \Phi_{mK}(V) \subset \mathbb{P}^N$, for any sufficiently large m with $p_m > 0$.

In other words, Iitaka's theorem states that the m-canonical map Φ_m determines, for large m, a fibre space structure on V which is unique in the birational sense, with algebraic varieties of Kodaira dimension 0 as general fibres.

More generally, Iitaka has introduced the $\mathcal{L}$-dimension of an invertible sheaf $\mathcal{L}$ on a smooth projective variety V as follows.

<u>Definition</u> 1 - Let $\mathbb{N}(\mathcal{L},V) = \{m > 0 \ ; \ \dim_{\mathbb{C}} H^0(V, \mathcal{L}^{\otimes m}) \geqslant 1\}$ and for $m \in \mathbb{N}(\mathcal{L},V)$, denote by $\Phi_{m\mathcal{L}} : V \longrightarrow \mathbb{P}^N$ the rational map given by $\Phi_{m\mathcal{L}}(P) = (f_0(P), \dots, f_N(P))$, where $f_0, \dots, f_N$ is a basis of $H^0(V, \mathcal{L}^{\otimes m})$. Then the <u>$\mathcal{L}$-dimension</u> of V is

$$\varkappa(\mathcal{L},V) = \begin{cases} \max\limits_m \dim \Phi_{m\mathcal{L}}(V) \ , \ m \in \mathbb{N}(\mathcal{L},V) \ , & \text{if } \mathbb{N}(\mathcal{L},V) \neq \emptyset \\ -\infty \ \text{if} & \mathbb{N}(\mathcal{L},V) = \emptyset \ . \end{cases}$$

If D is a divisor of V the <u>$\mathcal{L}$-dimension</u> of the sheaf $\mathcal{L}$ associated to D is denoted by $\varkappa(D,V)$.

A theorem analogous to Theorem 1 holds for the $\mathcal{L}$-dimension (cf. [23], §5 for details).

(5) A fibre space is a morphism $g : X \longrightarrow Y$ of reduced projective varieties which is (proper and) surjective and has connected fibres.

Next, Iitaka's theorem suggests that we divide the algebraic varieties of a fixed dimension into 4 classes as follows.

1) Varieties with $x(V) = \dim V$, called varieties of <u>general type</u> or <u>hyperbolic type</u> ;

2) Algebraic varieties with $\dim V > \chi(V) \geq 1$;

3) Algebraic varieties with $\chi(V) = 0$, called varieties of <u>parabolic</u> type ;

4) Algebraic varieties with $\chi(V) = -\infty$, called varieties of <u>elliptic</u> type.

The birational investigation of the varieties of class 2) reduces by the theorem of Iitaka to the study of fibre spaces of algebraic varieties with a variety of Kodaira dimension 0 as general fibre.

The Albanese map is essential for the study of the classes 1), 3) and 4). The following facts concerning the structure of the Albanese map are of interest.

<u>Proposition</u> 1 - For a (smooth and projective) variety V of general type, the irreducible components of the general fibre of $\alpha : V \longrightarrow \mathrm{Alb}\,(V)$ are also of general type.

Concerning the Albanese map of varieties V of Kodaira dimension 0, i.e. of class 2), Iitaka and Ueno have suggested (cf. [23], p. 130).

<u>Conjecture</u> K_n : If V is of parabolic type, the Albanese map $\alpha : V \longrightarrow \mathrm{Alb}(V)$ is surjective and has connected fibres. Moreover, the fibre space $\alpha : V \longrightarrow \mathrm{Alb}(V)$ is birationally equivalent in the etale topology to a fibre bundle over $\mathrm{Alb}(V)$ whose fibre and structure group are an algebraic manifold F of parabolic type and automorphism group $\mathrm{Aut}(F)$ of F, respectively.

By the classification theory of surfaces conjecture K_n is known to hold for surfaces. If S is a relatively minimal projective surface of Kodaira dimension 0, then if the irregularity $q(S)$ of S equals 2, S is an abelian variety and α is an isomorphism. If $q(S) = 1$, S is a hyperelliptic surface and $\alpha : S \longrightarrow \mathrm{Alb}(S)$ has the structure of an elliptic bundle over the elliptic curve $\mathrm{Alb}(S)$.

If V is a smooth projective variety for which there exists a birationally equivalent model V^* such that mK_{V^*} is trivial, then K_n holds for V. (See [23], prop. 11.4.3 for a proof).

For varieties V of dimension 3 with $\chi(V) = 0$, Ueno [24] has shown that α is surjective. Moreover, Ueno [22] has proved K_n holds for generalized Kummer varieties (cf. [23], 16.7 and 16.8).
For the image $\alpha(V) \subseteq \mathrm{Alb}(V)$, Ueno [23],p.111, has proved the following.

Proposition 2 - The Kodaira dimension of $\alpha(V)$ is ≥ 0 and equal to zero if and only if α is surjective.

The following conjecture of Iitaka is especially of interest for varieties of elliptic type.

Conjecture $C_{n,m}$: Let $\pi : V \longrightarrow W$ be a surjective morphism of projective smooth algebraic varieties over $\mathbb{C}$ with connected fibres, i.e. $\pi : V \longrightarrow W$ is a fibre space. Let $n = \dim V$, $m = \dim W$. Then

$$\varkappa(V) \geq \varkappa(W) + \varkappa(V_W)$$

where V_W is the general fibre of π .

Conjecture $C_{n,m}$ and Proposition 2 immediately imply the following statement : Let V be a projective variety of elliptic type with irregularity $q(V) > 0$. Let $V \longrightarrow W$ be the fibre space associated to the Albanese map $\alpha : V \longrightarrow \mathrm{Alb}(V)$. ($V \longrightarrow W$ is the Stein factorization of the morphism $V \longrightarrow \alpha(V)$). The general fibre of $V \longrightarrow W$ is of elliptic type. Therefore, if $C_{n,m}$ holds, the study of algebraic varieties of elliptic type is reduced to

1) the study of algebraic varieties with irregularity 0 ;
2) the study of fibre spaces whose general fibre is of elliptic type.

It is interesting to note that Conjecture $C_{n,m}$ is related to Conjecture K_n . More precisely, if $C_{n,m}$ holds and V is a projective variety of parabolic type, the Albanese map $\alpha : V \longrightarrow \mathrm{Alb}(V)$ is surjective and an irreducible component of the general fibre of α is of parabolic type.

We indicate a proof of this fact. Consider the fibre space $V \longrightarrow W$ associated to the Albanese map. Then since $\varkappa(V) = 0$, it is not difficult to show by the adjunction formula (cf. [23], §6) that the general fibre of $V \longrightarrow W$ is a variety of Kodaira dimension ≥ 0 . Also $\varkappa(W) \geq \varkappa(\alpha(V))$ since W is a covering of $\alpha(V)$. Then by Proposition 2 and $C_{n,m}$, α must be surjective and the general fibre of $V \longrightarrow W$ a variety of parabolic type.

The proofs of Conjectures $C_{n,m}$ and K_n are the main problems of classification theory of algebraic varieties as far as the rough classification goes. If they were known, the rough classification of algebraic varieties would be considered to be in a satisfactory state. The fine classification, that is the study of the varieties in the various classes by fibre space methods or by moduli theory, remains. However, as new developments show, the rough classification and the fine classification cannot be separated. The fine classification for lower dimensional algebraic varieties is needed to do the rough classification of higher dimensional varieties.

This discussion so far has given a brief description of the classification theory as contained in Ueno's Lecture Notes.

There are two interesting new developments in the theory. The first, due to Iitaka [11],[12] and Sakai [21], is an extension of classification theory to open varieties. The second is concerned with the proof of the Conjectures $C_{n,m}$ and K_n. In particular, Viehweg's proof [26] of Conjecture $C_{n,n-1}$ has added new insight into the interaction between moduli theory and classification theory. We describe these developments below.

First we discuss the extension of classification theory to open varieties following Iitaka's papers [11] and [12].
Let V be a smooth connected $\mathbb{C}$-scheme which, for the sake of simplicity, we assume to be quasi projective (actually the theory holds for all connected and reduced $\mathbb{C}$-schemes of finite type). Then Iitaka's method is to consider a compactification $\bar{V}$ of V such that

1) $\bar{V}$ is smooth,
2) the boundary $D = \bar{V} - V$ is a divisor with strong normal crossings and the sheaves Ω^q (log D) of rational differential q-forms on $\bar{V}$ which are holomorphic along V and have at most a logarithmic pole along D, $q = 1, \dots, \dim V$ [(6)].

The new Kodaira dimension $\bar{\kappa}(V)$ of V is defined, analogously to the compact case, as follows :
Consider the sheaf Ω^n (log D), $n = \dim V$. Note that this sheaf is invertible and isomorphic to the sheaf associated to the divisor $K_{\bar{V}} + D$, where $K_{\bar{V}}$ is a canonical divisor of $\bar{V}$.

Definition 2 - The $\mathcal{L}$-dimension of the divisor $K_{\bar{V}} + D$ is the logarithmic Kodaira-dimension of V, denoted by $\bar{\kappa}(V)$, i.e.

$$\bar{\kappa}(V) = \kappa(K_{\bar{V}} + D, \bar{V}) .$$

(6) If $P \in D$ is a point, a logarithmic q-form writes locally at P as

$$\omega = \sum_{\substack{r+s=q \\ I = (i(1), \dots, r(r)) \\ J = (j(1), \dots, j(s))}} a_{I,J}(z,w) \frac{dz_{i(1)}}{z_{i(1)}} \wedge \dots \wedge \frac{dz_{i(r)}}{z_{i(r)}} \wedge dw_{j(1)} \wedge \dots \wedge dw_{j(s)}$$

where $a_{I,J}(z,w)$ is holomorphic at P and $(z_1,\dots,z_m, w_1,\dots,w_{n-m})$ is a system of regular parameters at P on X such that $z_1 \dots z_m = 0$ defines D at P.

The logarithmic irregularity of V is defined by $\bar{q}(V) = \dim H^0(\bar{V}, \Omega^1(\log D))$. If V is a smooth projective variety, $\bar{\varkappa}(V) = \varkappa(V)$ and $\bar{q}(V) = q(V)$. The Kodaira dimension $\bar{\varkappa}(V)$ and the logarithmic irregularity $\bar{q}(V)$ are independant of the compactification and hence invariants of V. More precisely, they are birationally invariant in a certain restricted sense which we explain next.

Definition 3 - A map $f : V_1 \longrightarrow V_2$ of (smooth) quasi projective varieties is called strictly rational if there exists a proper birational morphism $\mu : V_3 \longrightarrow V_1$ from a (smooth) quasi projective variety V_3 such that $f \circ \mu$ is a morphism. A birational map $f : V_1 \longrightarrow V_2$ of quasi projective varieties is called strictly birational if f and f^{-1} are strictly rational maps.

Note that a dominant rational map from a complete variety V_1 to a non complete V_2 is not strictly rational. A rational map from V_1 to a complete V_2 is always strictly rational by resolution of singularities and elimination of points of indeterminany of rational maps ([8]).

The following proposition is easily proved (cf. [11]).

Proposition 3 - Let $f : V_1 \longrightarrow V_2$ be a dominant rational morphism of smooth quasi projective varieties. Then for all $m > 0$ the natural map

$$f^* : H^0(V_2, (\Omega^q)^{\otimes m}) \longrightarrow H^0(V_1, (\Omega^q)^{\otimes m})$$

is injective. If, moreover, f is birational and proper, f^* is an isomorphism.

Proposition 3 implies that the logarithmic Kodaira dimension and the logarithmic irregularity are invariant with respect to strictly birational maps and, in particular, independent of the compactification $\bar{V}$ of V.

The theory of $\mathcal{L}$-dimension, if applied to the sheaf $\Omega^n(\log D)$, yields the following. (cf. [23], 6.11 and [11], Prop. 5).

Proposition 4 - Let $f : V \longrightarrow W$ be a strictly rational dominating map of smooth quasi projective varieties. Then

$$\bar{\varkappa}(V) \leq \bar{\varkappa}(V_W) + \dim W ,$$

where V_W is the general fibre of f.

The fundamental theorem for m-canonical maps (cf. Theorem 1) generalizes as follows. (cf. [11], theorem 5).

<u>Theorem</u> 2 - Let V be a smooth irreducible quasi projective variety with $\bar{\kappa}(V) \geq 0$. There exists a proper birational morphism μ from a smooth quasi projective variety V^* onto V and a dominant rational morphism $f : V^* \longrightarrow W$, where $\dim W = \bar{\kappa}(V)$, such that the general fibre V^*_W is connected and $\bar{\kappa}(V_W) = 0$. Such a fibred variety is uniquely determined up to proper birational equivalence.

The Albanese map of an open variety is obtained as follows. Let $\bar{V}$ be a smooth compactification of V as above. Then by Deligne's theory [2] the logarithmic 1-forms of $H^0(\bar{V}, \Omega_{\bar{V}}(\log(D))$ are closed. Hence, integration yields a $\mathbb{Z}$-linear map i from $H_1(V,\mathbb{Z})$ into the dual $H^0(\bar{V},\Omega^1_{\bar{V}}(\log D))^*$ of $H^0(\bar{V},\Omega^1_{\bar{V}}(\log D))$:

$$\begin{aligned} i : H_1(V,\mathbb{Z}) &\longrightarrow H^0(\bar{V}, \Omega^1_{\bar{V}}(\log D))^* \\ \gamma &\longmapsto (\omega,\gamma) = \int_\gamma \omega \end{aligned}$$

where $\omega \in H^0(\bar{V},\Omega^1_{\bar{V}}(\log(D))$.

The quotient $\overline{\mathrm{Alb}}(V) = H^0(\bar{V},\Omega^1_{\bar{V}}(\log(D))^*/i(H_1(V,\mathbb{Z}))$ considered as a Lie group is the Albanese of V. The Albanese map α_V is obtained by integration from a fixed point $0 \in V$ to $P \in V$ along a path in V :

$$\begin{aligned} \alpha_V : V &\longrightarrow \overline{\mathrm{Alb}}(V) \\ P &\longmapsto \int_0^P \omega , \quad \omega \in H^0(\bar{V},\Omega^1_{\bar{V}}(\log(D)). \end{aligned}$$

$\overline{\mathrm{Alb}}(V)$ is related to the Albanese of $\bar{V}$ by the exact sequence of groups

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow \overline{\mathrm{Alb}}(V) \longrightarrow \overline{\mathrm{Alb}}(\bar{V}) = \mathrm{Alb}(\bar{V}) \longrightarrow 0 .$$

Deligne's theory [2] implies that $K = (\mathbb{C}^*)^r$ is a torus of dimension r, where $r = \bar{q}(V) - q(\bar{V}) = b_1(V) - b_1(\bar{V})$. Thus $\overline{\mathrm{Alb}}(V)$ carries the structure of a quasi abelian variety, i.e. is a group variety which is an extension of an abelian variety by a torus. (cf. [12] for details).

The universal properties of α_V are as follows.

1) Any strictly rational map $f : V_1 \longrightarrow V_2$ induces a morphism $f_* : \overline{\mathrm{Alb}}(V_1) \longrightarrow \overline{\mathrm{Alb}}(V_2)$ which satisfies the commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{f} & V_2 \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha_{V_1}} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{V_2}} \\ \overline{\mathrm{Alb}}(V_1) & \xrightarrow{f_*} & \overline{\mathrm{Alb}}(V_2) \end{array}$$

2) If $\varphi : V \longrightarrow \tilde{A}$ is a strictly rational map into a quasi abelian variety $\tilde{A}$, there exists a morphism $\varphi_1 : \overline{\mathrm{Alb}}(V) \longrightarrow \tilde{A}$ such that $\varphi = \varphi_1 \circ \alpha_V$. Moreover φ_1 is unique and a translation of a homomorphism of algebraic groups.

With the Albanese map defined as above, Iitaka carries Ueno's theory of the Albanese map for compact varieties (cf. [23] §9 and §10) over to open varieties and generalizes almost all the theorems known for the compact case to open varieties. For example, Proposition 2 is generalized to

<u>Proposition</u> 5 (cf. [12], Theorem 4) - Let G be a quasi abelian variety and $X \subset G$ be a closed irreducible subvariety. Then X is the translation of a subgroup scheme of G or $\bar{\kappa}(X) > 0$.

A very interesting aspect of this new theory is its application to commutative rings ; we indicate this by describing two of Iitaka's results :

1) Let $V = \mathrm{Spec}(A)$ be a smooth affine variety over $\mathbb{C}$. If $\bar{\kappa}(V) = \dim V$, the automorphism group $\mathrm{Aut}(V)$ of V, or equivalently, the automorphism group of the $\mathbb{C}$-algebra A, is finite.

<u>Outline of proof</u> (cf. [11] for details) - Let $\bar{V}$ be a compactification of V as above with $D = \bar{V} - V$ as boundary. Then, for every $m > 0$, Proposition 3 yields a natural linear representation of $\mathrm{Aut}(V)$ in $\mathrm{Aut}(H^0(\bar{V}, m.(K_{\bar{V}}+D)))$. Since $\bar{\kappa}(V) = \dim V$, this representation is faithful for an appropriate $m > 0$ which may be chosen such that Theorem 2 is satisfied by the map $\Phi_{m(K_{\bar{V}}+D)} : \bar{V} \longrightarrow \mathbb{P}^N$. Let G be the Zariski closure of $\mathrm{Aut}(V)$ in the algebraic group $\mathrm{Aut}(H^0(\bar{V}, m(K_{\bar{V}}+D))$ and G_o the connected component of G. We must show $G_o = \{e\}$. Assume $G_o \neq \{e\}$. Then G_o contains a subgroup H which is isomorphic to the additive group $G_a = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x])$ or the multiplicative group $G_m = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x,x^{-1}])$, and which operates as automorphism group on V. There exists an H-stable open subvariety V_o^* of V such that the quotient V_o^*/H exists. Proposition 4 applied to $V_o \longrightarrow V_o/H$ yields the inequality $\dim V = \bar{\kappa}(V) \leq \bar{\kappa}(V_o) \leq \kappa((V_o)_W) + \dim V/H \leq 0 + (\dim V) - 1$ which is a contradiction. Therefore $G_o = \{e\}$ and $\mathrm{Aut}(V)$ is finite.

2) (<u>Cancellation theorem of Zariski</u>) - Let $V = \mathrm{Spec}(A)$, $W = \mathrm{Spec}(B)$ be smooth affine algebraic varieties over $\mathbb{C}$, such that $\bar{\kappa}(V)$ or $\bar{\kappa}(W)$ is not $-\infty$. Let x be an indeterminant over A and B. If the polynomial rings $A[x]$ and $B[x]$ are isomorphic as $\mathbb{C}$-algebras, then A and B are isomorphic as $\mathbb{C}$-algebras, i.e. x can be cancelled.

Outline of proof (See [6] for details and a more general form of the cancellation theorem) - We assume for simplicity's sake that $\bar{\chi}(V)$ and $\bar{\chi}(W) \geq 0$. Denote by $\phi : A[x] \longrightarrow B[x]$ the isomorphism of $\mathbb{C}$-algebras and by $\tilde{\phi} : \mathrm{Spec}(B[x]) = W \times A^1 \longrightarrow V \times A^1 = \mathrm{Spec}(A[x])$ the associated morphism of schemes. For any prime divisor D of W, consider the divisor $D \times A^1$ of $W \times A^1$. Then $\tilde{\phi}(D \times A^1) = E$ is a prime divisor of $V \times A^1$. We claim that $\tilde{\phi}(D \times A^1) = E$ is of the form $D' \times A^1$, where D' is a divisor of V. Consider the projection $p_1 : V \times A^1 \longrightarrow V$ and the image $p_1(E)$ of the divisor E. If $p_1(E)$ is dense in V, we conclude, using some elementary facts about $\mathcal{L}$-dimension and the fact that E is irreducible and closed in $V \times A^1$, that $\bar{\chi}(E) = \bar{\chi}(D \times A^1) \geq \bar{\chi}(W) \geq 0$ which is impossible since $\chi(D \times A^1) = -\infty$. Hence, $p_1(E)$ is not dense and therefore $p_1(E) = D'$, a prime divisor of V, and $E = D' \times A^1$. This yields a map $\varphi : W \longrightarrow V$ as follows. Let $P \in W$ and let $D_1, \ldots, D_l$ be divisors of W such that $D_1 \cap \ldots \cap D_l = \{P\}$. Let $D_i' \subset V$ be such that $\tilde{\phi}(D_i \times A^1) = D_i' \times A^1$. Then $D_1' \cap \ldots \cap D_l' = \{Q\}$ is a point of V and we obtain a map $\varphi : P \longmapsto Q$ from W to V which is an isomorphism.

We discuss finally the attemts to prove Conjecture $C_{n,m}$, first describing Viehweg's proof of Conjecture $C_{n,n-1}$.

An essential step in this proof is the observation that in order to prove Conjecture $C_{n,m}$ it suffices to prove the following statement (cf. [26],[20]).

Statement $C'_{r,s}$ - Let $\pi_1 : V_1 \longrightarrow W_1$ be a surjective morphism of proper varieties over $\mathbb{C}$ with connected general fibres, where $r = \dim V_1$ and $s = \dim W_1$. There exists a birationally equivalent morphism (7) $\pi : V \longrightarrow W$ of smooth, proper varieties such that $\chi(\omega_V \otimes \pi^* \omega_W^{-1}, V) \geq \chi(V_W)$, where ω_V and ω_W denote the canonical sheaves of V and W respectively.

More precisely, the following theorem holds.

Theorem 3 - Assume that $C'_{r+1,1}$ holds for all $1 \leq m$ and $r = n-m$. Then $C_{n,m}$ holds.

Next, for fibre spaces of curves (i.e. the general fibre of π is a smooth curve of genus $g \geq 1$) the theory of fine moduli spaces (cf. [19]) allows us to reduce the proof of the statement $C'_{r,r-1}$ to families of stable curves. The following semi-stable reduction theorem holds.

(7) $\pi_1 : V_1 \longrightarrow W_1$ and $\pi : V \longrightarrow W$ are called birationally equivalent, if there exist birational maps $\varphi : V_1 \longrightarrow V$ and $\psi : W_1 \longrightarrow W$ such that $\pi \circ \varphi = \psi \circ \pi_1$ as rational maps.

Theorem 4 ([26], §5) - Let $\pi_1 : V_1 \longrightarrow W_1$ be a surjective morphism of proper, smooth varieties such that the general fibre of π_1 is a connected curve of genus $g \geq 1$. There exists a commutative diagram of proper varieties

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} V \arrow[d, "\pi"] & V' \arrow[l, "h"'] \arrow[d, "\pi'"] & V_S \arrow[l, "f"'] \arrow[dl, "\pi_S"] \\ W & W' \arrow[l, "g"'] & \end{tikzcd}$$

with the following properties :

1) Every morphism and every scheme occuring in the diagram is projective

2) $\pi : V \longrightarrow W$ is a surjective morphism of smooth varieties with connected general fibre which is birationally equivalent to $\pi_1 : V_1 \longrightarrow W_1$

3) $h : V' \longrightarrow V$ and $g : W' \longrightarrow W$ are flat Galois covers with Galois group G and V' is birationally equivalent to $W' \times_W V$. The only singularities of W' and V' are quotient singularities

4) $\pi_S : V_S \longrightarrow W'$ is a family of stable curves of genus g with level μ-structure, $\mu \geq 3$, and $f : V_S \longrightarrow V'$ is a birational morphism. (cf. [19] or [20], Lecture 10, for the notion of level μ-structure)

5) The group G operates on V_S and V is a resolution of singularities of the quotient V_S/G of V_S by G .

Viehweg applies the duality theory of sheaves to the diagram $(*)$. He proves that the varieties V' , W' and V_S have rational singularities ([27], Def. 1) and are Cohen-Macauley schemes and that therefore, for every morphism of the diagram $(*)$, the dualizing sheaf exists. A close inspection of the dualizing sheaves yields the inequality

$$\chi(\omega_{V_S/W'} , V_S) \leq \chi(\omega_{V'/W'} , V') \leq \chi(\omega_{V/W} , V) .$$

Hence, to prove statement $C'_{n,n-1}$ it suffices to prove the following proposition.

Proposition 6 - Let $\pi : V \longrightarrow W$ be a proper flat family of stable curves of genus $g \geq 1$ with level μ-structure and with smooth general fibre. Then $\chi(\omega_V \otimes \pi^* \omega_W^{-1} , V) \geq \chi(V_W)$. (W is assumed to be smooth).

The following stronger theorem holds.

Theorem 5 - Let $\pi : V \longrightarrow W$ be a proper flat family of stable curves of genus $g \geq 1$ with level μ-structure, $\mu \geq 3$, and smooth general fibre. Let $\Gamma^{(\mu)} \longrightarrow M_g^{(\mu)}$

be the universal family of curves with level μ-structure and $\varphi: W \longrightarrow M_g^{(\mu)}$ the map determined by $V \longrightarrow W$ (cf. [19]). Then $\chi(\omega_{V/W}, V) \geq \max(\varkappa(V_W), \dim \varphi(W))$.

Outline of proof - If $\varphi(W)$ is a point in $M_g^{(\mu)}$, then $V = \Gamma^{(u)} \times_{M_g} W$; thus, $V \longrightarrow W$ is a product and the inequality follows trivially. If $\dim \varphi(W) > 0$, we must show $\chi(\omega_{V/W}, V) \geq \dim \varphi(W)$. For the proof, we need the following information about the relative canonical sheaf of a family of stable curves. Let $C \xrightarrow{\pi} S$ be a family of stable curves of genus g with smooth general fibre over a normal scheme S. Denote by $\omega_{C/S}$ the relative canonical sheaf of $C \longrightarrow S$ ($\omega_{C/S}$ exists since π is locally a complete intersection [7]). Then $\pi_* \omega_{C/S}$ is a locally free sheaf on S of rank g. Consider the line bundle $\overset{g}{\Lambda}\, \pi_* \omega_{C/S}$ and let D be a divisor on S such that $\overset{g}{\Lambda}\, \pi_* \omega_{C/S} \sim D$. Let $W_{C/S}$ be the divisor of Weierstraß points of C/S, i.e., the divisor of C with the following properties :

1) For every smooth geometric fibre C_p of $C \longrightarrow S$, $W_{C/S} \cap C_p$ is the classical divisor of Weierstraß points of C_p;

2) $W_{C/S}$ is the smallest divisor of C with property 1).

The following fact is essential for the argument (cf. [1] and [26] for a proof). There exists a positive divisor $E = E_{C/S}$ with support in the singular fibres of C/S such that

$$\omega_{C/S}^{\otimes \frac{1}{2}g\ (g+1)} \sim \pi^* D + W_{C/S} + E$$

where $\sim$ means that the right side is a divisor of a section of the left side.

These considerations can, in particular, be applied to the universal family $\Gamma^{(\mu)} \longrightarrow M_g^{(\mu)}$ of stable curves with level μ-structure to obtain

$$\omega_{\Gamma^{(\mu)}/M_g^{(\mu)}}^{\otimes \frac{1}{2}g(g+1)} \sim \pi^* D + W_{\Gamma/M} + E$$

and the divisor $D \sim \overset{g}{\Lambda}\ \pi_* \ \omega_{\Gamma^{(\mu)}/M_g^{(\mu)}}$ of $M_g^{(\mu)}$.

Finally, the following proposition is sufficient for the proof of the inequality $\chi(\omega_V \otimes \pi^* \omega_W^{-1}, V) \geq \dim \varphi(W)$.

Proposition 7 - Let $(M_g^{(\mu)})_o$ be the open subspace of $M_g^{(\mu)}$ which parameterizes the smooth curves of genus g with level μ-structure. Then for a sufficiently large integer $m > 0$ the rational map $\Phi_{mD} : M_g^{(\mu)} \longrightarrow \mathbb{P}^N$ is a quasi finite morphism if restricted to $(M_g^{(\mu)})_o$. In particular, $\chi(D, M_g^{(\mu)}) = \dim M_g^{(\mu)} = 3g - 3$

if $g \geq 2$ and 1 if $g = 1$.

Proof - For $g = 1$, $M_g^{(\mu)}$ is a curve and the morphism $\pi : \Gamma^{(\mu)} \longrightarrow M_g^{(\mu)}$ is not smooth. By inspection we find that degree $D > 0$ and D is ample.

For $g \geq 2$ we look at the period map $\mathcal{Y} : (M_g^{(\mu)})_o \longrightarrow H_g/\Gamma$ (cf.[28]).
(H_g is the Siegel upper half plane of dimension g and Γ the Siegel modular group). We consider the Siegel modular forms of weight m on H_g where m is a sufficiently large integer. Let $s_o ,\ldots, s_N$ be a basis of the vector space of Siegel modular forms and $\eta = (\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_g)^{\otimes m}$. Then $\gamma_i = s_i(\mathcal{Y}(t)).\eta$ define sections of $D^{\otimes m}$ on $(M_g^{(\mu)})_o$ which extend to sections of $D^{\otimes m}$ on $M_g^{(\mu)}$ (cf. [1] or [26]), and we consider the rational map $\phi : M_g^{(\mu)} \longrightarrow \mathbb{P}^N$ defined by $\phi(P) = (\gamma_o(P) : \ldots : \gamma_N(P))$. Then ϕ is finite on $(M_g^{(\mu)})_o$. In fact ϕ restricted to $(M_g^{(\mu)})_o$ factors as follows

$$(M_g^{(\mu)})_o \xrightarrow{\pi} (M_g)_o \xrightarrow{\mathcal{Y}} H_g/\Gamma \xrightarrow{\Psi} \mathbb{P}^N$$

where π is the finite covering map, $\mathcal{Y}$ is the period map which is an injection of $\mathbb{C}$-valued points by the Torelli theorem and Ψ is an embedding if m is sufficiently large. This completes the proof of proposition 6 and thus of Conjecture $C_{n,n-1}$.

There are various other partial results concerning Conjecture $C_{n,m}$ which we state without proof. $C_{2,1}$ was known before Viehweg's paper [26]. In fact $C_{2,1}$ is a corollary of Enriques' and Kodaira's classification theory of surfaces. Ueno [31] has provided another proof of $C_{2,1}$ of a topological nature, independent of the classification theory of surfaces, which itself is useful in simplifying the classification theory for surfaces of Kodaira dimension zero and $-\infty$(cf.[32]).

Moreover, Kodaira [13] and Ueno [22] have described formulas for the canonical sheaf ω_X and the selfintersection number ω_X^2 of the canonical sheaf of a projective surface X which carries a fibre space structure $\pi : X \longrightarrow C$ of curves of genus 1 and genus 2 respectively. Viehweg has generalized in [26] these results to projective surfaces X which carry a fibre space structure $X \longrightarrow C$ of curves of any genus and has obtained a formula for a canonical divisor K_X of X up to torsion and the selfintersection K_X^2 of K_X which is as follows

$$K_X^2 = \omega_X^2 = 8(p-1)\ (g-1) + \sum_{X_P \text{ singular}} \eta_P + \rho \quad ;$$

g denotes the genus of the general fibre of π and p the genus of the base curve C , η_P can be calculated from the local invariant of the degenerate fibres of $X \longrightarrow C$, introduced for genus 2 in [18] and for genus > 2 in [25].

(If $g=1$, only the multiple fibres count and $\eta_P = e_P - 1$, where e_P is the multiplicity of the fibre over P). The number ρ depends on the local invariants of the degenerate fibres and also on the way the Weierstraß points of the general fibre collapse within the fibre space $X \longrightarrow C$. If the general fibre of $X \longrightarrow C$ is a hyperelliptic curve, the number ρ is 0 and the local invariants of $\pi : X \longrightarrow C$ are then sufficient to calculate ω_X^2. This explains the fact that in Ueno's formula for ω_X^2, which deals with curves of genus 2 (they are all hyperelliptic), only the local invariants of the degenerate fibres appear.

Nakamura and Ueno [17] or [23], §14, have shown that $C_{n,m}$ holds for analytic fibre bundles $f : V \longrightarrow W$ and that in this case equality holds. Ueno [24] has proved that $C_{3,1}$ is true if the base curve W of the fibre space $f : V \longrightarrow W$ is of genus $\geqslant 2$ and if $p_g(V) \geqslant 1$. Moreover, he has shown, as already stated, that for threefolds V of Kodaira dimension 0 the Albanese map is surjective.

Kawamata [30] has proved Conjecture $C_{n,n-1}$ for open varieties. If applied to surfaces, his result yields a classification of open surfaces which is analogous to the Enriques's classification of projective surfaces.

Viehweg's proof of Conjecture $C_{n,n-1}$ shows that the direct image $f_* \omega_{V/W}$ of the relative canonical sheaf $\omega_{V/W}$ of a fibre space $V \xrightarrow{f} W$ must be considered.

Fujita [5] has obtained a proof of the following theorem.

<u>Theorem</u> 6 - Let $f : V \longrightarrow W$ be a fibre space of projective varieties such that W is a curve. Then $f_* \omega_{V/W}$ is locally free and numerically semi positive.

Previously Griffith [29] proved this result for $f : V \longrightarrow W$ a smooth fibre space with base W of arbitrary dimension. Moreover, Griffith showed that if $f_* \omega_{V/W}$ is invertible, $f_* \omega_{V/W}$ is positive if the period map of the family $V \longrightarrow W$ is finite on W. In particular, if the canonical bundle of a general fibre is trivial, then $f_* \omega_{V/W}$ is positive unless f is a fibre bundle over a dense open set of W.

The second result of Fujita (cf. [4]) relates the fact that $f_* \omega_{V/W}$ is semi positive to Conjecture $C_{n,m}$.

<u>Theorem</u> 7 - Let $f : V \longrightarrow W$ be a fibre space such that $f_* \omega_{V/W}$ is locally free and semi positive as a vector bundle. If W is of general type, $x(V) \geqslant x(V_W) + x(W)$.

The results of Fujita hint at a possible proof of the surjectivity of the Albanese map for algebraic varieties of parabolic type (cf. [4], Remark 2). The following statement can be proved.

Proposition 8 - If Conjecture $C_{n,m}$ is true for fibre spaces $V \longrightarrow W$ over a manifold W of general type, the Albanese map is surjective for algebraic varieties of parabolic type.

Finally we mention that Ueno has very recently proved Conjecture $C_{n,m}$ if the general fibre of the fibre space $f : V \longrightarrow W$ is an abelian variety (V,W are smooth projective varieties over $\mathbb{C}$). Using the theory of period maps he showed the existence of an integer $m > 0$ such that $\omega_{V/W}^{\otimes m}$ has a section. Theorem 3 then yields $C_{n,m}$. Ueno has also obtained a formula for the canonical bundle of V if the fibre space $V \longrightarrow W$ is flat and the general fibre an abelian variety.

Literature

[1] S. Ju. Arakelov, Families of algebraic curves with fixed degeneracis. Izv. Akad. Nauk. SSSR, Ser. Math. 35 (1971), engl. transl. : Math. USSR Izv. 5 (1971), 1277-1302.

[2] P. Deligne, Théorie de Hodge II, Publ. Math., IHES 40 (1973).

[3] F. Enriques, Le Superficie Algebriche. Bologna 1949.

[4] T. Fujita, Some remarks on Kodaira dimension of fibre spaces. To Appear.

[5] T. Fujita, On Kähler fibre spaces over curves. To Appear.

[6] T. Fujita and S. Iitaka, Cancellation theorem for algebraic varieties. To appear.

[7] R. Hartshorne, Residues and Duality, Lecture Notes in Math., 20 (1966), Springer-Verlag.

[8] H. Hironaka, Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero, I, II. Ann. of Math. 79 (1964), 109-326.

[9] S. Iitaka, On D-dimension of algebraic varieties. J. Math. Soc. Japan 23 (1971), 356-373.

[10] S. Iitaka, Genera and classification of algebraic varieties, I (in japanese). Sugaku 24 (1972), 14-27.

[11] S. Iitaka, Logarithmic Kodaira dimension of algebraic varieties. Complex Analysis and Algebraic Geometry, papers in honor of K. Kodaira. Iwanami Shoten Publishers, Cambridge Univ. Press 1977, 175-190.

[12] S. Iitaka, Logarithmic forms of algebraic varieties. J. Fac. Sci. Univ. Tokuo 23 (1976), 523-544.

[13] K. Kodaira, On compact analytic surfaces II, III. Ann. Math. 77 (1963), 563-626, ibid. 78 (1963), 1-40.

[14] K. Kodaira, On the structure of compact complex analytic surfaces I, II, III, IV. Amer. J. Math. 86 (1964), 751-798, ibid. 88 (1966), 682-721, ibid 90 (1968) 55-83, 1048-1066.

[15] S. Lang, Abelian varieties, Interscience Publ. N.Y. 1959.

[16] D. Mumford, Geometric Invariant Theory. Springer 1965.

[17] I. Nakamura and K. Ueno, An addition formula for Kodaira dimension of analytic fibre bundles whose fibre are Moishezon manifolds. J. Math. Soc. Japan 25 (1973), 363-371.

[18] Y. Namikawa and K. Ueno, The Complete classification of fibres in pencils of curves of genus two. Manuscripta Math. 9 (1973), 163-186.

[19] H. Popp, On moduli of algebraic varieties III. Fine moduli spaces. Compositio Math. 31 (1975), 237-258.

[20] H. Popp, Lectures on moduli theory and classification theory of algebraic varieties. To appear in Springer Lecture Notes.

[21] F. Sakai, Kodaira dimension of complements of divisors. Complex Analysis and Algebraic geometry. Papers in honor of K. Kodaira. Iwanami Shoten Publishers, Cambridge Univ. Press 1977, 239-258.

[22] K. Ueno, Classification of algebraic varieties I, II. Compositio Math. 27 (1973), 277-342, ibid.

[23] K. Ueno, Classification Theory of Algebraic Varieties and Compact Complex Spaces. Lecture Notes in Math. 439 (1975), Springer Verlag.

[24] K. Ueno, On algebraic threefolds of parabolic type with $p_g = 1$. To appear.

[25] E. Viehweg, Invarianten Iokaler Familien von Kurven. To appear in Journal f.d.r.u.a. Math.

[26] E. Viehweg, Canonical divisors and the additivity of the Kodaira dimension for morphisms of relative dimension one. To appear in Compositio Math.

[27] E. Viehweg, Rational singularities of higher dimensional schemes. To appear in Proc. of A.M.S..

[28] P.A. Griffiths, Periods of integrals on algebraic manifolds. Bull. Am. Math. Soc. 76 (1970), 228-296.

[29] P.A. Griffiths, Periods of integrals on algebraic manifolds III, Publ. Math. I.H.E.S. 38 (1970), 125-180.

[30] Y. Kawamata, Addition formula of logarithmic Kodaira dimension for morphism of relative dimension one. To appear.

[31] K. Ueno, Kodaira dimension of certain fibre spaces. Complex Analysis and Algebraic geometry. Papers in honor of K. Kodaira. Iwanami Shoten Publishers, Cambridge Univ. Press 1977, 179-292.

[32] T. Van de Ven - On Enriques classification of algebraic surfaces. Sém. Bourbaki - Exp. 506 (1977).

Mannheim Mars 1977

SUR LES INVARIANTS HOMOLOGIQUES DES ANNEAUX LOCAUX NOETHERIENS :

UN CALCUL DE LA CINQUIEME DEFLECTION ε_5.

Michel PAUGAM

INTRODUCTION

Dans ces pages, on suppose que R est un anneau commutatif unitaire local et noethérien, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, de corps résiduel K . Soit $n = \dim_K \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2}$ la dimension de plongement de R ("embedding dimension"). Il est bien connu que les déflections ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 s'expriment en fonction de l'homologie $H_* = H_*(E)$ du complexe de Koszul E de R (voir [2], [13], [14], [18]) et donnent des informations sur la "régularité de R" ([6] [15]). Leur calcul a permis dans certains cas [13] d'établir la rationalité de la série de Poincaré de R

Dans l'article [2] d'Avramov, une méthode est donnée pour calculer ε_5 pour $n \leq 4$ ([2] Remark 6.3.). Mais pour n quelconque, ε_5 n'est connu que pour les anneaux de Golod et dans des cas particuliers.

A l'aide de la construction de Tate [16] et en utilisant ensuite des produits de Massey de matrices [9] à coefficients dans $H_*(E)$; on détermine ici la valeur de ε_5 pour tout n sous des seules hypothèses $H_1^2 = 0$ et $H_1.H_2 = 0$. On obtient le résultat suivant :

<u>Théorème</u>. - <u>Soit</u> R <u>un anneau local noethérien d'idéal maximal</u> $\mathfrak{m}$, <u>de corps résiduel</u> K. <u>Soit</u> $n = \dim_K \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ <u>sa dimension de plongement</u>. <u>Si l'homologie</u> H_* <u>du complexe de Koszul associé à un système générateur minimal</u>

de $\mathcal{M}$ vérifie $H_1^2 = H_1 \cdot H_2 = 0$, alors on a :

$$\boxed{\begin{array}{l} \varepsilon_5 = \dim_K \frac{H_5}{\tilde{H}_5} + \varepsilon_1 \varepsilon_3 + \varepsilon_2 + \binom{\varepsilon_2}{2} - \binom{\varepsilon_1}{3} - \dim_K \tilde{H}_4 \\ \text{avec } \tilde{H}_4 = H_2^2 + \langle H_1, H_1, H_1 \rangle \\ \qquad \tilde{H}_5 = \langle H_2, H_1, H_1 \rangle + \langle H_1, H_2, H_1 \rangle . \end{array}}$$

Les termes entre crochets sont définis dans le §1 ci-dessous.

Enfin, on donne un exemple d'application de la formule à un anneau artinien, de dimension de plongement 5 pour lequel la multiplication dans l'algèbre H_* n'est pas triviale (voir [10] et [11]).

§.1. Une utilisation des produits de Massey de matrices. Définitions et notations

1.1. Les produits de Massey.

Les produits de Massey de matrices sont définis dans [9] et ont été utilisés en particulier dans [2],[7] et [8].

Soit U une R-algèbre $\mathbb{Z}$-graduée différentielle fixée ([9] cas (1) p.535) avec élément unité, telle que , $U_i = 0$ pour $i < 0$ et munie d'un opérateur d de degré -1.

Soit $M(U)$ le R-module des matrices infinies $X = (x_{ij})$ $(1 \leq i,j < +\infty)$ dont les coefficients x_{ij} sont des éléments homogènes de U et où X n'a qu'un nombre fini de coefficients non nuls. On écrit :

$$\bar{X} = ((-1)^{\alpha(i,j)} x_{ij}) \quad \text{où} \quad \alpha(i,j) = 1 + \deg x_{ij}$$

et $dX = (d\, x_{ij})$; si $dX = 0$, on note $\{X\}$ la matrice $(\{x_{ij}\})$ des classes d'homologie.

Un système $X_1, \dots, X_p \in MU$ est dit multipliable si : $X_i \cdot X_{i+1} \dots X_j \in MU$ pour $1 \leq i < j \leq p$ (produit de matrices au sens habituel). Soit $p \geq 2$, on dit que le produit de Massey $\langle V_1, \dots, V_p \rangle$ est défini pour $V_i \in MH(U)$ si les V_i constituent un système multipliable et s'il existe des matrices $A_{ij} \in M(U)$ $(1 \leq i \leq j \leq p,\ j-i < p-1)$ telles que $A_{ii} \in MZ(U)$ soit une matrice de représentants pour V_i $(1 \leq i \leq p)$ et telles que pour tous les couples (i,j) $1 \leq i \leq j \leq p$, $j-i < p-1$, on ait

$dA_{ij} = \tilde{A}_{ij}$ où $\tilde{A}_{ij} = \sum_{k=i}^{j-1} \bar{A}_{ik}.A_{k+1j}$. On alors : $d\tilde{A}_{1p} = 0$ ([9] p.538).
L'ensemble des matrices A_{ij} $(1 \leq i \leq j \leq p,\ j-i < p-1)$ est appelé un système de définition pour $\langle V_1,\ldots,V_p\rangle$ et l'on dit que $\{\tilde{A}_{1p}\} \in \langle V_1,\ldots,V_p\rangle$.
$\langle V_1,\ldots,V_p\rangle$ est défini comme étant l'ensemble de toutes les classes d'homologie que l'on peut obtenir comme ci-dessus à partir de systèmes de définition. Cet ensemble est indépendant du choix des représentants choisis pour les V_i ([9] lemme 2.2.).

1.2. Définition. - Soit R un anneau local noethérien dont l'homologie H_* du complexe de Koszul vérifie $H_1^2 = H_1.H_2 = 0$. Soit i,j,k trois entiers non nuls tels que $i+j+k \leq 4$. On pose :

$\langle H_i,H_j,H_k\rangle = \bigcup \langle V_1,V_2,V_3\rangle$ où l'union est prise pour tous les

produits de Massey de matrices $\langle V_1, V_2, V_3\rangle$ tels que :

1) $V_1 \in M\,H_i$, $V_2 \in M\,H_j$, $V_3 \in MH_k$
2) V_1 est une matrice ligne, V_3 est une matrice colonne.

D'après [9] (prop. 2.7. (ii) et prop. 2.9), on sait que $\langle H_i,H_j,H_k\rangle$ est un sous R-module de $H_{i+j+k+1}$.

1.3. Remarques. - Sous les hypothèses de (1-2), si i,j,k désignent toujours trois entiers non nuls tels que $i+j+k \leq 4$, soient $x_1 \in H_i$, $x_2 \in H_j$, $x_3 \in H_k$; notons $\langle x_1,x_2,x_3\rangle$ l'ensemble des classes d'homologie des éléments de la forme

$$(-1)^{i+1}\, z_1 y_2 + (-1)^{i+j}\, y_1\, z_3$$

où $z_1 \in Z_i$, $y_2 \in E_{j+k+1}$, $z_3 \in Z_k$, $y_1 \in E_{i+j+1}$ sont tels que x_1 (resp. x_3) soit la classe d'homologie de z_1 (resp. z_3) et qu'il existe $z_2 \in Z_j$ tel que x_2 soit la classe d'homologie de z_2 et qu'on ait :

$$dy_1 = (-1)^{i+1}\, z_1 z_2 \quad \text{et} \quad dy_2 = (-1)^{j+1}\, z_2.z_3.$$

Alors on observe que $\langle H_i,H_j,H_k\rangle$ est le sous K-espace vectoriel de $H_{i+j+k+1}$ engendré par les $\langle x_1,x_2,x_3\rangle$ où $x_1 \in H_i$, $x_2 \in H_j$, $x_3 \in H_k$. Il est clair que $\langle H_2,H_1,H_1\rangle = \langle H_1,H_1,H_2\rangle$, $H_1.H_3 \subset \langle H_1,H_1,H_1\rangle$, $H_1.H_4 \subset \langle H_1,H_2,H_1\rangle$, $H_2.H_3 \subset \langle H_2,H_1,H_1\rangle$.

1.4. Notations. -

On pose $\tilde{H}_4 = H_2^2 + \langle H_1,H_1,H_1\rangle$

$\tilde{H}_5 = \langle H_1,H_2,H_1\rangle + \langle H_2,H_1,H_1\rangle$

et l'on note $\langle Z_i,Z_j,Z_k\rangle$ l'image réciproque de $\langle H_i,H_j,H_k\rangle$ par le morphisme canonique $Z_{i+j+k+1} \longrightarrow H_{i+j+k+1}$.

<u>1.5. Remarque</u>. - Les hypothèses $H_1^2 = H_1 \cdot H_2 = 0$ sont satisfaites pour une large classe d'anneaux. (Voir [4] et l'exemple du §6). De plus $\widetilde{H}_5 = \langle H_2, H_1, H_1 \rangle$.

§.2. Résultats préliminaires

<u>2.1. Les R-algèbres de Tate</u>.

Soit $(t_1,\ldots,t_n)$ un système générateur minimal de l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de R. Par le procédé d'adjonction d'une variable de degré $\rho \geq 1$ pour tuer un cycle de degré $\rho - 1$, on obtient une suite de R-algèbres $X^{(i)}$ $(i = 0,1,2,\ldots)$ [16]. Nous conservons les notations de [13].

$$X^{(0)} = R,\ X^{(1)} = E = R\langle T_1,\ldots,T_n\rangle \ ;\ dT_i = t_i \qquad \deg T_i = 1$$

(E est le complexe de Koszul de R)

$$X^{(2)} = X^{(1)}\langle S_1,\ldots,S_{\varepsilon_1}\rangle \ ;\ dS_i = s_i \qquad \deg S_i = 2$$
$$X^{(3)} = X^{(2)}\langle U_1,\ldots,U_{\varepsilon_2}\rangle \ ;\ dU_i = u_i \qquad \deg U_i = 3.$$
$$X^{(4)} = X^{(3)}\langle V_1,\ldots,V_{\varepsilon_3}\rangle \ ;\ dV_i = v_i \qquad \deg V_i = 4.$$
$$X^{(5)} = X^{(4)}\langle W_1,\ldots,W_{\varepsilon_4}\rangle \ ;\ dW_i = w_i \qquad \deg W_i = 5.$$
$$X^{(6)} = X^{(5)}\langle \mathfrak{X}_1,\ldots,\mathfrak{X}_{\varepsilon_5}\rangle \ ;\ \deg \mathfrak{X}_i = \xi_i \qquad \deg \mathfrak{X}_i = 6$$

où $T_i, S_i, U_i, V_i, W_i, \mathfrak{X}_i \ldots$ sont des variables qui tuent les cycles $t_i, s_i, u_i, v_i, w_i, \xi_i, \ldots$ respectivement. La $i^{\text{ème}}$ déflection ε_i $(i=1,2,\ldots)$ est définie par $\dim_{\mathcal{K}} H_i(X^{(i)})$. D'après ([13] lemme 1), on a de plus $\varepsilon_i = \dim_{\mathcal{K}} H_i(X^{(i-1)})$ pour $i \geq 3$. Nous utiliserons aussi le résultat suivant prouvé dans ([13] Lemme 2).

<u>2.2. Lemme</u>. - <u>Soit</u> $z_1,\ldots,z_{\varepsilon_i}$ <u>un ensemble de</u> ε_i <u>cycles de</u> $X^{(i)}$ <u>dont les classes d'homologie constituent une base du</u> $\mathcal{K}$<u>-espace vectoriel</u> $H_i(X^{(i)})$ $(i=2,3,\ldots)$. <u>Alors</u> z_j $(j=1,2,\ldots,\varepsilon_i)$ <u>peut être choisi dans</u> $X^{(i-1)}$

<u>2.3. Corollaire</u>. - <u>Les</u> $u_i (i=1,2,\ldots,\varepsilon_2)$, v_i $(i=1,2,\ldots,\varepsilon_3)$, w_i $(i=1,2,\ldots,\varepsilon_4)$ <u>et</u> $\xi_i (i=1,2,\ldots,\varepsilon_5)$ <u>peuvent être choisis dans</u> $Z_2(E)$, $Z_3(X^{(2)})$, $Z_4(X^{(3)})$ <u>et</u> $Z_5(X^{(4)})$ <u>respectivement</u>.

2.4. Remarque. - La construction de Tate donne :

$$X_5^{(4)} = E_5 + \sum_{i=1}^{\varepsilon_1} E_3 S_i + \sum_{1\leq i<j\leq \varepsilon_1} E_1 S_i S_j + \sum_{i=1}^{\varepsilon_1} E_1 S_i^{(2)} + \sum_{i=1}^{\varepsilon_2} E_2 U_i + \sum_{\substack{1\leq i\leq \varepsilon_1\\ 1\leq j\leq \varepsilon_2}} R S_i U_j + \sum_{i=1}^{\varepsilon_3} E_1 V_i$$

$$X_6^{(4)} = E_6 + \sum_{i=1}^{\varepsilon_1} E_4 S_i + \sum_{1\leq i<j\leq \varepsilon_1} E_2 S_i S_j + \sum_{i=1}^{\varepsilon_1} E_2 S_i^{(2)} + \sum_{1\leq i<j<k\leq \varepsilon_1} R S_i S_j S_k +$$

$$+ \sum_{\substack{i\neq j\\ 1\leq i,j\leq \varepsilon_1}} R S_i S_j^{(2)} + \sum_{i=1}^{\varepsilon_1} R S_i^{(3)} + \sum_{i=1}^{\varepsilon_2} E_3 U_i + \sum_{i=1}^{\varepsilon_1}\sum_{j=1}^{\varepsilon_2} E_1 S_i U_j + \sum_{1\leq i<j\leq \varepsilon_2} R U_i U_j +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\varepsilon_3} E_2 V_k + \sum_{j=1}^{\varepsilon_1}\sum_{k=1}^{\varepsilon_3} R\, S_j V_k .$$

2.5. Lemme. - ([13] Lemme 3 p.27). Soit R un anneau commutatif noethérien local, de corps résiduel $\mathcal{K}$ et de dimension de plongement n. Soit H_* l'homologie du complexe de Koszul de R.

Si $H_1^2 = 0$, alors on peut trouver $v_i \in Z_3$ $i = 1,\dots,\dim_{\mathcal{K}} \frac{H_3}{H_1 \cdot H_2}$ et $\omega_{ij} \in E_3$ pour $1 \leq i, j \leq \varepsilon_1$ tels que les classes d'homologie des

v_i , $i = 1,\dots,\dim_{\mathcal{K}} \frac{H_3}{H_1 \cdot H_2}$

$v_{ij} = \omega_{ij} + s_i\, S_j \in Z_3\, (X^{(2)})$ $\quad 1 \leq i < j \leq \varepsilon_1$

constituent une base du $\mathcal{K}$-espace vectoriel $H_3(X^{(2)})$.

2.6. Remarque. - Sous les hypothèses $H_1^2 = H_1 \cdot H_2 = 0$, on a $\varepsilon_3 = C_3 + \binom{\varepsilon_1}{2}$ et nous appellerons V_i $1 \leq i \leq C_3$ (resp. V_{ij} $1 \leq i < j \leq \varepsilon_1$) les variables de degré 4 qui tuent les cycles v_i (resp. v_{ij}), où l'on a posé $C_3 = \dim_{\mathcal{K}} H_3$.

2.7. Remarque. - En utilisant la même méthode que dans [13], on peut prouver le résultat suivant :

Soit R un anneau local noethérien de dimension de plongement n, de corps résiduel $\mathcal{K}$, avec $H_1^2 = 0$; alors on a :

$$\varepsilon_4 = \dim_{\mathcal{K}} \frac{H_4}{\overline{H}_4} + \varepsilon_1\, \varepsilon_2 - \dim_{\mathcal{K}} (H_1 \cdot H_2).$$

La formule est en accord avec [2] p.279.

Il est en effet facile de construire des cycles spéciaux w_{ij} de $Z_4(X^{(3)})$ (corollaire 2.3.) de la forme :

$$w_{ij} = a_{ij} + s_i\, U_j - \sum_J r_{p,q}^{(i,j)}\, s_p\, U_q \qquad (i,j) \in J\ :$$

Si I désigne l'ensemble des couples d'entiers (p,q) $1 \leq p \leq \varepsilon_1$, $1 \leq q \leq \varepsilon_2$ tels que les classes d'homologie des $s_p.u_q$ $(p,q) \in I$ forment une base de l'espace vectoriel $H_1.H_2$, alors

$$J = \{(i,j) \quad 1 \leq i \leq \varepsilon_1 \ , \ 1 \leq j \leq \varepsilon_2 \ ; \ (i,j) \notin I\} \ .$$

$$a_{ij} \in E_4 \qquad (i,j) \in J.$$

$$r_{pq}^{(i,j)} \in R \quad \text{pour} \quad (i,j) \in J, \quad (p,q) \in I.$$

2.8. Remarques. - Sous l'hypothèse $H_1^2 = 0$, si l'on choisit les ω_{ij} $1 \leq i,j \leq \varepsilon_1$ comme dans le lemme (2.5.), on sait que l'on peut supposer $\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0$ et $\omega_{ii} = 0$ compte tenu de $s_i.s_j = -s_j.s_i$.

Pour i,j,k dans $\{1,2,\ldots,\varepsilon_1\}$, posons $\langle s_i,s_j,s_k\rangle = s_i\ \omega_{jk} + \omega_{ij}\ s_k$.

On a $\langle s_i,s_j,s_k\rangle \in \langle Z_1,Z_1,Z_1\rangle$. De plus pour i,j,k dans $\{1,2,\ldots,\varepsilon_1\}$, on vérifie que l'on a :

$$* \quad \langle s_i,s_j,s_k\rangle = \langle s_k,s_j,s_i\rangle$$

et les relations

$$** \quad \langle s_i,s_j,s_k\rangle + \langle s_j,s_k,s_i\rangle + \langle s_k,s_i,s_j\rangle = 0$$

En outre, on peut noter qu'un élément de $\langle Z_1,Z_1,Z_1\rangle$ peut s'écrire modulo B_4 comme somme d'un terme de $Z_1.Z_3$ et d'une combinaison R-linéaire de $\langle s_i,s_j,s_k\rangle$ où :

$$1 \leq i < k \leq \varepsilon_1$$

$j = 1,\ldots,\varepsilon_1$ et $(i,j,k) \notin I_0$ avec :

$I_0 = \{(a,b,c) \in \{1,\ldots,\varepsilon_1\}^3 \ ; \ 1 \leq a < b < c \leq \varepsilon_1\}$ par $*$ et $**$.

2.9. Remarques. - Si $H_1^2 = 0$, pour $1 \leq i < k \leq \varepsilon_1$, $j = 1,\ldots,\varepsilon_1$, on a : $s_jS_iS_k + \omega_{ji}\ S_k + \omega_{jk}\ S_i \in X_5^{(3)}$ (Remarque 2.4) et $d(s_jS_iS_k + \omega_{ji}\ S_k + \omega_{jk}\ S_i) = \langle s_i,s_j,s_k\rangle$. On note :

$$s_jS_iS_k + \omega_{ji}\ S_k + \omega_{jk}\ S_i = \int \langle s_i,s_j,s_k\rangle \ .$$

Plus généralement, pour tout ensemble $\{x_1^{(i,j)} \in Z_1 \ ; \ 1 \leq i < j \leq \varepsilon_1\}$, si l'on choisit $\omega(x_1^{(i,j)},s_k) \in E_3$ pour $k = 1,\ldots,\varepsilon_1$ tels que $d\omega(x_1^{(i,j)},s_k) = x_1^{(i,j)}.s_k$, puisque $H_1^2 = 0$, alors la classe d'homologie modulo B_4 de :

$$d[x_1^{(i,j)}\ S_iS_j + \omega(x_1^{(i,j)},s_i)\ S_j + \omega(x_1^{(i,j)},\ s_j)\ S_i] =$$

$s_i \cdot \omega(x_1^{(i,j)}, s_j) - \omega(x_1^{(i,j)}, s_i)s_j$ appartient à $\langle \{s_i\}, \{x_1^{(i,j)}\}, \{s_j\} \rangle$ avec les notations du §1. Enfin pour $1 \leqslant i < j < k \leqslant \varepsilon_1$, les relations ** montrent que :

$$(s_j S_i S_k + \omega_{ji} S_k + \omega_{jk} S_i) + (s_k S_j S_i + \omega_{kj} S_i + \omega_{ki} S_j) + (s_i S_k S_j + \omega_{ik} S_j + \omega_{ij} S_k)$$

est égal à $d(S_i . S_j . S_k)$ de sorte que

$$\int \langle s_i, s_j, s_k \rangle + \int \langle s_j, s_k, s_i \rangle + \int \langle s_k, s_i, s_j \rangle \text{ est nul modulo } B_5(X^{(4)}).$$

Nous sommes alors prêts pour construire des cycles particuliers de $Z_5(X^{(4)})$ lorsque $H_1^2 = H_1 . H_2 = 0$.

§.3. Construction de cycles particuliers de $Z_5(X^{(4)})$ lorsque $H_1^2 = H_1 . H_2 = 0$

Posons $c = c_3 = \dim_K H_3$. Soient I, J, K, L, M, N des ensembles de couples et triplets d'entiers tels que :

1) $I \cup J = \{(p,q) \; ; \; 1 \leqslant p \leqslant \varepsilon_1, \; 1 \leqslant q \leqslant c\}$
$K \cup L = \{(p,q) \quad 1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \varepsilon_2\}$
$M \cup N = \{(p,q,r) \; ; \; 1 \leqslant p < r \leqslant \varepsilon_1, \; q = 1, \dots, \varepsilon_1 \; ; \; (p,q,r) \notin I_0\}$ (c.f. 2.8.)

2) les classes d'homologie des $(s_p . v_q)$ $(p,q) \in I$ constituent une base de l'espace vectoriel $H_1 . H_3$, celles des $(s_p . v_q)$ $(p,q) \in I$ et des $(u_p . u_q)$ $(p,q) \in K$ constituent une base de $H_1 . H_3 + H_2^2$, celles des $(s_p . v_q)$ $(p,q) \in I$, des $(u_p . u_q)$ $(p,q) \in K$, et des $\langle s_p, s_q, s_r \rangle$ $(p,q,r) \in M$ constituent une base de $\tilde{H}_4$;

3) $J = \{(i,j) \; ; \; 1 \leqslant i \leqslant \varepsilon_1 \quad 1 \leqslant j \leqslant c \; ; \; (i,j) \notin I\}$
$L = \{(i,j) \quad 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant \varepsilon_2 \; ; \; (i,j) \notin K\}$
$N = \{(i,j,k) \quad 1 \leqslant i < k \leqslant \varepsilon_1 \quad j = 1, \dots, \varepsilon_1 \; ; \; (i,j,k) \notin I_0 \text{ et } (i,j,k) \notin M\}$.

On a : $\text{Card } J + \text{Card } K + \text{Card } M = \dim_K \tilde{H}_4$

$$\text{Card } I = \varepsilon_1 . c - \text{Card } I$$

$$\text{Card } L = \varepsilon_2 + \binom{\varepsilon_2}{2} - \text{Card } K$$

$$\text{Card } N = \varepsilon_1 \binom{\varepsilon_1}{2} - \binom{\varepsilon_1}{3} - \text{Card } M .$$

Pour tout ensemble

$$\{x_1^{(i)} \in Z_1 \; ; \; i = 1, \dots, c\} \cup \{x_2^{(i)} \in Z_2 \; ; \; i = 1, \dots, \varepsilon_2\} \cup \{x_1^{(i,j)} \in Z_1 \; ; \; 1 \leqslant i < j \leqslant \varepsilon_1\}$$

on peut trouver $r_{p,q} \in R$ $(p,q) \in I$, $\varphi_{pq} \in R$ $(p,q) \in K$ et $\rho_{pqr} \in R$ $(p,q,r) \in M$ et $x_5 \in E_5$ tels que :

$$\xi = \xi((x_1^{(i)}),(x_2^{(j)}),(x_1^{(k,h)})) = x_5 - \sum_{i=1}^{c} x_1^{(i)} V_i + \sum_I r_{pq} s_p V_q + \sum_{i=1}^{\varepsilon_2} x_2^{(i)} U_i -$$

$$- \sum_K \varphi_{pq} u_p U_q + \sum_{1 \leq i < j \leq \varepsilon_1} x_1^{(i,j)} S_i S_j + \omega(x_1^{(i,j)}, s_i) S_j + \omega(x_1^{(i,j)}, s_j) S_i -$$

$$- \sum_M \rho_{pqr} (s_q S_p S_r + \omega_{qp} S_r + \omega_{qr} S_p)$$ soit dans $Z_5(X^{(4)})$ où les termes en ω sont définis dans les remarques (2.8) et (2.9). On a en effet

$$\sum_{i=1}^{c} x_1^{(i)} v_i + \sum_{i=1}^{\varepsilon_2} x_2^{(i)} u_i + \sum_{1 \leq i < j \leq \varepsilon_1} s_i\, \omega(x_1^{(i,j)}, s_j) - \omega(x_1^{(i,j)}, s_i) s_j =$$

$$\sum_I r_{pq} s_p v_q + \sum_K \varphi_{pq} u_p u_q + \sum_M \rho_{pqr} \langle s_p, s_q, s_r \rangle - dx_5$$

avec r_{pq}, φ_{pq}, ρ_{pqr} dans R et x_5 dans E_5 d'après le choix de I,K,M.

<u>3.1. Remarque</u>. - L'expression

$$A = x_5 + \sum_I r_{pq} s_p V_q - \sum_K \varphi_{pq} u_p U_q - \sum_M \rho_{pqr} (s_q S_p S_r + \omega_{qp} S_r + \omega_{qr} S_p)$$

est définie de façon unique modulo $B_5(X^{(4)}) + Z_5(E)$. Il suffit en effet de prouver que $dA = 0 \Longrightarrow A \in B_5(X^{(4)}) + Z_5(E)$. Mais si

$dx_5 - \sum_I r_{pq} s_p v_q - \sum_K \varphi_{pq} u_p u_q - \sum_M \rho_{pqr} \langle s_p, s_q, s_r \rangle = 0$, on a : $r_{pq}, \varphi_{pq}, \rho_{pqr} \in \mathfrak{m}$

d'après la définition de I,K,M et par suite, il existe des $R_{pq}, \phi_{pq}, P_{pqr}$ de E_1 tels que $r_{pq} = dR_{pq}$, $\varphi_{pq} = d\phi_{pq}$, $\rho_{pqr} = dP_{pqr}$. On en déduit que :

$$dx_5 - \sum_I dR_{pq} s_p v_q - \sum_K d\phi_{pq} u_p u_q - \sum_M dP_{pqr} \langle s_p, s_q, s_r \rangle =$$

$$d(x_5 - \sum_I R_{pq} s_p v_q - \sum_K \phi_{pq} u_p u_q - \sum_M P_{pqr} \langle s_p, s_q, s_r \rangle) = 0$$ c'est-à-dire :

$$x_5 - \sum_I R_{pq} s_p v_q - \sum_K \phi_{pq} u_p u_q - \sum_M P_{pqr} \langle s_p, s_q, s_r \rangle \in Z_5 .$$

On a aussi :

$$d(\sum_I R_{pq} s_p V_q) = \sum_I r_{pq} s_p V_q + \sum_I R_{pq} s_p v_q$$

$$d(\sum_K \phi_{pq} u_p U_q) = \sum_K \varphi_{pq} u_p U_q - \sum_K \phi_{pq} u_p . u_q \quad \text{et}$$

$$d(\sum_M P_{pqr} \int \langle s_p, s_q, s_r \rangle) = \sum_M \rho_{pqr} \int \langle s_p, s_q, s_r \rangle - \sum_M P_{pqr} \langle s_p, s_q, s_r \rangle .$$

Il en résulte que :

$$A = x_5 - \sum_I R_{pq} s_p v_q - \sum_K \phi_{pq} u_p . u_q - \sum_M P_{pqr} \langle s_p, s_q, s_r \rangle +$$

$$d\Big(\sum_I R_{pq} s_p V_q - \sum_K \phi_{pq} u_p U_q - \sum_M P_{pqr} \int \langle s_p, s_q, s_r \rangle\Big) \quad \text{et l'on a bien :}$$

$$A \in B_5(X^{(4)}) + Z_5 .$$

<u>3.2. Remarque</u>. - Si $(x_1^{(i)}, x_2^{(j)}, x_1^{(k,h)}) \in B_1 \times B_2 \times B_1$ pour $i = 1,\dots,C$; $j = 1,\dots,\varepsilon_2$; $1 \leq k < h \leq \varepsilon_1$, alors $\xi \in B_5(X^{(4)}) + Z_5$. De fait, il existe dans ce cas $y_2^{(i)} \in E_2$, $y_3^{(j)} \in E_3$, $y_2^{(k,h)} \in E_2$ tels que :

$$x_1^{(i)} = dy_2^{(i)} \; ; \; x_2^{(j)} = dy_3^{(j)} \; ; \; x_1^{(k,h)} = dy_2^{(k,h)} .$$

On peut observer que

$$dy_2^{(k,h)} s_k S_h + y_2^{(k,h)} s_k S_h + y_2^{(k,h)} s_h S_k = d(y_2^{(k,h)} s_k S_h) \in B_5(X^{(4)}),$$

aussi peut-on obtenir un cycle ξ de la forme :

$$\xi = x_5 - \sum_{i=1}^{C} dy_2^{(i)} v_i + \sum_I r_{pq} s_p V_q + \sum_{i=1}^{\varepsilon_2} dy_3^{(i)} U_i - \sum_K \varphi_{pq} u_p u_q - \sum_M \rho_{pqr} \int \langle s_p, s_q, s_r \rangle$$

où $r_{pq}, \varphi_{pq}, \rho_{pqr}$ sont dans R et x_5 dans E_5. La condition $d\xi = 0$ implique $r_{p,q}, \varphi_{pq}, \rho_{pqr} \in \mathfrak{m}$. Si l'on choisit

$$R_{pq}, \phi_{pq}, P_{pqr} \in E_1 \quad \text{tels que :}$$

$r_{pq} = dR_{pq}, \varphi_{pq} = d\phi_{pq}$, $_{pqr} = dP_{pqr}$, alors on vérifie que :

$$x_5 + \sum_{i=1}^{C} y_2^{(i)} v_i - \sum_I R_{pq} s_p V_q + \sum_{i=1}^{\varepsilon_2} y_3^{(i)} u_i - \sum_K \phi_{pq} u_p u_q - \sum_M P_{pqr} \langle s_p, s_q, s_r \rangle$$

appartient à Z_5. On peut écrire ξ sous la forme :

$$\xi = x_5 - d\Big(\sum_{i=1}^{C} y_2^{(i)} V_i\Big) + \sum_{i=1}^{C} y_2^{(i)} v_i + d\Big(\sum_I R_{pq} s_p V_q\Big) - \sum_I R_{pq} s_p v_q +$$

$$+ d\Big(\sum_{i=1}^{\varepsilon_2} y_3^{(i)} U_i\Big) + \sum_{i=1}^{\varepsilon_2} y_3^{(i)} u_i - d\Big(\sum_K \phi_{pq} u_p U_q\Big) - \sum_K \phi_{pq} u_p u_q$$

$$- d\Big(\sum_M P_{pqr} (s_q S_p S_r + \omega_{qr} S_p + \omega_{qp} S_r)\Big) - \sum_M P_{pqr} \langle s_p, s_q, s_r \rangle ,$$

ce qui prouve que $\xi \in B_5(X^{(4)}) + Z_5$. Considérons alors les trois cas particuliers suivants.

<u>3.3. Cycles particuliers</u>.

(1) Soit $\{x_1^{(1)},\dots,x_1^{(c)}\} = \{0,\dots,0,-s_i,0,\dots,0\}$ où $(-s_i)$ a la place j avec $1\leq i\leq \varepsilon_1$, $1\leq j\leq c$. Prenons :

$((x_1^{(\alpha)}),\ (x_2^{(\beta)}),\ (x_1^{(\gamma,\delta)})) = ((x_1^{(\alpha)}),\ (0),\ (0))$; on obtient les cycles particuliers :

$$E_{ij} = e_{ij} + s_i V_j - \sum_I r_{pq}^{(i,j)} s_p V_q$$

avec e_{ij} dans E_5 et où les coefficients r sont dans R.

(2) soit $\{x_2^{(1)},\dots,x_2^{(\varepsilon_2)}\} = \{0,\dots,0,u_i,0,\dots,0\}$ avec u_i à la place j où $1\leq i\leq \varepsilon_2$, $1\leq j\leq \varepsilon_2$. Prenons

$((x_1^{(\alpha)}),\ (x_2^{(\beta)}),\ (x_1^{(\gamma,\delta)})) = ((0),\ (x_2^{(\beta)}),\ (0))$; on obtient

$$F_{ij} = f_{ij} + \sum_I r'^{(i,j)}_{pq} s_p V_q + u_i U_j - \sum_K \varphi_{pq}^{(i,j)} u_p U_q$$

avec f_{ij} dans E_5 ; les coefficients r', φ étant dans R. On a :

$$u_i u_j = \sum_I r'^{(i,j)}_{pq} s_p v_q + \sum_K \varphi_{pq}^{(i,j)} u_p . u_q - d(f_{ij}) ;$$

et $u_i . u_j = u_j . u_i$, aussi peut-on supposer

$$r'^{(i,j)}_{pq} = r'^{(j,i)}_{pq} ; \varphi_{pq}^{(i,j)} = \varphi_{pq}^{(j,i)} ; \text{ et } f_{ij} = f_{ji}$$

et $F_{ij} - F_{ji} = d(U_i U_j)$ pour $i\neq j$ $1\leq i,j\leq \varepsilon_2$.

(3) Soit $\{x_1^{(\gamma,\delta)}\ 1\leq\gamma<\delta\leq\varepsilon_1\} = \{0,\dots,0,s_j,0,\dots,0\}$ avec s_j à la place (i,k) où $1\leq i<k\leq \varepsilon_1$ $(j=1,\dots,\varepsilon_1)$. Prenons

$((x_1^{(\alpha)}),\ (x_2^{(\beta)}),\ (x_1^{(\gamma,\delta)})) = ((0),(0),(x_1^{(\gamma,\delta)}))$; on obtient :

$$G_{i,j,k} = g_{i,j;k} + \sum_I r_{pq}^{(i,j,k)} s_p V_q - \sum_K \varphi_{pq}^{(i,j,k)} u_p U_q +$$

$$+ s_j S_i S_k + \omega_{ji} S_k + \omega_{jk} S_i - \sum_M \rho_{pqr}^{(i,j,k)} \langle s_p, s_q, s_r\rangle .$$

Les coefficients r, φ, ρ étant dans R et g_{ijk} dans E_5.

3.4. Remarque : Pour $1\leq i<k\leq\varepsilon_1$ $j=1,\dots,\varepsilon_1$, on a :

$$\langle s_i, s_j, s_k\rangle = \sum_I r_{pq}^{(i,j,k)} s_p v_q + \sum_K \varphi_{pq}^{(i,j,k)} u_p u_q + \sum_M \rho_{pqr}^{(i,j,k)} \langle s_p, s_q, s_r\rangle - dg_{ijk} .$$

Donc d'après ** (remarques 2.8), on peut choisir les g de façon à avoir pour $1\leq i<j<k\leq\varepsilon_1$, $g_{i,j,k} + g_{i,k,j} + g_{j,i,k} = 0$ et des relations analogues pour

les coefficients r, φ, ρ. Par conséquent, d'après la remarque (2.9), on peut supposer que

$$G_{i,j,k} + G_{i,k,j} + G_{j,i,k} = d(S_i S_j S_k) \quad \text{pour} \quad 1 \leq i < j < k \leq \varepsilon_1$$

§.4. Construction d'un système générateur de $H_5(X^{(4)})$ lorsque $H_1^2 = H_1 . H_2 = 0$

4.1. Lemme. - $Z_5(X^{(4)}) \subseteq B_5(X^{(4)}) + Z_5(E) + \sum_J RE_{ij} + \sum_L RF_{ij} + \sum_N RG_{ijk}$.

Démonstration. - Soit $z \in Z_5(X^{(4)})$; compte tenu de la remarque (2.4) on peut écrire avec des notations évidentes :

$$z = x_5^{(3)} + \sum_{i=1}^{\varepsilon_3} \alpha_1^{(i)} V_i \quad \text{avec} \quad x_5^{(3)} \in X_5^{(3)} \quad , \alpha_1^{(i)} \in E_1$$

et $x_5^{(3)} = x_5 + \sum_{k=1}^{\varepsilon_1} x_3^{(k)} S_k + \sum_{i<j} x_1^{(i,j)} S_i S_j + \sum_{i=1}^{\varepsilon_1} x_1^{(i,i)} S_i^{(2)} + \sum_{k=1}^{\varepsilon_2} x_2^{(k)} U_k +$

$$+ \sum_{i,j} \mu_{i,j} S_i U_j \text{ . Alors,}$$

$$dz = 0 \iff dx_5^{(3)} + \sum_{i=1}^{\varepsilon_3} d\alpha_1^{(i)} V_i - \sum_{i=1}^{\varepsilon_3} \alpha_1^{(i)} v_i = 0$$

donc $dz = 0 \iff \alpha_1^{(i)} \in Z_1$ pour $i = 1, \ldots, \varepsilon_3$. Mais pour $\varepsilon_3 \geq k > c$ ($c = \dim_K H_3$), par le lemme (2.5), on sait que v_k est de la forme $v_{ij} = \omega_{ij} + s_i . S_j \quad 1 \leq i < j \leq \varepsilon_1$ et par suite

$$\sum_{i=1}^{\varepsilon_3} \alpha_1^{(i)} v_i = \sum_{i=1}^{c} \alpha_1^{(i)} v_i + \sum_{1 \leq i < j \leq \varepsilon_1} \alpha_1^{(i,j)} \omega_{ij} + \sum_{1 \leq i < j \leq \varepsilon_1} \alpha_1^{(i,j)} s_i S_j .$$

où $\alpha_1^{(k)}$ est de la forme $\alpha_1^{(i,j)}$ pour $c < k \leq \varepsilon_3$.

On a par ailleurs :

$$dx_5^{(3)} = dx_5 + \sum_{k=1}^{\varepsilon_1} dx_3^{(k)} S_k - \sum_{k=1}^{\varepsilon_1} x_3^{(k)} s_k + \sum_{1 \leq i < j \leq \varepsilon_1} dx_1^{(i,j)} S_i S_j - \sum_{i<j} x_1^{(i,j)} (s_i S_j + s_j S_i) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\varepsilon_1} dx_1^{(i,i)} S_i^{(2)} - \sum_{i=1}^{\varepsilon_1} x_1^{(i,i)} s_i S_i + \sum_{k=1}^{\varepsilon_2} dx_2^{(k)} U_k + \sum_{k=1}^{\varepsilon_2} x_2^{(k)} u_k + \sum_{\substack{1 \leq i \leq \varepsilon_1 \\ 1 \leq j \leq \varepsilon_2}} \mu_{ij} (s_i U_j + u_j S_i).$$

En développant l'expression de $dx_5^{(3)}$, on obtient :

$$dz=dx_5+\Big\{dx_3^{(1)}-(x_1^{(1,1)}s_1+x_1^{(1,2)}s_2+x_1^{(1,3)}s_3+\ldots+x_1^{(1,\varepsilon_1)}s_{\varepsilon_1})+\sum_{i=1}^{\varepsilon_2}\mu_{1i}u_i\Big\}s_1+$$

$$+\Big\{dx_3^{(2)}-(x_1^{(1,2)}s_1+x_1^{(2,2)}s_2+x_1^{(2,3)}s_3+\ldots+x_1^{(2,\varepsilon_1)}s_{\varepsilon_1})-\alpha_1^{(1,2)}s_1+\sum_{i=1}^{\varepsilon_2}\mu_{2i}u_i\Big\}s_2+$$

$$+\Big\{dx_3^{(3)}-(x_1^{(1,3)}s_1+x_1^{(2,3)}s_2+x_1^{(3,3)}s_3+\ldots+x_1^{(3,\varepsilon_1)}s_{\varepsilon_1})-(\alpha_1^{(1,3)}s_1+\alpha_1^{(2,3)}s_2)+\sum_{i=1}^{\varepsilon_2}\mu_{3i}u_i\Big\}s_3+$$

$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$+\Big\{dx_3^{(\varepsilon_1)}-\sum_{i=1}^{\varepsilon_1}x_1^{(i,\varepsilon_1)}s_i-\sum_{1\leq i<\varepsilon_1}\alpha_1^{(i,\varepsilon_1)}s_i+\sum_{i=1}^{\varepsilon_2}\mu_{\varepsilon_1 i}u_i\Big\}s_{\varepsilon_1}+$$

$$+\sum_{i<j}dx_1^{(i,j)}s_is_j+\sum_{i=1}^{\varepsilon_1}dx_1^{(i,i)}s_i^{(2)}+\sum_{k=1}^{\varepsilon_2}\Big\{dx_2^{(k)}+\sum_{i=1}^{\varepsilon_1}\mu_{ik}s_i\Big\}u_k-\sum_{k=1}^{\varepsilon_1}x_3^{(k)}s_k+$$

$$+\sum_{k=1}^{\varepsilon_2}x_2^{(k)}u_k-\sum_{i=1}^{c}\alpha_1^{(i)}v_i-\sum_{i<j}\alpha_1^{(i,j)}\omega_{ij}\,.$$

$dz=0 \Longrightarrow x_1^{(i,j)}\in Z_1$ pour $1\leq i\leq j\leq\varepsilon_1$ et comme les s_i sont linéairement indépendants sur $\mathcal{K}$ modulo B_1 (par (2.2) et (2.3)),

$$dx_2^{(k)}+\sum_{i=1}^{\varepsilon_1}\mu_{ik}s_i=0\Longrightarrow\mu_{ik}\in\mathfrak{m}$$

donc il existe $Q_{ik}\in E_1$ tel que $\mu_{ik}=dQ_{ik}$ pour $1\leq i\leq\varepsilon_1$, $1\leq k\leq\varepsilon_2$ et par suite $x_2^{(k)}+\sum_{i=1}^{\varepsilon_1}Q_{ik}s_i=z_2^{(k)}\in Z_2$ pour $k=1,\ldots,\varepsilon_2$.

L'hypothèse $H_1^2=0$ implique :

$$(***)\begin{cases}\alpha_1^{(i,j)}s_k=d\tau_k^{(i,j)} & \text{avec } \tau_k^{(i,j)}\in E_3 \quad 1\leq i<j\leq\varepsilon_1,\ k<j.\\ x_1^{(i,j)}s_k=dt_k^{(i,j)} & \text{avec } t_k^{(i,j)}\in E_3 \quad 1\leq i\leq j\leq\varepsilon_1,\ k\leq j.\end{cases}$$

En examinant les composantes sur les s_i, on obtient alors :

$$x_3^{(1)}-(t_1^{(1,1)}+t_2^{(1,2)}+t_3^{(1,3)}+\ldots+t_{\varepsilon_1}^{(1,\varepsilon_1)})+\sum_{i=1}^{\varepsilon_2}Q_{1i}u_i=z_3^{(1)}\in Z_3$$

$$x_3^{(2)}-(t_1^{(1,2)}+t_2^{(2,2)}+t_3^{(2,3)}+\ldots+t_{\varepsilon_1}^{(2,\varepsilon_1)})-\tau_1^{(1,2)}+\sum_i Q_{2i}u_i=z_3^{(2)}\in Z_3$$

$$x_3^{(3)}-(t_1^{(1,3)}+t_2^{(2,3)}+t_3^{(3,3)}+t_4^{(3,4)}+\ldots+t_{\varepsilon_1}^{(3,\varepsilon_1)})-(\tau_1^{(1,3)}+\tau_2^{(2,3)})+\sum_i Q_{3i}u_i=z_3^{(3)}\in Z_3$$

....

$$x_3^{(\varepsilon_1)} - \sum_{i=1}^{\varepsilon_1} t_i^{(i,\varepsilon_1)} - \sum_{1\leq i<\varepsilon_1} z_i^{(i,\varepsilon_1)} + \sum_i Q_{\varepsilon,i}\, u_i = Z_3^{(\varepsilon_1)} \in Z_3 .$$

Nous pouvons donc écrire l'expression de z sous la forme :

$$z = x_5 + \sum_{k=1}^{\varepsilon_1} Z_3^{(k)} S_k + \sum_{k=1}^{\varepsilon_2} z_2^{(k)} U_k + \sum_{i<j} x_1^{(i,j)} S_i S_j + \sum_{i=1}^{\varepsilon_1} x_1^{(i,i)} S_i^{(2)} +$$

$$\sum_{i,j} dQ_{ij}S_iU_j - \sum_{j=1}^{\varepsilon_2}\sum_{i=1}^{\varepsilon_1} (Q_{ij}s_iU_j + Q_{ij}u_jS_i) + \sum_{i=1}^{c} \alpha_1^{(i)} V_i + \sum_{i<j} \alpha_1^{(i,j)} V_{ij} +$$

$$+ \left(\sum_{i=1}^{\varepsilon_1} t_i^{(1,i)}\right) S_1$$

$$+ \left(t_1^{(1,2)} + \sum_{i=2}^{\varepsilon_1} t_i^{(2,i)} + z_1^{(1,2)}\right) S_2 +$$

....

$$+ \left(\sum_{i=1}^{\varepsilon_1} t_i^{(i,\varepsilon_1)} + \sum_{1\leq i<\varepsilon_1} z_i^{(i,\varepsilon_1)}\right) S_{\varepsilon_1} .$$

Comme $d(Q_{ij}S_iU_j) = dQ_{ij}S_iU_j - Q_{ij}\,(s_iU_j+S_iu_j)$ on peut faire apparaître le terme $d(\sum_{i,j} Q_{ij}S_iU_j) \in B_5(X^{(4)})$. De plus on observe que la somme des termes en $t_\alpha^{(\beta,\gamma)}S_\delta$ peut s'écrire :

$$\sum_{i=1}^{\varepsilon_1} t_i^{(i,i)} S_i + \sum_{1\leq i<j\leq \varepsilon_1} t_i^{(i,j)} S_j + \sum_{1\leq i<j\leq\varepsilon_1} t_j^{(i,j)} S_i .$$

a) On sait d'autre part que $\varepsilon_2 = \dim_{\mathbb{K}} H_2$, puisque $H_1^2 = 0$ [18] et comme les u_i, $i = 1,\dots,\varepsilon_2$ relèvent une base de l'espace vectoriel H_2, on a :

$$z_2^{(k)} \in Z_2 \Longrightarrow z_2^{(k)} = \sum_{j=1}^{\varepsilon_2} \lambda_j^{(k)} u_j + \alpha_2^{(k)} \quad \text{avec}$$

$$\lambda_j^{(k)} \in R \qquad 1\leq j\leq\varepsilon_2 \qquad k = 1,\dots,\varepsilon_2$$

$$\alpha_2^{(k)} \in B_2.$$

Or pour $j\neq k$, on sait que $u_jU_k = u_kU_j - d(U_kU_j)$; donc pour $j>k$, on peut remplacer u_jU_k par $u_kU_j - d(U_k.U_j)$ et par suite :

$$\sum_{k=1}^{\varepsilon_2} z_2^{(k)}U_k = \sum_{1\leq i\leq j\leq\varepsilon_2} \lambda'_{ij}u_iU_j - d\Big(\sum_{1\leq i<j\leq\varepsilon_2} \lambda_j^{(i)}\, U_iU_j\Big) + \sum_{k=1}^{\varepsilon_2} \alpha_2^{(k)}\, U_k$$

où l'on a posé $\lambda'_{ij} = \lambda_j^{(i)} + \lambda_i^{(j)}$ si $i<j$ et $\lambda'_{ii} = \lambda_i^{(i)}$.

b) D'une façon analogue, $x_1^{(i,j)} \in Z_1$ implique :

$$x_1^{(i,j)} = \sum_{k=1}^{\varepsilon_1} \lambda_{i,j}^{(k)} s_k + \gamma_1^{(i,j)} \quad \text{où} \quad \lambda_{ij}^{(k)} \in R,\ \gamma_1^{(i,j)} \in B_1$$

pour $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant \varepsilon_1$ et $k = 1,\dots,\varepsilon_1$. On a $\gamma_1^{(i,j)} = d\gamma_2^{(i,j)}$ avec $\gamma_2^{(i,j)} \in E_2$.
Mais pour, $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant \varepsilon_1$ et $p \leqslant j$, on déduit de (***) que :

$$x_1^{(i,j)} s_p = \sum_{k=1}^{\varepsilon_1} \lambda_{i,j}^{(k)} s_k s_p + d\gamma_2^{(i,j)}.s_p = dt_p^{(i,j)} \quad \text{mais} \quad s_k.s_p = d\omega_{kp}$$

aussi a-t-on :

$$\sum_{k=1}^{\varepsilon_1} \lambda_{ij}^{(k)} \omega_{kp} + \gamma_2^{(i,j)} s_p - t_p^{(i,j)} = z_p^{(i,j)} \in Z_3.$$

En reportant les expressions de $x_1^{(i,j)}$ et $t_p^{(i,j)}$ $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant \varepsilon_1$ $p \leqslant j$ dans z, on en déduit en utilisant (a) que :

$$z - \sum_L \lambda'_{ij} F_{ij} = x_5 - \sum_L \lambda'_{ij} f_{ij} - \sum_L \sum_I \lambda'_{ij} r'^{(i,j)}_{pq} s_p V_q + \sum_K \lambda'_{ij} u_i U_j +$$

$$+ \sum_L \sum_K \lambda'_{ij} \varphi_{pq}^{(i,j)} u_p U_q - d\Big(\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant \varepsilon_2} \lambda_j^{(i)} U_i U_j\Big) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\varepsilon_2} \alpha_2^{(k)} U_k + \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant \varepsilon_1} \sum_{k=1}^{\varepsilon_1} \lambda_{i,j}^{(k)} s_k S_i S_j + \sum_{i=1}^{\varepsilon_1} \sum_{k=1}^{\varepsilon_1} \lambda_{i,i}^{(k)} s_k S_i^{(2)} +$$

$$+ \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant \varepsilon_1} \gamma_1^{(i,j)} S_i S_j + \sum_{i=1}^{\varepsilon_1} \gamma_1^{(i,i)} S_i^{(2)} + \sum_{k=1}^{\varepsilon_3} z_3^{(k)} S_k + d\Big(\sum_{i,j} Q_{ij} S_i U_j\Big) +$$

$$+ \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant \varepsilon_1} \sum_{k=1}^{\varepsilon_1} \lambda_{ij}^{(k)} \omega_{ki} S_j + \sum_{i<j} \gamma_2^{(i,j)} s_i S_j - \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant \varepsilon_1} z_i^{(i,j)} S_j +$$

$$+ \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant \varepsilon_1} \sum_{k=1}^{\varepsilon_1} \lambda_{ij}^{(k)} \omega_{kj} S_i + \sum_{i<j} \gamma_2^{(i,j)} s_j S_i - \sum_{i<j} z_j^{(i,j)} S_i +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\varepsilon_1} \sum_{k=1}^{\varepsilon_1} \lambda_{ii}^{(k)} \omega_{ki} S_i + \sum_i \gamma_2^{(i,i)} s_i S_i - \sum_{i=1}^{\varepsilon_1} z_i^{(i,i)} S_i +$$

$$+ \tau_1^{(1,2)} S_2 + \dots + \Big(\sum_{1 \leqslant i<\varepsilon_1} \tau_i^{(i,\varepsilon_1)}\Big) S_{\varepsilon_1} + \sum_{i=1}^{c} \alpha_1^{(i)} V_i + \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant \varepsilon_1} \alpha_1^{(i,j)} V_{ij}.$$

Mais on note que :

$$d\Big(\sum_i \gamma_2^{(i,i)}\, s_i^{(2)}\Big) = \sum_i \gamma_1^{(i,i)}\, s_i^{(2)} + \sum_i \gamma_2^{(i,i)}\, s_i\, S_i \quad \text{et l'on a}$$

déjà vu (Remarque 3.2) que

$$d\Big(\sum_{i<j} \gamma_2^{(i,j)} s_i S_j\Big) = \sum_{i<j} d\gamma_2^{(i,j)} s_i S_j + \gamma_2^{(i,j)} s_i S_j + \gamma_2^{(i,j)} s_j S_i \quad \text{pour } 1 \leq i < j \leq \varepsilon_1 .$$

Examinons maintenant séparément le terme :

$$\tau_1^{(1,2)} S_2 + (\tau_1^{(1,3)} + \tau_2^{(2,3)}) S_3 + \ldots + \Big(\sum_{1 \leq i < \varepsilon_1} \tau_i^{(i,\varepsilon_1)}\Big) S_{\varepsilon_1} + \sum_{1 \leq i<j \leq \varepsilon_1} \alpha_1^{(i,j)}\, V_{ij} .$$

Comme $\alpha_1^{(i,j)} \in Z_1$, on a pour $1 \leq i < j \leq \varepsilon_1$:

$$\alpha_1^{(i,j)} = \sum_{k=1}^{\varepsilon_1} A_{ij}^{(k)}\, s_k + dB_2^{(i,j)} \quad \text{avec } A_{i,j}^{(k)} \in R,\ B_2^{(i,j)} \in E_2 .$$

De plus, $s_k\, V_{ij} = d(S_k . V_{ij}) - S_k\, (\omega_{ij} + s_i S_j)$ $k = 1, \ldots, \varepsilon_1$ et

$dB_2^{(i,j)}\, V_{ij} = d(B_2^{(i,j)}\, V_{ij}) - B_2^{(i,j)}\, (\omega_{ij} + s_i S_j)$ (Lemme 2.5).

La relation (***) donne :

$$\alpha_1^{(i,j)}\, s_p = d\tau_p^{(i,j)} = \sum_{k=1}^{\varepsilon_1} A_{i,j}^{(k)}\, d\omega_{kp} + d(B_2^{(i,j)}\, s_p) \quad \text{et par suite :}$$

$$\tau_p^{(i,j)} = \sum_{k=1}^{\varepsilon_1} A_{i,j}^{(k)}\, \omega_{kp} + B_2^{(i,j)} . s_p + z_p^{(i,j)} \quad \text{avec } z_p^{(i,j)} \in Z_3 \quad \text{pour } 1 \leq i < j \leq \varepsilon_1$$

$1 \leq p < j$. A l'aide de ces égalités, on obtient d'une part :

$$\sum_{1 \leq i<j \leq \varepsilon_1} \alpha_1^{(i,j)}\, V_{ij} = \sum_{i<j} \sum_{k=1}^{\varepsilon_1} A_{ij}^{(k)}\, d(S_k V_{ij}) - \sum_{i<j} \sum_{k=1}^{\varepsilon_1} A_{i,j}^{(k)}\, (\omega_{ij}\, S_k + s_i S_j S_k) +$$

$$+ \sum_{i<j} d(B_2^{(i,j)}\, V_{ij}) - \sum_{i<j} B_2^{(i,j)}\, \omega_{ij} - \sum_{i<j} B_2^{(i,j)} s_i S_j \ ;$$

d'autre part :

$$\sum_{1 \leq i<j \leq \varepsilon_1} \tau_i^{(i,j)}\, S_j = \sum_{1 \leq i<j \leq \varepsilon_1} \Big(\sum_{k=1}^{\varepsilon_1} A_{i,j}^{(k)}\, \omega_{ki}\, S_j + B_2^{(i,j)}\, s_i S_j + z_i^{(i,j)} S_j\Big)$$

Mais la somme des termes en $A_{i,j}^{(k)}$ de :

$$\sum_{1 \leq i<j \leq \varepsilon_1} \tau_i^{(i,j)}\, S_j + \sum_{1 \leq i<j \leq \varepsilon_1} \alpha_1^{(i,j)}\, V_{ij} \quad \text{n'est autre que l'opposé de:}$$

$$\sum_{1\leq i<j\leq \varepsilon_1} \sum_{k=1}^{\varepsilon_1} A_{i,j}^{(k)} (s_i S_j S_k + \omega_{ij} S_k + \omega_{ik} S_j).$$ Comme on sait que

$S_i . S_i = 2.S_i^{(2)}$ ([16], p.16), on peut encore écrire cette somme sous la forme :

$$\sum_{1\leq i<j\leq \varepsilon_1} \sum_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{\varepsilon_1} A_{ij}^{(k)} (s_i S_j S_k + \omega_{ij} S_k + \omega_{ik} S_j) + 2 \sum_{1\leq i<j\leq \varepsilon_1} A_{i,j}^{(j)} (s_i S_j^{(2)} + \omega_{ij} S_j).$$

4.2. Remarque. - Pour $1\leq i\leq \varepsilon_1$, $1\leq j\leq \varepsilon_1$ et $j\neq i$, on a :

$$s_i S_j^{(2)} + \omega_{ij} S_j = d(S_i S_j^{(2)}) - S_i s_j S_j + \omega_{ij} S_j \quad \text{et}$$

$s_j S_i S_j + \omega_{ij} S_j$ est de la forme :

$s_\beta S_\alpha S_\gamma + \omega_{\beta\alpha} S_\gamma + \omega_{\beta\gamma} S_\alpha$ avec $1\leq \alpha<\gamma\leq \varepsilon_1$, $\beta = 1,\ldots, \varepsilon_1$. De plus $s_i S_i^{(2)} = d(S_i^{(3)})$ [16] p.16.

En utilisant alors les remarques (2.9) et (4.2), on peut écrire :

$$\sum_{1\leq i<j\leq \varepsilon_1} z_i^{(i,j)} S_j + \sum_{1\leq i<j\leq \varepsilon_1} \alpha_1^{(i,j)} V_{ij} =$$

$$\sum_{1\leq i<j\leq \varepsilon_1} z_i^{(i,j)} S_j - \sum_{1\leq i<j\leq \varepsilon_1} B_2^{(i,j)} \omega_{ij} + \sum_{\substack{1\leq i<k\leq \varepsilon_1\\ j=1,\ldots,\varepsilon_1\\ (i,j,k)\notin I_0}} A'^{(j)}_{i,k} (s_j S_i S_k + \omega_{ji} S_k + \omega_{jk} S_i) + a$$

où $A'^{(j)}_{i,k} \in R$ et $a \in B_5(X^{(4)})$. De la même façon, par (2.9 et 4.2), on voit que $z - \sum_L \lambda'_{ij} F_{ij}$ contient un terme de la forme :

$$\sum_{\substack{1\leq i<k\leq \varepsilon_1\\ j=1,\ldots,\varepsilon_1\\ (i,j,k)\notin I_0}} \lambda'^{(j)}_{ik} (s_j S_i S_k + \omega_{ji} S_k + \omega_{jk} S_i) \quad \text{où} \quad \lambda'^{(k)}_{ij} \in R.$$

Par suite, on a :

$$z - \sum_L \lambda'_{ij} F_{ij} - \sum_N \lambda'^{(j)}_{i,k} G_{i,j,k} = x_5 - \sum_L \lambda'_{ij} f_{ij} - \sum_N \lambda'^{(j)}_{i,k} g_{ijk} -$$

$$- \sum_L \sum_I \lambda'_{ij} r'^{(i,j)}_{pq} s_p V_q + \sum_K (\lambda'_{pq} + \sum_L \lambda'_{ij} \varphi^{(i,j)}_{pq}) u_p U_q + \sum_M \lambda'^{(j)}_{ik} \int \langle s_i, s_j, s_k \rangle +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\varepsilon_2} \alpha_2^{(k)} U_k - \sum_N \sum_I \lambda_{ik}^{!(j)} r_{pq}^{(i,j,k)} s_p V_q + \sum_N \sum_K \lambda_{i,k}^{!(j)} \varphi_{pq}^{(i,j,k)} u_p U_q +$$

$$+ \sum_N \sum_M \lambda_{i,k}^{!(j)} \rho_{pqr}^{(i,j,k)} \int \langle s_p, s_q, s_r \rangle - \sum_{1 \leq i < j \leq \varepsilon_1} B_2^{(i,j)} \omega_{ij} + \sum_{k=1}^{\varepsilon_1} Z_3^{(k)} S_k +$$

$$+ \sum_{i=1}^{c} \alpha_1^{(i)} V_i + \sum_{1 \leq i < j \leq \varepsilon_1} z_i^{(i,j)} S_j - \sum_{1 \leq i < j \leq \varepsilon_1} (Z_1^{(i,j)} S_j + Z_j^{(i,j)} S_i) -$$

$$- \sum_{i=1}^{\varepsilon_1} Z_i^{(i,i)} S_i + b \quad \text{avec} \quad b \in B_5(X^{(4)}).$$

c) Pour $i=1,\ldots,c$, les classes d'homologie des v_i constituent une base de l'espace vectoriel H_3 (Lemme 2.5 sous l'hypothèse $H_1 . H_2 = 0$) ; par conséquent, pour tout élément Z de Z_3, il existe des μ_i, éléments de R $(i=1,\ldots,c)$ tels que :

$$Z = \sum_{i=1}^{c} \mu_i v_i + d\alpha_4 \quad \text{avec} \quad \alpha_4 \in E_4 \ ;$$

et $ZS_k = \sum_{i=1}^{c} \mu_i v_i S_k + d\alpha_4 S_k$ peut encore s'écrire pour $k=1,\ldots,\varepsilon_1$

$$ZS_k = \sum_{i=1}^{c} \mu_i \, d(V_i S_k) - \sum_{i=1}^{c} \mu_i s_k V_i + d(\alpha_4 S_k) - \alpha_4 s_k .$$

On sait par ailleurs que $\alpha_1^{(i)} \in Z_1 \Longrightarrow \alpha_1^{(i)} = \sum_{k=1}^{\varepsilon_1} \mu_k^{(i)} s_k + \beta_1^{(i)}$ avec $\mu_k^{(i)} \in R$ et $\beta_1^{(i)} \in B_1$. Si alors on met la somme

$$\sum_{k=1}^{\varepsilon_1} Z_3^{(k)} S_k + \sum_{i<j} z_i^{(i,j)} S_j - \sum_{i<j} (Z_i^{(i,j)} S_j + Z_j^{(i,j)} S_i) - \sum_{i=1}^{\varepsilon_1} Z_i^{(i,i)} S_i$$

sous la forme $\sum_{i=1}^{\varepsilon_1} Z_i S_i$, on constate en prenant $Z = Z_i$ ci-dessus, que l'on fait apparaître une expression du genre :

$$\alpha_5 + \sum_{\substack{1 \leq i \leq \varepsilon_1 \\ 1 \leq j \leq c}} \mu_{ij} s_i V_j + \sum_{i=1}^{c} \beta_1^{(i)} V_i + b'$$

où $\alpha_5 \in E_5$, $\mu_{ij} \in R$, $b' \in B_5(X^{(4)})$. Mais alors, on a :

$$z' = z - \sum_J \mu_{ij} E_{ij} - \sum_L \lambda'_{ij} F_{ij} - \sum_N \lambda'^{(j)}_{ik} G_{ijk} =$$

$$x'_5 + \sum_{i=1}^{c} \beta_1^{(i)} v_i + \sum_{k=1}^{\varepsilon_2} \alpha_2^{(k)} u_k + \sum_I (\mu_{pq} + \sum_J \mu_{ij} r_{pq}^{(i,j)} - \sum_L \lambda'_{ij} r'^{(i,j)}_{pq} - \sum_N \lambda'^{(j)}_{i,k} r_{pq}^{(i,j,k)}) s_p V_q +$$

$$+ \sum_K (\lambda'_{pq} + \sum_L \lambda'_{ij} \varphi_{pq}^{(i,j)} + \sum_N \lambda'^{(j)}_{i,k} \cdot \varphi_{pq}^{(i,j,k)}) \, u_p U_q +$$

$$+ \sum_M (\lambda'^{(q)}_{p,r} + \sum_N \lambda'^{(j)}_{i,k} \; \rho_{p,q,r}^{(i,j,k)}) \int \langle s_p, s_q, s_r \rangle + B ,$$

avec $B \in B_5(X^{(4)})$ et $x'_5 \in E_5$. Comme z' est de la forme $\xi + B$, la condition $dz' = 0$ implique $d\xi = 0$ et par suite $\xi \in B_5(X^{(4)}) + Z_5$ d'après la remarque (3.2), ce qui achève la démonstration du lemme (4.1) compte tenu de (3.1).

4.3. Lemme. -

$$Z_5(X^{(4)}) = B_5(X^{(4)}) + Z'_5(E) + \sum_{(i,j)\in J} RE_{ij} + \sum_{(i,j)\in L} RF_{ij} + \sum_{(i,j,k)\in N} RG_{i,j,k} ,$$

où $Z'_5(E)$ est un sous R-module de $Z_5(E)$ engendré par des cycles de E_5 dont les classes d'homologie constituent une base de H_5 modulo $\tilde{H}_5$.

Preuve. - On remarque d'abord que $Z_1 \cdot Z_4 \subset B_5(X^{(4)})$ et $Z_2 \cdot Z_3 \subset B_5(X^{(4)})$ car si $x \in Z_1$, on a $x = \sum_{i=1}^{\varepsilon_1} \lambda_i s_i + dx'$ avec $\lambda_i \in R$, $x' \in E_2$. Pour $y \in Z_4$, on a :

$$x.y = (\sum_{i=1}^{\varepsilon_1} \lambda_i \, dS_i) y + dx'.y \quad \text{et}$$

$$x.y = d(\sum_{i=1}^{\varepsilon_1} \lambda_i S_i y + x'y) \in B_5(X^{(4)}).$$ De même $Z_2 \cdot Z_3 \subset B_5(X^{(4)})$.

Soient $\xi_1, \ldots, \xi_p$ des cycles de E_5 dont les classes d'homologie constituent une base de H_5 modulo $\tilde{H}_5$.

Soit $z \in Z_5(X^{(4)})$; d'après le lemme (4.1), il existe $\xi \in Z_5(E)$,

$\xi' \in \sum_J RE_{ij} + \sum_L RF_{ij} + \sum_N RG_{i,j,k}$, $B \in B_5(X^{(4)})$ tels que $z = \xi + \xi' + B$;

mais on sait que ξ peut se décomposer sous la forme $\xi = \sum_{i=1}^{p} \mu_i \xi_i + a_5 + b_5$ où $\mu_i \in R$ pour $i=1,\ldots,p$, $a_5 \in \langle Z_1, Z_1, Z_2 \rangle + \langle Z_1, Z_2, Z_1 \rangle$ et $b_5 \in B_5$. Il suffit alors de prouver que :

$\langle Z_1,Z_1,Z_2\rangle \subset B_5(X^{(4)})$ et $\langle Z_1,Z_2,Z_1\rangle \subset B_5(X^{(4)})$

or $H_1.H_2 = 0 \Longrightarrow s_j u_k = da_{jk}$ avec $a_{jk} \in E_4$ pour $1 \leq j \leq \varepsilon_1$, $1 \leq k \leq \varepsilon_2$ (utiliser par exemple la remarque 2.7 avec $I = \emptyset$). Comme par (2.5), on sait que $s_i.s_j = d\omega_{ij}$, posons :

$$\langle s_i,s_j,u_k\rangle = s_i\, a_{jk} + \omega_{ij}\, u_k \quad \text{et}$$

$$\langle s_i,u_j,s_k\rangle = -s_i\, a_{kj} - a_{ij}\, s_k.$$ On observe comme dans la remarque (2.8) que tout élément de $\langle Z_1,Z_1,Z_2\rangle$ (resp. de $\langle Z_1,Z_2,Z_1\rangle$) peut s'écrire modulo B_5 comme somme d'un terme de $Z_1.Z_4 + Z_2.Z_3$ et d'une combinaison R-linéaire de $\langle s_i,s_j,u_k\rangle$ (resp. comme somme d'un terme $Z_1.Z_4$ et d'une combinaison linéaire de $\langle s_i,u_j,s_k\rangle$). Or il est facile de vérifier que :

$$d(s_j S_i U_k + S_i a_{jk} - \omega_{ij} U_k) = s_i a_{jk} + \omega_{ij} u_k$$

$$d(u_j S_i S_k - a_{kj} S_i - a_{ij} S_k) = -(s_i a_{kj} + a_{ij} s_k) \quad \text{si} \quad k \neq i$$

et $d(u_j S_i^{(2)} - a_{ij} S_i) = -s_i a_{ij}$.

§.5. Un système générateur minimal de $H_5(X^{(4)})$ lorsque $H_1^2 = H_1.H_2 = 0$

Soient $\xi_1,\dots,\xi_p$ des cycles de Z_5 dont les classes d'homologie donnent une base de H_5 modulo $\widetilde{H}_5$. Nous allons dans ce paragraphe démontrer le lemme suivant :

<u>5.1. Lemme.</u> - <u>Les cycles</u> ξ_i $i = 1,\dots,p$; E_{ij} $(i,j) \in J$; F_{ij} $(i,j) \in L$ <u>et</u> $G_{i,j,k}$ $(i,j,k) \in N$ <u>sont linéairement indépendants sur</u> $\mathbb{K}$ <u>modulo</u> $B_5(X^{(4)})$.

En utilisant alors (2.2) (2.6) (4.3) et la formule $\varepsilon_5 = \dim_{\mathbb{K}} H_5(X^{(4)})$ (cf. 2.1), ce dernier lemme termine la preuve du théorème annoncé dans l'introduction.

Soit $x = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \xi_i + \sum_J \beta_{ij} E_{ij} + \sum_L \gamma_{ij} F_{ij} + \sum_N \delta_{ijk}\, G_{ijk} \in B_5(X^{(4)})$

où les coefficients $\alpha_i, \beta_{ij}, \gamma_{ij}, \delta_{ijk}$ sont dans R; prouvons que les $\alpha_i, \beta_{ij}, \gamma_{ij}, \delta_{ijk}$ appartiennent à $\mathfrak{m}$. Pour cela, calculons

$$x - \sum_J \beta_{ij} E_{ij} - \sum_L \gamma_{ij} F_{ij} - \sum_N \delta_{ijk} G_{ijk} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \xi_i \in Z_5$$

où $x \in d(X_6^{(4)})$.

Avec des notations évidentes compte tenu de la remarque (2.4), on sait que x est de la forme :

$$x = d(x_6 + \sum_{i=1}^{\varepsilon_1} x_4^{(i)} S_i + \sum_{i<j} x_2^{(i,j)} S_i S_j + \sum_{i=1}^{\varepsilon_1} x_2^{(i,i)} S_i^{(2)} + \sum_{1\le i<j<k\le\varepsilon_1} \lambda_{ijk} S_i S_j S_k +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\varepsilon_1} \mu_i S_i^{(3)} + \sum_{i\neq j} a_{ij} S_i S_j^{(2)} + \sum_{i=1}^{\varepsilon_2} x_3^{(i)} U_i + \sum_{i=1}^{\varepsilon_1} \sum_{j=1}^{\varepsilon_2} y_1^{(i,j)} S_i U_j +$$

$$+ \sum_{1\le i<j\le\varepsilon_2} b_{ij} U_i U_j + \sum_{k=1}^{\varepsilon_3} z_2^{(k)} V_k + \sum_{j=1}^{\varepsilon_1} \sum_{k=1}^{\varepsilon_3} c_{jk} S_j V_k).$$

Comme les règles de dérivation de [16] donnent :

$$d(S_i S_j S_k) = s_i S_j S_k + s_j S_i S_k + s_k S_i S_j \quad \text{pour} \quad 1\le i<j<k\le\varepsilon_1$$

$$d(U_i U_j) = u_i U_j - u_j U_i \quad \text{pour} \quad 1\le i<j\le\varepsilon_2$$

$$d(S_i . S_j^{(2)}) = s_i S_j^{(2)} + s_j S_i . S_j \quad 1\le i,j\le\varepsilon_1 \quad i\neq j ,$$

Si l'on commence par développer l'expression de x, on obtient d'abord :

$$x = dx_6 + \sum_{i=1}^{\varepsilon_1} (dx_4^{(i)} S_i + x_4^{(i)} s_i) + \sum_{1\le i<j\le\varepsilon_1} \left[dx_2^{(i,j)} S_i S_j + x_2^{(i,j)} (s_i S_j + s_j S_i)\right] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\varepsilon_1} (dx_2^{(i,i)} S_i^{(2)} + x_2^{(i,i)} s_i S_i) + \sum_{1\le i<j<k\le\varepsilon_1} \lambda_{ijk} (s_i S_j S_k + s_j S_i S_k + s_k S_i S_j) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\varepsilon_1} \mu_i s_i S_i^{(2)} + \sum_{i\neq j} a_{ij} (s_i S_j^{(2)} + s_j S_i S_j) + \sum_{i=1}^{\varepsilon_2} dx_3^{(i)} U_i - \sum_{i=1}^{\varepsilon_2} x_3^{(i)} u_i +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\varepsilon_1} \sum_{j=1}^{\varepsilon_2} \left[dy_1^{(i,j)} S_i U_j - y_1^{(i,j)} (s_i U_j + S_i u_j)\right] + \sum_{1\le i<j\le\varepsilon_2} b_{ij} (u_i U_j - u_j U_i) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\varepsilon_3} dz_2^{(k)} V_k + \sum_{j=1}^{\varepsilon_1} \sum_{k=1}^{\varepsilon_3} c_{jk} (s_j . V_k + S_j . v_k) + \sum_{k=1}^{\varepsilon_3} z_2^{(k)} v_k.$$

Sous les hypothèses $H_1^2 = H_1 . H_2 = 0$, par le lemme (2.5) et la remarque (2.6), on a $\varepsilon_3 = c + \binom{\varepsilon_1}{2}$ donc on peut écrire :

$$\sum_{k=1}^{\varepsilon_3} z_2^{(k)} v_k = \sum_{k=1}^{c} z_2^{(k)} v_k + \sum_{1\leq i<j\leq \varepsilon_1} z_2^{(i,j)} v_{ij},$$

puisque pour $k > c$, v_k est de la forme $v_{ij} = \omega_{ij} + s_i S_j$, z_k est de la forme $z_2^{(i,j)} \in E_2$ et $c_{\alpha k}$ de la forme $c_\alpha^{(i,j)} v_{ij}$ $1\leq\alpha\leq\varepsilon_1$, $1\leq i<j\leq \varepsilon_1$.
Après un calcul assez long, utilisant la relation $S_i . S_i = 2.S_i^{(2)}$, on obtient :

$$x = \Big\{ dx_4^{(1)} + x_2^{(1,1)} s_1 + x_2^{(1,2)} s_2 + x_2^{(1,3)} s_3 + \ldots + x_2^{(1,\varepsilon_1)} s_{\varepsilon_1} - \sum_{i=1}^{\varepsilon_2} y_1^{(1,i)} u_i$$

$$+ \sum_{i=1}^{c} c_{1i} v_i + \sum_{1\leq i<j\leq \varepsilon_1} c_1^{(i,j)} \omega_{ij} \Big\} S_1 +$$

$$\Big\{ dx_4^{(2)} + x_2^{(1,2)} s_1 + x_2^{(2,2)} s_2 + x_2^{(2,3)} s_3 + x_2^{(2,4)} s_4 + \ldots + x_2^{(2,\varepsilon_1)} s_{\varepsilon_1} - \sum_{i=1}^{\varepsilon_2} y_1^{(2,i)} u_i +$$

$$+ \sum_{i=1}^{c} c_{2i} v_i + \sum_{i<j} c_2^{(i,j)} \omega_{ij} + z_2^{(1,2)} s_1 \Big\} S_2 +$$

....

$$\Big\{ dx_4^{(\varepsilon_1)} + x_2^{(1,\varepsilon_1)} s_1 + x_2^{(2,\varepsilon_1)} s_2 + \ldots + x_2^{(\varepsilon_1-1,\varepsilon_1)} s_{\varepsilon_1-1} + x_2^{(\varepsilon_1,\varepsilon_1)} s_{\varepsilon_1} - \sum_{i=1}^{\varepsilon_2} y_1^{(\varepsilon_1,i)} u_i +$$

$$+ \sum_{i=1}^{c} c_{\varepsilon_1,i} v_i + \sum_{i<j} c_{\varepsilon_1}^{(i,j)} \omega_{ij} + \sum_{i=1}^{\varepsilon_1-1} z_2^{(i,\varepsilon_1)} s_i \Big\} S_{\varepsilon_1} +$$

$$+ (dx_2^{(1,1)} + \mu_1 s_1 + a_{21} s_2 + a_{31} s_3 + \ldots + a_{\varepsilon_1 1} s_{\varepsilon_1}) S_1^{(2)} +$$

$$+ (dx_2^{(2,2)} + a_{12} s_1 + \mu_2 s_2 + a_{32} s_3 + \ldots + a_{\varepsilon_1 2} s_{\varepsilon_1} + 2 c_2^{(1,2)} s_1) S_2^{(2)} +$$

$$+ \big[dx_2^{(3,3)} + a_{13} s_1 + a_{23} s_2 + \mu_3 s_3 + a_{43} s_4 + \ldots + a_{\varepsilon_1 3} s_{\varepsilon_1} + 2(c_3^{(1,3)} s_1 + c_3^{(2,3)} s_2)\big] S_3^{(2)} +$$

...

$$+ \Big[dx_2^{(\varepsilon_1,\varepsilon_1)} + a_{1\varepsilon_1} s_1 + a_{2\varepsilon_1} s_2 + \ldots + a_{\varepsilon_1-1,\varepsilon_1} s_{\varepsilon_1-1} + \mu_{\varepsilon_1} s_{\varepsilon_1} + 2 \sum_{i=1}^{\varepsilon_1-1} c_{\varepsilon_1}^{(i,\varepsilon_1)} s_i\Big] S_{\varepsilon_1}^{(2)} +$$

$$+ \big[dx_2^{(1,2)} + a_{21} s_1 + a_{12} s_2 + \lambda_{123} s_3 + \lambda_{124} s_4 + \ldots + \lambda_{12\varepsilon_1} s_{\varepsilon_1} + c_1^{(1,2)} s_1\big] S_1 S_2 +$$

$$+ \big[dx_2^{(1,3)} + a_{31} s_1 + \lambda_{123} s_2 + a_{13} s_3 + \lambda_{134} s_4 + \ldots + \lambda_{13\varepsilon_1} s_{\varepsilon_1} + (c_1^{(1,3)} s_1 + c_1^{(2,3)} s_2)\big] S_1 S_3 +$$

$$+ \big[dx_2^{(1,4)} + a_{41} s_1 + \lambda_{124} s_2 + \lambda_{134} s_3 + a_{14} s_4 + \lambda_{145} s_5 + \ldots + \lambda_{14\varepsilon_1} s_{\varepsilon_1} +$$

$$(c_1^{(1,4)}s_1+c_1^{(2,4)}s_2+c_1^{(3,4)}s_3)\big]S_1S_4 +$$

....

$$\Big[dx_2^{(1,\varepsilon_1)}+a_{\varepsilon_1,1}s_1+\lambda_{12\varepsilon_1}s_2+\lambda_{13\varepsilon_1}s_3+\ldots+\lambda_{1,\varepsilon_1-1,\varepsilon_1}\,s_{\varepsilon_1-1}+a_{1\varepsilon_1}\,s_{\varepsilon_1}+$$

$$+(\sum_{i=1}^{\varepsilon_1-1} c_1^{(i,\varepsilon_i)}\,s_i)\Big]\,S_1S_{\varepsilon_1}+$$

$$\Big[dx_2^{(2,3)}+\lambda_{123}s_1+a_{32}s_2+a_{23}s_3+\lambda_{234}s_4+\ldots+\lambda_{23\varepsilon_1}s_{\varepsilon_1}+$$

$$(c_3^{(1,2)}s_1+c_2^{(1,3)}s_1+c_2^{(2,3)}s_2)\Big]\,S_2S_3+$$

$$\Big[dx_2^{(2,4)}+\lambda_{124}s_1+a_{42}s_2+\lambda_{234}s_3+a_{24}s_4+\lambda_{245}s_5+\ldots+\lambda_{24\varepsilon_1}\,s_{\varepsilon_1}+$$

$$(c_2^{(1,4)}s_1+c_4^{(1,2)}s_1+c_2^{(2,4)}s_2+c_2^{(3,4)}s_3)\Big]\,S_2S_4+$$

....

$$\Big[dx_2^{(2,\varepsilon_1)}+\lambda_{12\varepsilon_1}s_1+a_{\varepsilon_1 2}s_2+\lambda_{23\varepsilon_1}s_3+\ldots+\lambda_{2,\varepsilon_1-1,\varepsilon_1}+a_{2\varepsilon_1}s_{\varepsilon_1}+$$

$$c_{\varepsilon_1}^{(1,2)}s_1+\sum_{i=1}^{\varepsilon_1-1} c_2^{(i,\varepsilon_1)}\,s_i\Big]\,S_2\,S_{\varepsilon_1}+$$

....

$$\Big[dx_2^{(\varepsilon_1-1,\varepsilon_1)}+\lambda_{1,\varepsilon_1-1,\varepsilon_1}s_1+\lambda_{2,\varepsilon_1-1,\varepsilon_1}s_2+\ldots+\lambda_{\varepsilon_1-2,\varepsilon_1-1,\varepsilon_1}s_{\varepsilon_1-2}+a_{\varepsilon_1,\varepsilon_1-1}s_{\varepsilon_1-1}+$$

$$+a_{\varepsilon_1-1,\varepsilon_1}\,s_{\varepsilon_1}+\sum_{i<\varepsilon_1} c_{\varepsilon_1-1}^{(i,\varepsilon_1)}s_i+\sum_{i<\varepsilon_1-1} c_{\varepsilon_1}^{i,\varepsilon_1-1}\,s_i\Big]S_{\varepsilon_1-1}S_{\varepsilon_1}+$$

$$+\Big\{dx_3^{(1)}-\sum_{i=1}^{\varepsilon_1} y_1^{(i,1)}\,s_i-\sum_{i=1}^{\varepsilon_2} b_{1i}u_i\Big\}\,U_1+$$

$$+\Big\{dx_3^{(2)}-\sum_{i=1}^{\varepsilon_1} y_1^{(i,2)}\,s_i+\big[b_{12}u_1-(b_{23}u_3+b_{24}u_4+\ldots+b_{2\varepsilon_2}u_{\varepsilon_2})\big]\,U_2+$$

$$+\Big\{dx_3^{(3)}-\sum_{i=1}^{\varepsilon_1} y_1^{(i,3)}\,s_i+\big[b_{13}u_1+b_{23}u_2-(b_{34}u_4+\ldots+b_{3\varepsilon_2}u_{\varepsilon_2})\big]\,U_3+$$

....

$$\Big\{dx_3^{(\varepsilon_2)}-\sum_{i=1}^{\varepsilon_1} y_1^{(i,\varepsilon_2)}\,s_i+\sum_{i=1}^{\varepsilon_2-1} b_{i\varepsilon_2}u_i\Big\}\,U_{\varepsilon_2}+\sum_{i,j} dy_1^{(i,j)}\,S_iU_j+$$

$$\sum_{k=1}^{\varepsilon_3} (dz_2^{(k)} + c_{1k}s_1 + c_{2k}s_2 + \dots + c_{\varepsilon_1,k}s_{\varepsilon_1}) \; V_k \; +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\varepsilon_1} x_4^{(i)} s_i + \sum_{k=1}^{c} z_2^{(k)} v_k - \sum_{i=1}^{\varepsilon_2} x_3^{(i)} u_i + \sum_{1 \leq i < j \leq \varepsilon_1} z_2^{(i,j)} \omega_{ij} + dx_6 \; .$$

5.2. Remarque. - Soit X_* une résolution minimale du corps résiduel $\mathcal{K}$ de R [5] [16].

$$(X.) \dots \to X_i \to X_{i-1} \to \dots \to X_2 \to X_1 \to X_0 \to \mathcal{K} \to 0$$

où $X_i = X_i^{(i)}$. Le calcul ci-dessus pourrait être utilisé pour étudier le 6ème module de syzygie $d[X_6]$ ([1] Déf. 2.4. p.51) car on a :

$$X_6 = X_6^{(6)} = X_6^{(4)} + \sum_{i=1}^{\varepsilon_4} E_1 W_i + \sum_{i=1}^{\varepsilon_5} R \mathfrak{X}_i \; .$$

Aussi est-il peut-être possible d'obtenir les nombres de Betti b_{p+6} dans des cas particuliers comme dans le cas du calcul de b_{p+5} dans [18].

Pour évaluer $\sum_{i=1} \alpha_i \xi_i = x - \sum_J \beta_{ij} E_{ij} - \sum_L \gamma_{ij} F_{ij} - \sum_N \delta_{ijk} \cdot G_{i,j,k}$, posons d'abord :

$$\beta'_{k,h} = \begin{cases} \beta_{kh} & \text{si } (k,h) \in J \\ -\sum_J \beta_{ij} r_{k,h}^{(i,j)} + \sum_L \gamma_{ij} r'^{(i,j)}_{k,h} + \sum_N \delta_{i,j,k} r_{k,h}^{(i,j,k)} & \text{si } (k,h) \in I \end{cases}$$

$$(****) \quad \gamma'_{k,h} = \begin{cases} \gamma_{k,h} & \text{si } (k,h) \in L \\ -\sum_L \gamma_{ij} \varphi_{k,h}^{(i,j)} - \sum_N \delta_{i,j,k} \varphi_{k,h}^{(i,j,k)} & \text{si } (k,h) \in K \end{cases}$$

$$\delta'_{h,k,\ell} = \begin{cases} \delta_{h,k,\ell} & \text{si } (h,k,\ell) \in N \\ -\sum_N \delta_{i,j,k} \rho_{h,k,\ell}^{(i,j,k)} & \text{si } (h,k,\ell) \in M. \end{cases}$$

Il vient alors :

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \xi_i = x - \sum_J \beta_{ij} \ell_{ij} - \sum_J \beta_{ij} s_i V_j + \sum_J \sum_I \beta_{ij} r_{pq}^{(i,j)} s_p V_q - \sum_L \gamma_{ij} f_{ij} -$$

$$- \sum_L \sum_I \gamma_{ij} r'^{(i,j)}_{pq} s_p V_q - \sum_L \gamma_{ij} u_i U_j + \sum_L \sum_K \gamma_{ij} \varphi_{pq}^{(i,j)} u_p U_q - \sum_N \delta_{ijk} g_{ijk} -$$

$$-\sum_{N}\sum_{I}\delta_{ijk}\, r_{pq}^{(i,j,k)}\, s_p V_q + \sum_{N}\sum_{K}\delta_{ijk}\, \varphi_{pq}^{(i,j,k)}\, u_p U_q -$$

$$-\sum_{N}\delta_{ijk}\,(s_j S_i S_k + \omega_{ji} S_k + \omega_{jk} S_i) + \sum_{N}\sum_{M}\delta_{ijk}\,\rho_{pqr}^{(i,j,k)}\,(s_q S_p S_r + \omega_{qp} S_r + \omega_{qr} S_p)$$

On trouve en utilisant l'expression de x ci-dessus :

$$\sum_{i=1}^{p}\alpha_i \xi_i = dx_6 + \sum_{i=1}^{\varepsilon_1} x_4^{(i)} s_i + \sum_{k=1}^{c} z_2^{(k)} v_k + \sum_{1\leq i<j\leq \varepsilon_1} z_2^{(i,j)}\omega_{ij} - \sum_{i=1}^{\varepsilon_2} x_3^{(i)} u_i -$$

$$-\sum_{J}\beta_{ij} e_{ij} - \sum_{L}\gamma_{ij} f_{ij} - \sum_{N}\delta_{ijk} g_{ijk} +$$

$$+\Big\{dx_4^{(1)} + x_2^{(1,1)} s_1 + x_2^{(1,2)} s_2 + x_2^{(1,3)} s_3 + \ldots + x_2^{(1,\varepsilon_1)} s_{\varepsilon_1} - \sum_{i=1}^{\varepsilon_2} y_1^{(1,i)} u_i + \sum_{i=1}^{c} c_{1i} v_i + A_1\Big\} S_1$$

$$+\Big\{dx_4^{(2)} + x_2^{(1,2)} s_1 + x_2^{(2,2)} s_2 + x_2^{(2,3)} s_3 + x_2^{(2,4)} s_4 + \ldots + x_2^{(2,\varepsilon_1)} s_{\varepsilon_1} - \sum_{i=1}^{\varepsilon_2} y_1^{(2,i)} u_i +$$

$$+\sum_{i=1}^{c} c_{2i} v_i + A_2 + z_2^{(1,2)} s_1\Big\} S_2 +$$

$+\ldots$

$$+\Big\{dx_4^{(\varepsilon_1)} + \sum_{1\leq i\leq \varepsilon_1} x_2^{(i,\varepsilon_1)} s_i - \sum_{i=1}^{\varepsilon_2} y_1^{(\varepsilon_1,i)} u_i + \sum_{i=1}^{c} c_{\varepsilon_1,i} v_i + A_{\varepsilon_1} + \sum_{i=1}^{\varepsilon_1-1} z_2^{(i,\varepsilon_1)} s_i\Big\} S_{\varepsilon_1} +$$

$$(dx_2^{(1,1)} + \mu_1 s_1 + a_{21} s_2 + a_{31} s_3 + \ldots + a_{\varepsilon_1,1} s_{\varepsilon_1})\; S_1^{(2)} +$$

$$(dx_2^{(2,2)} + a_{12} s_1 + \mu_2 s_2 + a_{32} s_3 + \ldots + a_{\varepsilon_1 2} s_{\varepsilon_1} + 2\, c_2^{(1,2)} . s_1)\; S_2^{(2)} +$$

$$\Big\{(dx_2^{(3,3)} + a_{13} s_1 + a_{23} s_2 + \mu_3 s_3 + a_{43} s_4 + \ldots + a_{\varepsilon_1 3} s_{\varepsilon_1} + 2(c_3^{(1,3)} s_1 + c_3^{(2,3)} s_2)\Big\} S_3^{(2)}$$

$+\ldots$

$$+\Big[dx_2^{(\varepsilon_1,\varepsilon_1)} + a_{1\varepsilon_1} s_1 + a_{2\varepsilon_1} s_2 + \ldots + a_{\varepsilon_1-1,\varepsilon_1} s_{\varepsilon_1-1} + \mu_{\varepsilon_1} s_{\varepsilon_1} + 2\sum_{1\leq i<\varepsilon_1} c_{\varepsilon_1}^{(i,\varepsilon_1)} s_i\Big]\; S_{\varepsilon_1}^{(2)} +$$

$$\Big[dx_2^{(1,2)} + (a_{21} - \delta'_{112}) s_1 + (a_{12} - \delta'_{122}) s_2 + (\lambda_{123} - \delta'_{132}) s_3 + (\lambda_{124} - \delta'_{142}) s_4 +$$

$$+\ldots + (\lambda_{12\varepsilon_1} - \delta'_{1\varepsilon_1 2}) s_{\varepsilon_1} + c_1^{(1,2)} s_1\Big] S_1 S_2 +$$

$$\Big[dx_2^{(1,3)} + (a_{31} - \delta'_{113}) s_1 + \lambda_{123} s_2 + (a_{13} - \delta'_{133}) s_3 + (\lambda_{134} - \delta'_{143}) s_4 +$$

$$+\dots+(\lambda_{13\varepsilon_1}-\delta'_{1\varepsilon_1 3})\, s_{\varepsilon_1}+c_1^{(1,3)}s_1+c_1^{(2,3)}s_2\Big]\, S_1S_3 +$$

$$\Big[dx_2^{(1,4)}+(a_{41}-\delta'_{114})s_1+\lambda_{124}s_2+\lambda_{134}s_3+(a_{14}-\delta'_{144})s_4+(\lambda_{145}-\delta'_{154})s_4+$$

$$+\dots+(\lambda_{14\varepsilon_1}-\delta'_{1\varepsilon_1 4})s_{\varepsilon_1}+c_1^{(1,4)}s_1+c_1^{(2,4)}s_2+c_1^{(3,4)}s_3)\Big]\, S_1S_4$$

$+\dots$

$$\Big[dx_2^{(1,\varepsilon_1)}+(a_{\varepsilon_1,1}-\delta'_{11\varepsilon_1})s_1+\lambda_{12\varepsilon_1}s_2+\dots+\lambda_{1,\varepsilon_1-1,\varepsilon_1}s_{\varepsilon_1-1}+(a_{1\varepsilon_1}-\delta'_{1\varepsilon_1,\varepsilon_1})s_{\varepsilon_1}+$$

$$+\sum_{i=1}^{\varepsilon_1-1} c_1^{(i,\varepsilon_1)}\, s_i\Big]\, S_1S_{\varepsilon_1}+$$

$$\Big[dx_2^{(2,3)}+(\lambda_{123}-\delta'_{213})s_1+(a_{32}-\delta'_{223})s_2+(a_{23}-\delta'_{233})s_3+\dots+(\lambda_{23\varepsilon_1}-\delta'_{2\varepsilon_1 3})s_{\varepsilon_1}+$$

$$+(c_3^{(1,2)}s_1+c_2^{(1,3)}s_1+c_2^{(2,3)}s_2)\Big]\, S_2S_3+$$

$+\dots$

$$\Big[dx_2^{(2,\varepsilon_1)}+(\lambda_{12\varepsilon_1}-\delta'_{21\varepsilon_1})s_1+(a_{\varepsilon_1 2}-\delta'_{22\varepsilon_1})s_2+\lambda_{23\varepsilon_1}s_3+\dots+\lambda_{2,\varepsilon_1-1,\varepsilon_1}s_{\varepsilon_1-1}+$$

$$(a_{2\varepsilon_1}-\delta'_{2\varepsilon_1\varepsilon_1})s_{\varepsilon_1}+c_{\varepsilon_1}^{(1,2)}s_1+\sum_{i=1}^{\varepsilon_1-1} c_2^{(i,\varepsilon_1)}s_i\Big]\, S_2S_{\varepsilon_1}+$$

$+\dots$

$$\Big[dx_2^{(\varepsilon_1-1,\varepsilon_1)}+(\lambda_{1,\varepsilon_1-1,\varepsilon_1}-\delta'_{\varepsilon_1-1,1,\varepsilon_1})s_1+(\lambda_{2,\varepsilon_1-1,\varepsilon_1}-\delta'_{\varepsilon_1-1,2,\varepsilon_1})s_2+$$

$$+\dots+\lambda_{\varepsilon_1-2,\varepsilon_1-1,\varepsilon_1}\, s_{\varepsilon_1-2}+$$

$$+(a_{\varepsilon_1,\varepsilon_1-1}-\delta'_{\varepsilon_1-1,\varepsilon_1-1,\varepsilon_1})\quad s_{\varepsilon_1-1}+(a_{\varepsilon_1-1,\varepsilon_1}-\delta'_{\varepsilon_1-1,\varepsilon_1,\varepsilon_1})s_{\varepsilon_1}+$$

$$+\sum_{i=1}^{\varepsilon_1-1} c_{\varepsilon_1-1}^{(i,\varepsilon_1)}\, s_i+\sum_{i=1}^{\varepsilon_1-2} c_{\varepsilon_1}^{(i,\varepsilon_1-1)}\, s_i\Big]\; S_{\varepsilon_1-1}\, S_{\varepsilon_1}+$$

$$+\Big\{dx_3^{(1)}-\sum_{i=1}^{\varepsilon_1} y_1^{(i,1)}s_i-(b_{12}u_2+b_{13}u_3+\dots+b_{1\varepsilon_2}u_{\varepsilon_2})\Big\}\, U_1+$$

$$\Big\{dx_3^{(2)}-\sum_{i=1}^{\varepsilon_1} y_1^{(i,2)}s_i+\Big[(b_{12}-\gamma'_{12})u_1-(b_{23}u_3+b_{24}u_4+\dots+b_{2\varepsilon_2}u_{\varepsilon_2})\Big]\Big\}\, U_2+$$

$$\left\{ dx_3^{(3)} - \sum_{i=1}^{\varepsilon_1} y_1^{(i,3)} s_i + \left[(b_{13} - \gamma'_{13})u_1 + (b_{23} - \gamma'_{23})u_2 - (b_{34}u_4 + \ldots + b_{3\varepsilon_2}u_{\varepsilon_2})\right]\right\} U_3 +$$

...

$$\left\{ dx_3^{(\varepsilon_2)} - \sum_{i=1}^{\varepsilon_1} y_1^{(i,\varepsilon_2)} s_i + \left[(b_{1\varepsilon_2} - \gamma'_{1\varepsilon_2})u_1 + \ldots + (b_{\varepsilon_2-1,\varepsilon_2} - \gamma'_{\varepsilon_2-1,\varepsilon_2})u_{\varepsilon_2}\right]\right\} U_{\varepsilon_2} +$$

$$+ \sum_{i,j} dy_1^{(i,j)} s_i U_j + \sum_{k=1}^{c} \left[dz_2^{(k)} + (c_{1k} - \beta'_{1k})s_1 + (c_{2k} - \beta'_{2k})s_2 +\right.$$

$$\left. + \ldots + (c_{\varepsilon_1 k} - \beta'_{\varepsilon_1 k})s_{\varepsilon_1}\right] V_k + \sum_{k=c+1}^{\varepsilon_3} (dz_2^{(k)} + c_{1k}s_1 + c_{2k}s_2 + \ldots + c_{\varepsilon_1 k}\, s_{\varepsilon_1})\, V_k \;;$$

où l'on a posé :

$$A_1 = \sum_{1<j\leq \varepsilon_1} (c_1^{(i,j)} - \delta'_{11j})\omega_{1j} + \sum_{2<j\leq\varepsilon_1} (c_1^{(2,j)} + \delta'_{1j2})\omega_{2j} +$$

$$+ \ldots + (c_1^{(\varepsilon_1-1,\varepsilon_1)} + \delta'_{1,\varepsilon_1,\varepsilon_1-1})\omega_{\varepsilon_1-1,\varepsilon_1}$$

$$A_2 = (c_2^{(1,2)} + \delta'_{122})\,\omega_{12} + \sum_{2<j\leq\varepsilon_1} (c_2^{(1,j)} + \delta'_{1j2} - \delta'_{21j})\,\omega_{1j} + \sum_{2<j\leq\varepsilon_1} (c_2^{(2,j)} - \delta'_{22j})\omega_{2j} +$$

$$+ \sum_{3<j} (c_2^{(3,j)} + \delta'_{2j3})\omega_{3j} + \ldots + (c_2^{(\varepsilon_1-1,\varepsilon_1)} + \delta_{2,\varepsilon_1,\varepsilon_1-1})\,\omega_{\varepsilon_1-1,\varepsilon_1}$$

...

$$A_{\varepsilon_1} = (c_{\varepsilon_1}^{(1,2)} - \delta'_{21\varepsilon_1})\,\omega_{12} + (c_{\varepsilon_1}^{(1,3)} - \delta'_{31\varepsilon_1})\,\omega_{13} + \ldots + (c_{\varepsilon_1}^{(1,\varepsilon_1-1)} - \delta'_{\varepsilon_1-1,1,\varepsilon_1})\omega_{1\varepsilon_1-1} +$$

$$+ (c_{\varepsilon_1}^{(1,\varepsilon_1)} + \delta'_{1\varepsilon_1\varepsilon_1})\omega_{1\varepsilon_1} + (c_{\varepsilon_1}^{(2,3)} - \delta'_{32\varepsilon_1})\,\omega_{23} + \ldots + (c_{\varepsilon_1}^{(2,\varepsilon_1-1)} - \delta'_{\varepsilon_1-1,2,\varepsilon_1})\omega_{2\varepsilon_1-1} +$$

$$+ (c_{\varepsilon_1}^{(2,\varepsilon_1)} + \delta'_{2\varepsilon_1\varepsilon_1})\,\omega_{2\varepsilon_1} + \ldots + (c_{\varepsilon_1}^{(\varepsilon_1-1,\varepsilon_1)} + \delta'_{\varepsilon_1-1,\varepsilon_1,\varepsilon_1})\omega_{\varepsilon_1-1,\varepsilon_1} \,.$$

Comme $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i\, \xi_i \in E_5$, les coefficients de chacune des variables doivent être nuls et l'on a :

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i\, \xi_i = dx_6 + \sum_{i=1}^{\varepsilon_1} x_4^{(i)}\, s_i + \sum_{k=1}^{c} z_2^{(k)}\, v_k + \sum_{i<j} z_2^{(i,j)}\,\omega_{ij} - \sum_{i=1}^{\varepsilon_2} x_3^{(i)}\, u_i \, -$$

$$- \sum_{J} \beta_{ij} e_{ij} - \sum_{L} \gamma_{ij} f_{ij} - \sum_{N} \delta_{ijk} g_{ijk} \, .$$

1) Composantes sur les V_k

On a $dz_2^{(k)} + \sum_{i=1}^{\varepsilon_1} (c_{ik} - \beta'_{ik}) s_i = 0$ pour $k=1,\dots,c$

et $dz_2^{(k)} + \sum_{i=1}^{\varepsilon_1} c_{ik} s_i = 0$ pour $c < k \leq \varepsilon_3$.

Comme les s_i $i=1,\dots,\varepsilon_1$ relèvent une base de H_1, on doit avoir :

$$c_{ik} - \beta'_{ik} \in \mathfrak{m} \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq \varepsilon_1,\ 1 \leq k \leq c$$

et $c_{\alpha k} \in \mathfrak{m}$ pour $1 \leq \alpha \leq \varepsilon_1$ $c < k \leq \varepsilon_3$ et dans ce cas $c_{\alpha k}$ est de la forme $c_\alpha^{(i,j)}$ $1 \leq i < j \leq \varepsilon_1$. Il existe par conséquent des éléments Δ'_{ik} $1 \leq i \leq \varepsilon_1$, $1 \leq k \leq c$ et $\Delta_\alpha^{(i,j)}$ $1 \leq \alpha \leq \varepsilon_1$ $1 \leq i < j \leq \varepsilon_1$, appartenant à E_1, et tels que :

$$c_{ik} - \beta'_{ik} = d\,\Delta'_{ik}$$

$$c_\alpha^{(i,j)} = d\Delta_\alpha^{(i,j)} \, .$$

Par suite il existe des $\theta_2^{(k)}$ $1 \leq k \leq c$ et $\theta_2^{(i,j)}$ $1 \leq i < j \leq \varepsilon_1$ dans Z_2 tels que:

$$z_2^{(k)} = \theta_2^{(k)} - \sum_{i=1}^{\varepsilon_1} \Delta'_{ik} s_i \qquad 1 \leq k \leq c \quad \text{et :}$$

$$z_2^{(i,j)} = \theta_2^{(i,j)} - \sum_{k=1}^{\varepsilon_1} \Delta_k^{(i,j)} s_k . \text{ On en déduit que :}$$

$$\sum_{k=1}^{c} z_2^{(k)} v_k = \sum_{k=1}^{c} \theta_2^{(k)} v_k - \sum_{k=1}^{c} \sum_{i=1}^{\varepsilon_1} \Delta'_{ik} s_i \quad \text{et}$$

$$\sum_{1 \leq i < j \leq \varepsilon_1} z_2^{(i,j)} \omega_{ij} = \sum_{1 \leq i < j \leq \varepsilon_1} \theta_2^{(i,j)} \omega_{ij} - \sum_{1 \leq i < j \leq \varepsilon_1} \left(\sum_{k=1}^{\varepsilon_1} \Delta_k^{(i,j)} s_k \right) \omega_{ij} \, .$$

2) Composantes sur les $S_i U_j$.

$$dy_1^{(i,j)} = 0 \Longrightarrow y_1^{(i,j)} \in Z_1 \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq \varepsilon_1 \quad 1 \leq j \leq \varepsilon_2$$

3) Composantes sur les U_i.

Comme les classes des u_i $i=1,\dots,\varepsilon_2$ modulo B_2 constituent une base de H_2 et comme $y_1^{(i,j)} \in Z_1$ paur $1 \leq i \leq \varepsilon_1$ $1 \leq j \leq \varepsilon_2$,l'hypothèse $Z_1^2 \subset B_2$ montre

que $b_{ij} = d(\delta_{ij})$ et $\gamma'_{ij} = d\Lambda_{ij}$ avec $\delta_{ij}, \Lambda_{ij} \in E_1$ pour $1 \leq i < j \leq \varepsilon_2$.
Ainsi, si l'on pose $y_1^{(i,j)} s_i = d\xi_3^{(i,j)}$ avec $\xi_3^{(i,j)} \in E_3$ $1 \leq i \leq \varepsilon_1$ $1 \leq j \leq \varepsilon_2$, on obtient :

$$x_3^{(1)} - \sum_{i=1}^{\varepsilon_1} \xi_3^{(i,1)} - \sum_{i=1}^{\varepsilon_2} \delta_{1i}\, u_i = z_3^{(1)} \in Z_3$$

$$x_3^{(2)} - \sum_{i=1}^{\varepsilon_1} \xi_3^{(i,2)} + (\delta_{12} - \Lambda_{12})\, u_1 - \sum_{2 < i \leq \varepsilon_2} \delta_{2i}\, u_i = z_3^{(2)} \in Z_3$$

$$\cdots$$

$$x_3^{(\varepsilon_2)} - \sum_{i=1}^{\varepsilon_1} \xi_3^{(i,\varepsilon_2)} + \sum_{1 \leq i < \varepsilon_2} (\delta_{i\varepsilon_2} - \Lambda_{i\varepsilon_2})\, u_i = z_3^{(\varepsilon_2)} \in Z_3$$

et l'on trouve :

$$\sum_{i=1}^{\varepsilon_2} x_3^{(i)}\, u_i = \sum_{i=1}^{\varepsilon_2} z_3^{(i)}\, u_i + \sum_{i=1}^{\varepsilon_1} \sum_{j=1}^{\varepsilon_2} \xi_3^{(i,j)}\, u_j + \sum_{1 \leq i < j \leq \varepsilon_2} \Lambda_{ij}\, u_i u_j .$$

Si l'on pose $\Lambda_{ii} = 0$ pour $1 \leq i \leq \varepsilon_2$, on a :

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq \varepsilon_2} \Lambda_{ij}\, u_i u_j = \sum_K \Lambda_{ij}\, u_i u_j + \sum_L \Lambda_{ij}\, u_i u_j .$$

Mais d'après (3.3) (2), pour $(i,j) \in L$, on a :

$$u_i u_j = \sum_I r'^{(i,j)}_{pq}\, s_p v_q + \sum_K \varphi^{(i,j)}_{pq}\, u_p . u_q - df_{ij} ,$$

de sorte que :

$$\sum_{i=1}^{\varepsilon_2} x_3^{(i)}\, u_i = \sum_{i=1}^{\varepsilon_2} z_3^{(i)}\, u_i + \sum_{i=1}^{\varepsilon_1} \sum_{j=1}^{\varepsilon_2} \xi_3^{(i,j)}\, u_j + \sum_K \Lambda_{pq}\, u_p u_q +$$

$$+ \sum_L \sum_I \Lambda_{ij}\, r'^{(i,j)}_{pq}\, s_p v_q + \sum_L \sum_K \Lambda_{ij}\, \varphi^{(i,j)}_{pq}\, u_p . u_q - \sum_L \Lambda_{ij}\, df_{ij}$$

En utilisant alors le fait que :

$$\sum_L \gamma_{ij}\, f_{ij} - \sum_L \Lambda_{ij}\, df_{ij} = d\left[\sum_L \Lambda_{ij}\, f_{ij}\right]$$ on obtient une nouvelle forme pour l'expression de $\sum_{i=1}^{\varepsilon_2} x_3^{(i)}\, u_i + \sum_L \gamma_{ij}\, f_{ij}$.

4) Composantes sur les $s_i^{(2)}$.

Toujours par le même raisonnement, on peut trouver des éléments D_{ij} $i \neq j$ $1 \leq i,j \leq \varepsilon_1$ et D_{ii} $i=1,\ldots,\varepsilon_1$, appartenant à E_1 et tels que

$a_{ij} = dD_{ij}$; $\mu_i = dD_{ii}$. Par suite, compte tenu du cas (1) ci-dessus on a :

$$x_2^{(1,1)} + D_{11}s_1 + D_{21}s_2 + D_{31}s_3 + \ldots + D_{\varepsilon_1,1}s_{\varepsilon_1} = z_2^{(1,1)} \in Z_2$$

$$x_2^{(2,2)} + D_{12}s_1 + D_{22}s_2 + D_{32}s_3 + \ldots + D_{\varepsilon_1,2}\, s_{\varepsilon_1} + 2\,\Delta_2^{(1,2)}s_1 = z_2^{(2,2)} \in Z_2$$

$$x_3^{(3,3)} + D_{13}s_1 + D_{23}s_2 + D_{33}s_3 + D_{43}s_4 + \ldots + D_{\varepsilon_1 3}s_{\varepsilon_1} + 2(\Delta_3^{(1,3)}s_1 + \Delta_3^{(2,3)}s_2) = z_2^{(3,3)} \in Z_2$$

...

$$x_2^{(\varepsilon_1,\varepsilon_1)} + D_{1\varepsilon_1}s_1 + D_{2\varepsilon_1}s_2 + \ldots + D_{\varepsilon_1-1,\varepsilon_1}s_{\varepsilon_1-1} + D_{\varepsilon_1,\varepsilon_1}s_{\varepsilon_1} + 2\varepsilon_1 \sum_{1\leq i<\varepsilon_1} \Delta_{\varepsilon_1}^{(i,\varepsilon_1)}s_i = z_2^{(\varepsilon_1,\varepsilon_1)} \in Z_2$$

5) Composantes sur les S_iS_j.

Comme dans les cas (1) et (4), on obtient d'abord

$$x_2^{(1,2)} + (D_{2,1} - \Delta_{112})s_1 + (D_{12} - \Delta_{122})s_2 + R_{123}^{143}s_3 + R_{124}^{142}s_4 + \ldots + R_{12\varepsilon_1}^{1\varepsilon_1 2} + \Delta_1^{(1,2)}s_1 = z_2^{(1,2)} \in Z_2$$

$$x_2^{(1,3)} + (D_{31} - \Delta_{113})s_1 + M_{123}s_2 + (D_{13} - \Delta_{133})s_3 + R_{134}^{143}s_4 + \ldots + R_{13\varepsilon_1}^{1\varepsilon_1 3}s_{\varepsilon_1} + \Delta_1^{(1,3)}s_1 + \Delta_1^{(2,3)}s_2 = z_2^{(1,3)} \in Z_2.$$

$$x_2^{(1,4)} + (D_{41} - \Delta_{114})s_1 + M_{124}s_2 + M_{134}s_3 + (D_{14} - \Delta_{144})s_4 + R_{145}^{154}s_5 + \ldots + R_{14\varepsilon_1}^{1\varepsilon_1 4}s_{\varepsilon_1} + \Delta_1^{(1,4)}s_1 + \Delta_1^{(2,4)}s_2 + \Delta_1^{(3,4)}s_3 = z_2^{(1,4)} \in Z_2.$$

...

$$x_2^{(1,\varepsilon_1)} + (D_{\varepsilon_1 1} - \Delta_{11\varepsilon_1})s_1 + M_{12\varepsilon_1}s_2 + \ldots + M_{1,\varepsilon_1-1,\varepsilon_1}\, s_{\varepsilon_1-1} + (D_{1\varepsilon_1} - \Delta_{1\varepsilon_1\varepsilon_1})s_{\varepsilon_1} + \sum_{1\leq i<\varepsilon_1} \Delta_1^{(i,\varepsilon_1)}\, s_i = z_2^{(1,\varepsilon_1)}$$

où l'on a posé $\lambda_{ijk} = dM_{ijk}$ pour $1\leq i<j<k\leq \varepsilon_1$ $\quad M_{ijk} \in E_1$.

$\delta'_{1ij} = d\,\Delta_{1ij}$ pour $1<j\leq \varepsilon_1$ $\quad i=1$ ou $i=j$

et $\lambda_{1ij} - \delta'_{1ji} = dR_{1ij}^{1ji}$ avec M_{ijk}, Δ_{1ij}, R_{1ij}^{1ji} dans E_1.

On peut de plus choisir R_{1ij} de sorte que :

$$R_{1ij} = M_{1ij} - \Delta_{1ji} \quad \text{pour} \quad 1<i<j\leq \varepsilon_1.$$

En utilisant cette remarque et les notations correspondantes pour les autres coefficients des S_iS_j $i>1$, on obtient :

$$x_2^{(2,3)}+(M_{123}-\Delta_{213})s_1+(D_{32}-\Delta_{223})s_2+(D_{23}-\Delta_{233})s_3+\ldots+(M_{23\varepsilon_1}-\Delta_{2\varepsilon_1 3})+$$
$$+\Delta_3^{(1,2)}s_1+\Delta_2^{(1,3)}s_1+\Delta_2^{(2,3)}s_2 = Z_2^{(2,3)}\in Z_2$$

...

$$x_2^{(2,\varepsilon_1)}+(M_{12\varepsilon_1}-\Delta_{21\varepsilon_1})+(D_{\varepsilon_1 2}-\Delta_{22\varepsilon_1})s_2+M_{23\varepsilon_1}s_3+\ldots+M_{2\varepsilon_1-1\varepsilon_1}s_{\varepsilon_1-1}+$$
$$+(D_{2\varepsilon_1}-\Delta_{2\varepsilon_1\varepsilon_1})s_{\varepsilon_1}+\Delta_{\varepsilon_1}^{(1,2)}s_1+\sum_{1\leq i<\varepsilon_1}\Delta_2^{(i,\varepsilon_1)}s_i = Z_2^{(2,\varepsilon_1)}\in Z_2.$$

...

$$x_2^{(\varepsilon_1-1,\varepsilon_1)}+(M_{1,\varepsilon_1-1,\varepsilon_1}-\Delta_{\varepsilon_1-1,1,\varepsilon_1})s_1+\ldots+M_{\varepsilon_1-2,\varepsilon_1-1,\varepsilon_1}s_{\varepsilon_1-2}+$$
$$+(D_{\varepsilon_1,\varepsilon_1-1}-\Delta_{\varepsilon_1-1,\varepsilon_1-1,\varepsilon_1})s_{\varepsilon_1-1}+(D_{\varepsilon_1-1,\varepsilon_1}-\Delta_{\varepsilon_1-1,\varepsilon_1,\varepsilon_1})s_{\varepsilon_1}+\sum_{1\leq i<\varepsilon_1}\Delta_{\varepsilon_1-1}^{(i,\varepsilon_1)}s_i+$$
$$+\sum_{1\leq i\leq\varepsilon_1-2}\Delta_{\varepsilon_1}^{(i,\varepsilon_1-1)}s_i = Z_2^{(\varepsilon_1-1,\varepsilon_1)}\in Z_2.$$

Des alinéas 4 et 5 on tire alors :

$$x_2^{(1,1)}s_1=Z_2^{(1,1)}s_1-(D_{21}s_2s_1+D_{31}s_3s_1+\ldots+D_{\varepsilon_1,1}s_{\varepsilon_1}s_1)$$

$$x_3^{(1,2)}s_2=Z_2^{(1,2)}s_2-\Big[(D_{21}-\Delta_{112})s_1s_2+(M_{123}-\Delta_{132})s_3s_2+\ldots+(M_{12\varepsilon_1}-\Delta_{1\varepsilon_1 2})s_{\varepsilon_1}s_2+$$
$$\Delta_1^{(1,2)}s_1s_2\Big]$$

$$x_2^{(1,3)}s_3=Z_2^{(1,3)}s_3-\Big[(D_{31}-\Delta_{113})s_1s_3+M_{123}s_2s_3+(M_{132}-\Delta_{143})s_4s_3+\ldots+$$
$$(M_{13\varepsilon_1}-\Delta_{1\varepsilon_1 3})s_{\varepsilon_1}.s_3+\Delta_1^{(1,3)}s_1+\Delta_1^{(2,3)}s_2s_3\Big].$$

$$x_2^{(1,4)}s_4=Z_2^{(1,4)}s_4-\Big[(D_{41}-\Delta_{114})s_1s_4+M_{124}s_2s_4+M_{134}s_3s_4+(M_{145}-\Delta_{154})s_5s_4+$$
$$+\ldots+(M_{14\varepsilon_1}-\Delta_{1\varepsilon_1 4})s_{\varepsilon_1}s_4+\Delta_1^{(1,4)}s_1s_4+\Delta_1^{(2,4)}s_2s_4+\Delta_1^{(3,4)}s_3.s_4\Big].$$

...

$$x_2^{(1,\varepsilon_1)}.s_{\varepsilon_1}=Z_2^{(1,\varepsilon_1)}s_{\varepsilon_1}-\Big[(D_{\varepsilon_1,1}-\Delta_{11\varepsilon_1})s_1s_{\varepsilon_1}+M_{12\varepsilon_1}s_2s_{\varepsilon_1}+\dots+M_{1,\varepsilon_1-1,\varepsilon_1}s_{\varepsilon_1-1}s_{\varepsilon_1}+\sum_{i=1}^{\varepsilon_1-1}\Delta_1^{(i,\varepsilon_1)}\,s_is_{\varepsilon_1}\Big].$$

En reportant ces expressions dans le coefficient de S_1, on s'aperçoit que les termes M_{ijk}, D_{ij} disparaissent et si l'on pose $y_1^{(1,i)}u_i = dt_4^{(1,i)}$ avec $t_4^{(1,i)}\in E_4$ pour $i=1,\dots,\varepsilon_2$, en vertu de l'hypothèse $Z_1.Z_2\subset B_3$, on trouve :

$$dx_4^{(1)}+\sum_{i=1}^{\varepsilon_1} Z_2^{(1,i)}s_i+\Delta_{112}s_1s_2+\Delta_{132}s_3s_2+\Delta_{142}s_4s_2+\dots+\Delta_{1\varepsilon_12}\,s_{\varepsilon_1}s_2-\Delta_1^{(1,2)}s_1s_2+$$

$$+\Delta_{113}s_1s_3+\Delta_{143}s_4s_3+\dots+\Delta_{1\varepsilon_13}s_{\varepsilon_1}s_3-(\Delta_1^{(1,3)}s_1s_3+\Delta_1^{(2,3)}s_2.s_3)+$$

$$+\Delta_{114}s_1s_4+\Delta_{154}s_5.s_4+\dots+\Delta_{1\varepsilon_14}s_{\varepsilon_1}.s_4-(\Delta_1^{(1,4)}s_1s_4+\Delta_1^{(2,4)}s_2.s_4+\Delta_1^{(3,4)}s_3s_4)$$

$$+\Delta_{11\varepsilon_1}s_1s_{\varepsilon_1}-\sum_{i<\varepsilon_1}\Delta_1^{(i,\varepsilon_1)}s_is_{\varepsilon_1}-\sum_{j=1}^{\varepsilon_2}dt_4^{(1,j)}+\sum_{k=1}^{c}c_{1k}v_k+A_1=0$$

D'après l'alinéa (1) ci-dessus, pour $1\leq k\leq c$, on a :

$$\sum_{k=1}^{c}c_{1k}\,v_k=\sum_{k=1}^{c}\beta'_{1k}\,v_k+\sum_{k=1}^{c}d\Delta'_{1k}v_k\,.$$

De plus $\displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq\varepsilon_1}d\Delta_1^{(i,j)}\omega_{ij}=d(\sum_{i<j}\Delta_1^{(i,j)}\omega_{ij}+\sum_{i<j}\Delta_1^{(i,j)}\,s_is_j)$, de sorte qu'en examinant de près l'expression A_1, on obtient :

$$dx_4^{(1)}+\sum_{i=1}^{\varepsilon_1}Z_2^{(1,i)}s_i-d(\sum_{1<j\leq\varepsilon_1}\Delta_{11j}\,\omega_{1j}+\sum_{2<j\leq\varepsilon_1}\Delta_{1j2}\,\omega_{2j}+\dots+\Delta_{1\varepsilon_1\varepsilon_1-1}\omega_{\varepsilon_1-1\varepsilon_1})$$

$$-d(\sum_{j=1}^{\varepsilon_2}t_4^{(1,j)})+d(\sum_{i<j}\Delta_1^{(i,j)}\omega_{ij})+d(\sum_{k=1}^{c}\Delta'_{1k}\,v_k)+\sum_{k=1}^{c}\beta'_{1k}\,v_k=0.$$

L'hypothèse $H_1.H_2=0$ implique que $Z_2^{(1,i)}s_i=d\Omega_i^{(1,i)}$ avec $\Omega_i^{(1,i)}\in E_4$ pour $i=1,\dots,\varepsilon_1$ et comme les classes des v_k pour $k=1,\dots,c$ constituent une base de H_3, on en déduit que $\beta'_{1k}\in\mathfrak{m}$ pour $k=1,\dots,c$ c'est-à-dire :

il existe $B_{1k}\in E_1$ tel que $\beta'_{1k}=dB_{1k}$ pour $k=1,\dots,c$.

On a alors :

$$x_4^{(1)} + \sum_{k=1}^{\varepsilon_1} \mathcal{A}_k^{(1,k)} - \sum_{1<j\leq \varepsilon_1} \Delta_{11j}\,\omega_{1j} + \sum_{2<j} \Delta_{1j2}\,\omega_{2j} + \ldots + \Delta_{1\varepsilon_1\,\varepsilon_1-1}\,\omega_{\varepsilon_1-1,\varepsilon_1} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{c} B_{1k}v_k + \sum_{k=1}^{c} \Delta'_{1k}v_k + \sum_{1\leq i<j\leq \varepsilon_1} \Delta_1^{(i,j)}\,\omega_{ij} - \sum_{j=1}^{\varepsilon_2} t_4^{(1,i)} = \alpha_4^{(1)} \in Z_4 .$$

Posons maintenant : $Z_2^{(i,j)}\, s_k = d\mathcal{A}_k^{(i,j)} \qquad 1\leq i\leq j\leq \varepsilon_1 \qquad k=1,\ldots,\varepsilon_1$

$$\theta_2^{(i,j)}\, s_k = d(\textcircled{H}_k^{(i,j)}) \qquad 1\leq i<j\leq \varepsilon_1 \qquad k=1,\ldots,\varepsilon_1$$

$$y_2^{(i,j)}\, u_j = dt_4^{(i,j)} \qquad 1\leq i\leq \varepsilon_1 \qquad 1\leq j\leq \varepsilon_2$$

où $\mathcal{A}_k^{(i,j)}, \textcircled{H}_k^{(i,j)}, t_4^{(i,j)} \in E_4$.

Indiquons encore le calcul de $x_4^{(2)}$ qui n'est pas exactement le même. En utilisant A_2, on obtient d'abord :

$$dx_4^{(2)} + Z_2^{(1,2)}s_1 + Z_2^{(2,2)}s_2 + Z_2^{(2,3)}s_3 + \ldots + Z_2^{(2,\varepsilon_1)}s_{\varepsilon_1} + d(\sum_{1<j\leq\varepsilon_1} \Delta_{1j2}\,\omega_{1j}) -$$

$$-d(\sum_{2<j}\Delta_{21j}\,\omega_{1j}) - d(\sum_{2<j}\Delta_{22j}\,\omega_{2j}) + d(\sum_{3<j}\Delta_{2j3}\,\omega_{3j}) + \ldots + d(\Delta_{2\varepsilon_1\,\varepsilon_1-1}\,\omega_{\varepsilon_1-1\,\varepsilon_1}) -$$

$$- \sum_{i=1}^{\varepsilon_2} dt_4^{(2,i)} + \sum_{i=1}^{c} c_{2i}v_i + \sum_{i<j} d\Delta_2^{(i,j)}\omega_{ij} -$$

$$- \Big[2\,\Delta_2^{(1,2)}s_1s_2 + (\Delta_3^{(1,2)}s_1s_3 + \Delta_2^{(1,3)}s_1s_3 + \Delta_2^{(2,3)}s_2s_3) + \ldots + \Delta_{\varepsilon_1}^{(1,2)}s_1s_{\varepsilon_1} +$$

$$+ \sum_{1\leq i<\varepsilon_1} \Delta_2^{(i,\varepsilon_1)}\, s_i\, s_{\varepsilon_1}\Big] + z_2^{(1,2)}\, s_1 .$$

Mais on sait par (1) que $z_2^{(1,2)}s_1 = \theta_2^{(1,2)}s_1 - \sum_{k=1}^{\varepsilon_1} \Delta_k^{(1,2)}s_ks_1$ et par suite :

$$\sum_{i<j} d\Delta_2^{(i,j)}\omega_{ij} + z_2^{(1,2)}\, s_1 = \theta_2^{(1,2)}s_1 + d(\sum_{i<j}\Delta_2^{(i,j)}\omega_{ij}) + \sum_{i<j}\Delta_2^{(i,j)}s_i.s_j -$$

$$- \sum_{k=1}^{\varepsilon_1} \Delta_k^{(1,2)}\, s_k.s_1 .$$

Comme on a aussi :

$$\sum_{k=1}^{c} c_{2k}v_k = \sum_{k=1}^{c} d(\Delta'_{2k}\, v_k) + \sum_{k=1}^{c} \beta'_{2k}\, v_k ,$$

on en déduit que l'on peut trouver des B_{2k} $1\leq k\leq c$ tels que $\beta'_{2k} = dB_{2k}$ et l'on obtient :

$$x_4^{(2)}+\Omega_1^{(1,2)}+\sum_{k=2}^{\varepsilon_1}\Omega_k^{(2,k)}+\sum_{1<j\leq\varepsilon_1}\Delta_{1j2}\,\omega_{1j}-\sum_{2<j}\Delta_{21j}\,\omega_{1j}-\sum_{2<j}\Delta_{22j}\,\omega_{2j}+$$

$$+\sum_{3<j}\Delta_{2j3}\,\omega_{3j}+\ldots+\Delta_{2\varepsilon_1\varepsilon_1-1}\,\omega_{\varepsilon_1-1\,\varepsilon_1}-\sum_{i=1}^{\varepsilon_2}t_4^{(2,i)}+\sum_{k=1}^{c}B_{2k}\,v_k+$$

$$+\sum_{k=1}^{c}\Delta'_{2k}\,v_k+\sum_{i<j}\Delta_2^{(i,j)}\,\omega_{ij}+H_1^{(1,2)}=\alpha_4^{(2)}\in Z_4 .$$

Le calcul de $x_4^{(\varepsilon_1)}$ est similaire, on obtient :

$$x_4^{(\varepsilon_1)}+\sum_{k=1}^{\varepsilon_1}\Omega_k^{(k,\varepsilon_1)}-(\sum_{1<j<\varepsilon_1}\Delta_{j1\varepsilon_1}\,\omega_{1j}+\sum_{2<j<\varepsilon_1}\Delta_{j2\varepsilon_1}\,\omega_{2j}+\ldots+\Delta_{\varepsilon_1-1,\varepsilon_1-2,\varepsilon_1}\,\omega_{\varepsilon_1-2,\varepsilon_1-1})$$

$$+\sum_{1\leq i<\varepsilon_1}\Delta_{i\varepsilon_1\varepsilon_1}\,\omega_{i\varepsilon_1}-\sum_{i=1}^{\varepsilon_2}t_4^{(\varepsilon_1,i)}+\sum_{i=1}^{c}B_{\varepsilon_1,i}v_i+\sum_{i=1}^{c}\Delta'_{\varepsilon_1,i}v_i+\sum_{i<j}\Delta_{\varepsilon_1}^{(i,j)}\omega_{ij}=\alpha_4^{(\varepsilon_1)}$$

où $\alpha_4^{(\varepsilon_1)}\in Z_4$.

On peut maintenant poser $c_{ik} = \beta'_{ik} + d\,\Delta'_{ik} = d(\Delta_{ik})$ avec $\Delta_{ik} = B_{ik} + \Delta'_{ik}$ pour $1\leq k\leq c$ $1\leq i\leq\varepsilon_1$ pour écrire :

$$z_2^{(k)} = \theta_2^{(k)} - \sum_{i=1}^{\varepsilon_1}\Delta_{ik}s_i + \sum_{i=1}^{\varepsilon_1}B_{ik}s_i.$$ Il s'ensuit que :

$$\sum_{k=1}^{c} z_2^{(k)}\,v_k + \sum_{i<j} z_2^{(i,j)}\omega_{ij} - \sum_{J}\beta_{ij}\,e_{ij} = \sum_{k=1}^{c}\theta_2^{(k)}\,v_k + \sum_{i<j}\theta_2^{(i,j)}\omega_{ij} -$$

$$-\sum_{k=1}^{c}\sum_{i=1}^{\varepsilon_1}\Delta_{ik}s_iv_k - \sum_{i<j}\sum_{k=1}^{\varepsilon_1}\Delta_1^{(i,j)}\,s_k\omega_{ij} + \sum_{k=1}^{c}\sum_{i=1}^{\varepsilon_1}B_{ik}\,s_i\,v_k - \sum_{J}\beta_{ij}\,e_{ij}.$$

Mais d'après la construction des ensembles d'indices I et J du §3 on a

$$\sum_{k=1}^{c}\sum_{i=1}^{\varepsilon_1}B_{ij}\,s_i\,v_k = \sum_{I}B_{ij}\,s_i\,v_j + \sum_{J}B_{ij}\,s_i\,v_j$$ et pour $(i,j)\in J$,

on peut expliciter $s_i\,v_j$ (3.3-(1)) pour obtenir :

$$\sum_{k=1}^{c}\sum_{i=1}^{\varepsilon_1}B_{ik}\,s_i\,v_k - \sum_{J}\beta_{ij}\,e_{ij} = \sum_{I}B_{pq}\,s_p\,v_q + \sum_{J}B_{ij}\,de_{ij} - \sum_{J}\beta_{ij}\,e_{ij} +$$

$$+\sum_{J}\sum_{I}B_{ij}\,r_{pq}^{(i,j)}\,s_p\,v_q.$$

Mais $\beta_{ij} = dB_{ij} \Longrightarrow \sum_{J}B_{ij}\,de_{ij} - \sum_{J}\beta_{ij}\,e_{ij} = -d(\sum_{J}B_{ij}e_{ij})$. Nous avons ainsi obtenu une autre forme de l'expression

$\sum_{k=1}^{c} z_2^{(k)} v_k + \sum_{i<j} z_2^{(i,j)} \omega_{ij} - \sum_{J} \beta_{ij} \ell_{ij}$; il reste à transformer

$\sum_{i=1}^{\varepsilon_1} x_4^{(i)} s_i - \sum_{N} \delta_{ijk} g_{ijk}$. A l'aide des valeurs de $x_4^{(1)}, \ldots, x_4^{(\varepsilon_1)}$

trouvées plus haut, on peut écrire :

$$\sum_{i=1}^{\varepsilon_1} x_4^{(i)}.s_i = \sum_{i=1}^{\varepsilon_1} \alpha_4^{(i)} s_i + \sum_{j=1}^{\varepsilon_2} \sum_{i=1}^{\varepsilon_1} t_4^{(i,j)}.s_i - \sum_{k=1}^{\varepsilon_1} \Omega_k^{(1,k)} s_1 - \sum_{k=1}^{c} \Delta_{1k} v_k s_1$$

$$- \sum_{i<j} \Delta_1^{(i,j)} \omega_{ij} - \Omega_1^{(1,2)} s_2 - \sum_{k=2}^{\varepsilon_1} \Omega_k^{(2,k)} s_2 - \sum_{k=1}^{c} \Delta_{2k} v_k s_2 -$$

$$- \sum_{i<j} \Delta_2^{(i,j)} \omega_{ij} - \Theta_1^{(1,2)} s_2 + \ldots$$

$$- \sum_{k=1}^{\varepsilon_1} \Omega_k^{(k,\varepsilon_1)} s_{\varepsilon_1} - \sum_{k=1}^{c} \Delta_{\varepsilon_1 k} v_k s_{\varepsilon_1} - \sum_{i<j} \Delta_{\varepsilon_1}^{(i,j)} \omega_{ij} s_{\varepsilon_1} - \sum_{1\leq i<\varepsilon_1} \Theta_i^{(i,\varepsilon_1)} s_{\varepsilon_1} +$$

$$+ \sum_{1<j\leq\varepsilon_1} \Delta_{11j}\, \omega_{1j}.s_1 - \sum_{2<j} \Delta_{1j2}\, \omega_{2j} s_1 - \ldots - \Delta_{1\varepsilon_1\varepsilon_1-1}\, \omega_{\varepsilon_1-1\varepsilon_1}\, s_1$$

$$+ \sum_{2<j} \Delta_{21j}\, \omega_{1j} s_2 - \sum_{1<j\leq\varepsilon_1} \Delta_{1j2}\, \omega_{1j} s_2 + \sum_{2<j} \Delta_{22j}\, \omega_{2j} s_2 - \sum_{3<j} \Delta_{2j3}\, \omega_{3j} s_2 -$$

$$- \ldots - \Delta_{2\varepsilon_1\varepsilon_1-1}\, \omega_{\varepsilon_1-1,\varepsilon_1}\, s_2 + \ldots + \sum_{1<j<\varepsilon_1} \Delta_{j1\varepsilon_1}\, \omega_{1j}.s_{\varepsilon_1} +$$

$$+ \sum_{2<j<\varepsilon_1} \Delta_{j2\varepsilon_1}\, \omega_{2j} s_{\varepsilon_1} + \ldots + \Delta_{\varepsilon_1-1,\varepsilon_1-2\,\varepsilon_1}\, \omega_{\varepsilon_1-2,\varepsilon_1-1} s_{\varepsilon_1} - \sum_{1\leq i<\varepsilon_1} \Delta_{i\varepsilon_1\varepsilon_1}\, \omega_{i\varepsilon_1} s_{\varepsilon_1}.$$

Mais un examen minutieux des termes en $\Delta_{ijk}\ \omega_{\alpha\beta}\, s_\gamma$ montre qu'apparaît exactement l'opposé de la somme :

$\sum_{M\cup N} \Delta_{ijk} \langle s_i, s_j, s_k \rangle$. En conséquence, on peut écrire :

$$\sum_{M\cup N} \Delta_{ijk} \langle s_i, s_j, s_k \rangle = \sum_{M} \Delta_{pqr} \langle s_p, s_q, s_r \rangle + \sum_{N} \Delta_{ijk} \langle s_i, s_j, s_k \rangle .$$

D'après (3.3.-(3)), on sait exprimer $\langle s_i, s_j, s_k \rangle$ différemment pour (i,j,k) dans N et de plus, on note que :

$$\sum_{N} \delta_{ijk}\, g_{ijk} - \sum_{N} \Delta_{ijk}\, dg_{ijk} = d(\sum_{N} \Delta_{ijk}\, g_{ijk}).$$

On peut alors prendre son souffle pour écrire l'expression :

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \xi_i = d(x_6 - \sum_J B_{ij} e_{ij} - \sum_L \Lambda_{ij} f_{ij} - \sum_N \Delta_{ijk} g_{ijk}) +$$

$$\sum_{i=1}^{\varepsilon_1} \alpha_4^{(i)} s_i + \sum_{k=1}^{c} \theta_2^{(k)} v_k + \sum_{1\leq i<j\leq\varepsilon_1} \theta_2^{(i,j)} \omega_{ij} - \sum_{k=1}^{\varepsilon_2} z_3^{(k)} u_k +$$

$$+ \sum_{j=1}^{\varepsilon_2} \sum_{i=1}^{\varepsilon_1} t_4^{(i,j)} s_i - \sum_{j=1}^{\varepsilon_2} \sum_{i=1}^{\varepsilon_1} \xi_3^{(i,j)} u_j - \sum_{1\leq i<j\leq\varepsilon_1} \Theta_i^{(i,j)} s_j -$$

$$- \sum_{i=1}^{\varepsilon_1} \Omega_i^{(i,i)} s_i - \sum_{1\leq i<j\leq\varepsilon_1} (\Omega_j^{(i,j)} s_i + \Omega_i^{(i,j)} s_j) +$$

$$+ \sum_I (B_{pq} + \sum_J B_{ij} r_{pq}^{(i,j)} - \sum_L \Lambda_{ij} r'^{(i,j)}_{pq} - \sum_N \Delta_{ijk} r_{pq}^{(i,j,k)}) s_p v_q -$$

$$- \sum_K (\Lambda_{pq} + \sum_L \Lambda_{ij} \varphi_{pq}^{(i,j)} + \sum_N \Delta_{ijk} \varphi_{pq}^{(i,j,k)}) u_p u_q -$$

$$- \sum_M (\Delta_{pqr} + \sum_N \Delta_{ijk} \rho_{pqr}^{(i,j,k)}) \langle s_p, s_q, s_r \rangle .$$

Mais si l'on choisit d'abord les B_{ij} $(i,j)\in J$, Λ_{ij} $(i,j)\in L$, $\Delta_{i,j,k}$ $(i,j,k)\in N$ tels que :

$dB_{ij} = \beta_{ij}$, $d\Lambda_{ij} = \gamma_{ij}$ $d\Delta_{ijk} = \delta_{ijk}$, on peut imposer aux B_{ij} $1\leq i\leq\varepsilon_1$, $1\leq j\leq c$ de vérifier la relation

$$B_{pq} = -\sum_J B_{ij} r_{p,q}^{(i,j)} + \sum_L \Lambda_{ij} r'^{(i,j)}_{pq} + \sum_N \Delta_{i,j,k} r_{p,q}^{(i,j,k)} \quad \text{pour} \quad (p,q)\in I$$

compte tenu des égalités (****). Les B_{pq} étant ainsi choisis, on peut prendre pour $(p,q)\in K$, des Λ_{pq} tels que :

$$\Lambda_{pq} + \sum_L \Lambda_{ij} \varphi_{pq}^{(i,j)} + \sum_N \Delta_{ijk} \varphi_{pq}^{(i,j,k)} = 0$$

et il suffit de choisir les Δ_{pqr} $(p,q,r)\in M$ de façon convenable.

Revenons sur les termes **restant** dans l'expression de $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \xi_i$. On a $\sum_{i=1}^{\varepsilon_1} \alpha_4^{(i)} s_i + \sum_{k=1}^{c} \theta_2^{(k)} v_k - \sum_{k=1}^{\varepsilon_2} z_3^{(k)} u_k \in Z_1.Z_4 + Z_2.Z_3$. Or on peut aisément faire apparaître des produits de Massey avec les autres termes.

En effet, utilisons les notations du §1 et posons d'abord :

$a_{11} = s_i$, $a_{22} = y_1^{(i,j)}$, $a_{33} = u_j$ où $1 \leq i \leq \varepsilon_1$, $1 \leq j \leq \varepsilon_2$.

Alors $\bar{a}_{11} . a_{22} = s_i . y_1^{(i,j)} = da_{12}$ avec $a_{12} = - \xi_3^{(i,j)}$

$\bar{a}_{22} . a_{33} = y_1^{(i,j)} u_j = da_{23}$ avec $a_{23} = t_4^{(i,j)}$

et $\widetilde{a}_{13} = \bar{a}_{11} a_{23} + \bar{a}_{12} . a_{33} = s_i t_4^{(i,j)} - \xi_3^{(i,j)} u_j \in \langle Z_1, Z_1, Z_2 \rangle$.

Par suite $\sum_{j=1}^{\varepsilon_2} \sum_{i=1}^{\varepsilon_1} (s_i \; t_4^{(i,j)} - \xi_3^{(i,j)} u_j) \in \langle Z_1, Z_1, Z_2 \rangle$. On aurait pu indifféremment faire apparaître des produits de Massey de matrices non réduites à un seul élément, en posant :

$A_{11} = [s_1, s_2, \ldots, s_{\varepsilon_1}]$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} y_1^{(1,1)} \ldots y_1^{(1,\varepsilon_2)} \\ y_1^{(2,1)} \ldots y_1^{(2,\varepsilon_2)} \\ \vdots \qquad \vdots \\ y_1^{(\varepsilon_1,1)} \ldots y_1^{(\varepsilon_1 \varepsilon_2)} \end{bmatrix} \qquad A_{33} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{\varepsilon_2} \end{bmatrix}$$

On a $\{A_{11}\} \in MH_1$, $\{A_{22}\} \in MH_1$, $\{A_{33}\} \in MH_2$

et $\bar{A}_{11} . A_{22} = \left[\sum_{i=1}^{\varepsilon_1} s_i \; y_1^{(i,1)}, \ldots, \sum_{i=1}^{\varepsilon_1} s_i \; y_1^{(i,\varepsilon_2)} \right] = dA_{12}$

où $A_{12} = - \left[\sum_{i=1}^{\varepsilon_1} \xi_3^{(i,1)}, \ldots, \sum_{i=1}^{\varepsilon_1} \xi_3^{(i,\varepsilon_2)} \right]$

En outre :

$$\bar{A}_{22} . A_{33} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{\varepsilon_2} y_1^{(1,j)} \; u_j \\ \cdots \\ \sum_{j=1}^{\varepsilon_2} y_1^{(\varepsilon_1,j)} \; u_j \end{bmatrix} = dA_{23} \qquad \text{avec} \qquad A_{23} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{\varepsilon_2} t_4^{(1,j)} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{\varepsilon_2} t_4^{(\varepsilon_1,j)} \end{bmatrix}$$

et si l'on calcule $\widetilde{A}_{13} = \bar{A}_{11} A_{23} + \bar{A}_{12} . A_{33}$

$$\widetilde{A}_{13} = [s_1\ s_2 \dots s_{\varepsilon_1}] \begin{bmatrix} \sum\limits_{j=1}^{\varepsilon_2} t_4^{(1,j)} \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{\varepsilon_2} t_4^{(\varepsilon_1,j)} \end{bmatrix} - \Big[\sum_{i=1}^{\varepsilon_1} \xi_3^{(i,1)}, \dots, \sum_{i=1}^{\varepsilon_1} \xi_3^{(i,\varepsilon_2)} \Big] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{\varepsilon_2} \end{bmatrix}$$

on retrouve exactement $\sum\limits_{j=1}^{\varepsilon_2} \sum\limits_{i=1}^{\varepsilon_1} (t_4^{(i,j)} s_i - \xi_3^{(i,j)} u_j) = \widetilde{A}_{13}$

et $\widetilde{A}_{13} \in \langle Z_1, Z_1, Z_2 \rangle$.

De façon similaire, on peut transformer l'opposé de la somme

$$\sum_{i=1}^{\varepsilon_1} \Omega_i^{(i,i)} s_i + \sum_{1 \leq i < j \leq \varepsilon_1} (\Omega_j^{(i,j)} s_i + \Omega_i^{(i,j)} s_j) .$$

On sait en effet que $Z_2^{(i,j)} . s_k = d\Omega_k^{(i,j)}$ pour $1 \leq i \leq j \leq \varepsilon_1$; $k = 1, \dots, \varepsilon_1$. Or on observe que pour $i = 1, \dots, \varepsilon_1$

$$\{s_i\ \Omega_i^{(i,i)}\} \in \langle \{s_i\}, \{s_i\}, \{Z_2^{(i,i)}\} \rangle$$

et $\{-(\Omega_j^{(i,j)} s_i + \Omega_i^{(i,j)} s_j\} \in \langle \{s_i\}, \{Z_2^{(i,j)}\}, \{s_j\}$ pour $1 \leq i < j \leq \varepsilon_1$.

Enfin pour $1 \leq i < j \leq \varepsilon_1$, on a :

$$\{\Theta_i^{(i,j)} s_j - \theta_2^{(i,j)} \omega_{ij}\} \in \langle \{\theta_2^{(i,j)}\} , \{s_i\} , \{s_j\} \rangle$$

et l'on a donc établi que :

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \xi_i \in B_5 + Z_1.Z_4 + Z_2.Z_3 + \langle Z_1, Z_1, Z_2 \rangle + \langle Z_1, Z_2, Z_1 \rangle ;$$

Compte tenu du choix des ξ_i, on en conclut que $\alpha_i \in \mathfrak{m}$ pour $i = 1, \dots, p$; ce qui achève la démonstration du lemme.

§.6. Exemples et conclusion

6.1. <u>Remarque</u>. - Si H_* désigne l'homologie du complexe de Koszul d'un anneau local noethérien R, on a dans le cas général :

$\varepsilon_1 = \dim_K H_1$; $\varepsilon_2 = \dim_K H_2/H_1^2$; $\varepsilon_3 = \dim_K H_3/H_1.H_2 + \binom{\varepsilon_1}{2} - \dim_K H_1^2$.

De plus, si $H_1^2 = 0$ $\varepsilon_4 = \dim_K H_4/\tilde{H}_4 + \varepsilon_1 . \varepsilon_2 - \dim_K (H_1.H_2)$ et si

$H_1^2 = H_1.H_2 = 0$ $\varepsilon_5 = \dim_K H_5/\tilde{H}_5 + \varepsilon_1 c_3 + \varepsilon_2 + \binom{\varepsilon_2}{2} + \varepsilon_1 \binom{\varepsilon_1}{2} - \binom{\varepsilon_1}{3} - \dim_K \tilde{H}_4$.

Pour $2 \leq i \leq 5$, on a vu apparaître dans ε_i une expression de la forme

$H_{i-1}.H_1 + H_{i-2}.H_2 + \ldots + H_{i-\lambda}.H_\lambda$

où $\lambda = \frac{i}{2}$ si i est pair

$\lambda = \frac{i-1}{2}$ si i est impair (voir [17] §2. p.222).

6.2. Remarque : Si l'on note $b_i = \dim_K \mathrm{Tor}_i^R(K,K)$ le $i^{\text{ème}}$ nombre de Betti de R et si l'on désigne par $P_R(Z) = \sum_{i \geq 0} b_i Z^i$ la série de Poincaré de R, on sait par ([12] Th.2. p.3) que :

$$P_R(Z) = \frac{(1+Z)^n}{(1-Z^2)^{\varepsilon_1}} \cdot \frac{(1+Z^3)^{\varepsilon_2}}{(1-Z^4)^{\varepsilon_3}} \cdot \frac{(1+Z^5)^{\varepsilon_4}}{(1-Z^6)^{\varepsilon_6}} \quad \ldots$$

ce qui permet d'obtenir les relations :

$b_o = 1$

$b_1 = n$

$b_2 = \binom{n}{2} + \varepsilon_1$

$b_3 = \binom{n}{3} + \binom{n}{1}\varepsilon_1 + \varepsilon_2$

$b_4 = \binom{n}{4} + \binom{n}{2}\varepsilon_1 + \varepsilon_1^2 - \binom{\varepsilon_1}{2} + \binom{n}{1}\varepsilon_2 + \varepsilon_3$

$b_5 = \binom{n}{5} + \binom{n}{3}\varepsilon_1 + \binom{n}{1}\binom{\varepsilon_1}{2} + \binom{n}{1}\varepsilon_1 + \binom{n}{2}\varepsilon_2 + \varepsilon_1 . \varepsilon_2 + \binom{n}{1}\varepsilon_3 + \varepsilon_4$

$b_6 = \binom{n}{6} + \binom{n}{4}\varepsilon_1 + \binom{n}{2}\binom{\varepsilon_1}{2} + \binom{n}{2}\varepsilon_1 + \varepsilon_1^2 + \binom{\varepsilon_1}{3} + \binom{n}{3}\varepsilon_2 + \binom{\varepsilon_2}{2} + \binom{n}{1}\varepsilon_1\varepsilon_2 + \binom{n}{2}\varepsilon_3$.

$\varepsilon_1 . \varepsilon_3 + \binom{n}{1}\varepsilon_4 + \varepsilon_5$.

Exemple 1. - Pour les anneaux de Golod [4], si l'on pose $c_i = \dim_K H_i$ pour $i \geq 1$, notre formule donne directement $\varepsilon_5 = c_5 + c_1.c_3 + c_2 + \binom{c_2}{2} + c_1\binom{c_1}{2} - \binom{c_1}{3}$. Ce résultat peut être retrouvé, compte tenu de la remarque (6.2) puisque l'on sait [4] que l'on a alors :

$$P_R(Z) = \frac{(1+Z)^n}{1 - \sum_{i=1}^{n} c_i Z^{i+1}} .$$

Exemple 2. - Soit k un corps commutatif et soit $S = k[X_1,\dots,X_n]$ l'anneau de polynômes à n indéterminées $X_1,\dots,X_n$ où $n \geqslant 4$. On considère l'anneau $R = S/I$ où l'idéal I est donné par :

$$I = \sum_{i,j} S(X_iX_j - \lambda_{i,j}\, X_1^2) + (SX_1+\dots+SX_n)^3 \;;$$

les λ_{ij} $1 \leqslant i,j \leqslant n$ étant des éléments de k tels que $\lambda_{11}=1$, $\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$ et tels que le déterminant de la matrice (λ_{ij}) soit non nul.

Nous notons t_i la classe de X_i modulo I et $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de R. L'anneau R a été construit dans [11]. Si H_* désigne l'homologie du complexe de Koszul de R, on sait que $H_i.H_j = 0$ si $2 \leqslant i+j < n$ et que R est un anneau de Gorenstein artinien [11]; On sait alors par [3] que $H_i.H_{n-i}$ est un k-espace vectoriel de dimension 1 pour $0 \leqslant i \leqslant n$; la multiplication dans l'algèbre H_* n'est donc pas triviale.

D'après [11], on a $\mathrm{Ann}_R \mathfrak{m} = t_1^2 = \omega$. De plus, des cycles relèvant une base de H_1 sont donnés par les t_jT_i avec $i \leqslant j$ et $(i,j) \neq (1,1)$ de sorte que $\varepsilon_1 = \frac{n(n+1)}{2} - 1$. Or par [11], il existe des éléments $\omega_1,\dots,\omega_n$ de R tels que $\omega_i t_j = 0$ pour $j \neq i$ et $\omega_i t_i = \omega$. Considérons alors pour $n=5$ trois cycles quelconques t_jT_i $i \leqslant j$ $(i,j) \neq (1,1)$, $t_\ell T_k$ $k \leqslant \ell$ $(k,\ell) \neq (1,1)$ et t_vT_u, $u \leqslant v$, $(u,v) \neq (1,1)$. Il existe des entiers p et q, $1 \leqslant p \leqslant 5$, $1 \leqslant q \leqslant 5$ tels que p soit distincts de i,k,u,v et tel que q soit distinct de i,j,k,u. Mais on a :

$$(t_jT_i)(t_\ell T_k) = \lambda_{j\ell}\, t_1^2\, T_iT_k = \lambda_{j\ell}\, \omega_p t_p\, T_iT_k = \lambda_{j\ell}\, \omega_p\, d(T_pT_iT_k)$$

$$(t_\ell T_k)(t_vT_u) = \lambda_{\ell v}\, t_1^2\, T_kT_u = \lambda_{\ell v}\omega_q\, t_qT_kT_u = \lambda_{\ell v}\omega_q\, d(T_qT_kT_u) \;.$$

Avec les notations des §1,2 et 3, on observe que :

$\langle \{t_jT_i\}, \{t_\ell T_k\}, \{t_vT_u\} \rangle$ contient la classe d'homologie de $t_jT_i\ \lambda_{\ell v}\omega_qT_qT_kT_u + \lambda_{j\ell}\,\omega_pT_pT_iT_kt_vT_u$; mais par le choix de ω_p et ω_q, ce dernier terme est nul et comme $Z_1.Z_3 \subset B_4$ on en déduit que l'on a ici $\langle H_1,H_1,H_1 \rangle = 0$ et par suite, nous obtenons :

$$\varepsilon_5 = \varepsilon_1\,\varepsilon_3 + \varepsilon_2 + \binom{\varepsilon_2}{2} - \binom{\varepsilon_1}{3}$$

Vérification. - Par [11], on sait que la série de Poincaré de R est donnée par :

$$P_R(Z) = \frac{1}{1 - 5Z + Z^2} \;.$$

Compte tenu de la remarque (6.2), on en déduit la valeur de ε_i pour $1 \leqslant i \leqslant 5$, on trouve :

$\varepsilon_1 = 14$, $\varepsilon_2 = 35$, $\varepsilon_3 = 126$, $\varepsilon_4 = 504$, $\varepsilon_5 = 2030$

et l'application directe de la formule ci-dessus redonne la même valeur.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. AUSLANDER et M. BRIDGER. - Stable module theory memoirs of the american mathematical society n°94, (1969).

[2] L.L. AVRAMOV. - On the Hopf algebra of a local ring math. U.S.S.R. Izvestija Vol. 8, n°2, (1974), p.259-284.

[3] L.L. AVRAMOV et E.S. GOLOD. - Homology algebra of the Koszul complex of a local Gorenstein ring. Mathematical notes, vol 9, (1971) p.30-32.

[4] E.S. GOLOD. - On the homology of some local rings Soviet Math. Dokl. 3 (1962) p.745-748.

[5] T.H. GULLIKSEN. - A proof of the existence of minimal R-algebra resolutions.- Acta. Math., 120 (1968) p.53-58.

[6] T.H. GULLIKSEN. - A homological characterization of local complete intersections. - Compositio Mathematica, vol 23, Fasc.3, (1971) p.251-255.

[7] V.K.A.M. GUGENHEIM et J.P. MAY. - On the theory and applications of differential torsion products. - Memoirs of the American mathematical society n°142, (1974).

[8] G. LEVIN. - Local rings and Golod homomorphisms.Journal of Algebra 37, (1975) p.266-289.

[9] J.P. MAY. - Matric massey products. - Journal of Algebra 12, (1969) p.533-568.

[10] M. PAUGAM. - Sur les invariants homologiques des anneaux locaux noethériens : un calcul de la cinquième déflection - comptes rendus de l'Académie des Sciences - Paris - à paraître.

[11] H. RAHBAR ROCHANDEL. - Relation entre la série de Betti d'un anneau local de Gorenstein R. et celle de l'anneau R/socle(R) - Séminaire Paul Dubreil Université Pierre et Marie Curie 1976/77. Exposé du 13.12.76

[12] M. SAKUMA et H. OKUYAMA. - On the Betti series of local rings. Journal of Mathematics - Tokushima University Vol 1, (1967), p.1-10 et Correction vol 2, (1968), p.31-32.

[13] M. SAKUMA et H. OKUYAMA. - A note on higher déflections of a local ring. - Journal of Math. Tokushima University vol. 3, (1969), p.25-36.

[14] G. SCHEJA. - Über Bettizahlen lokaler Ringe. Math. Annalen 155, (1964), p.155-172.

[15] J.P. SERRE. - Algèbre locale multiplicités. - Lecture Notes in Mathematics n°11, Berlin, Springer-Verlag, (1965).

[16] J. TATE. - Homology of noetherian rings and local rings, Illinois J. Math. 1, (1957), p.14-27.

[17] H. UEHARA. - Homological invariants of local rings. Nagoya Math. J. 22 (1963) p.219-227.

[18] H. WIEBE. - Uber homologische Invarianten lokaler Ringe. Math. Annalen 179 (1969), p.257-274.

Manuscrit remis le 6.12.76

Michel PAUGAM
Université de Caen
14032 CAEN Cedex

Relations entre la série de Betti d'un anneau local de Gorenstein R et celle de l'anneau R/Socle R

par Hamid RAHBAR-ROCHANDEL

Introduction

Dans ce travail, nous déterminons une relation entre la série de Betti d'un anneau local de Gorenstein (R,m,k) et celle de l'anneau $\tilde{R} = R/\text{Socle } R$. Le cas le plus important est le cas où m n'est pas un idéal principal. On trouve alors :

$$P_{\tilde{R}} = P_R + Z^2 P_R P_{\tilde{R}} \quad .$$

Cette relation a été démontrée par Gulliksen dans (3) pour les anneaux d'intersections complètes et par Levin dans (5) pour les anneaux de Gorenstein (R,m,k) vérifiant $\dim_k m/m^2 \leq 3$.

La méthode utilisée ici est la suivante : pour un idéal I de R inclus dans m^2 , on construit une résolution libre de k sur R/I (k étant considéré alors comme le corps résiduel de l'anneau local R/I) à partir d'une résolution libre minimale de I et de la résolution X de k sur R introduite par Tate dans (9) (prop. 1). Nous donnons ensuite des conditions suffisantes pour que Y

soit minimale (prop. 2). Ces conditions sont vérifiées dans un certain nombre de cas connus (par exemple quand $I = (t)$ où $t \in m^2$ est non diviseur de 0) mais surtout dans le cas d'un anneau de Gorenstein (R,m,k) de profondeur nulle dont l'idéal maximal m n'est pas principal et quand $I = \text{Socle } R$ (prop. 3). On trouve alors la relation citée ci-dessus entre P_R et $P_{\tilde{R}}$.

Nous donnons finalement, dans le cas d'un anneau local de Gorenstein (R,m,k) vérifiant les conditions ci-dessus, des conditions sur $H(E)$ (E = le complexe de Koszul associé à un système générateur minimal de m) pour que l'anneau $R/\text{Socle } R$ soit un anneau de Golod (prop. 6) et trouvons alors la série de Betti de R. On trouve de cette manière la série de Betti d'un anneau local de Gorenstein (R,m,k) de profondeur nulle vérifiant $\dim_k m/m^2 = 4$ et $H_1(E)^2 = 0$ (Remarque de la Prop. 7). Nous donnons à la fin, un exemple d'anneau local de Gorenstein R tel que $R/\text{Socle } R$ soit un anneau de Golod.

Soient (R,m,k) un anneau local noethérien, $I \subseteq m^2$ un idéal de R, $\tilde{R} = R/I$ et $\tilde{m} = m/I$. $\tilde{R}/\tilde{m} = k$ et $(\tilde{R},\tilde{m},k)$ est un anneau local noethérien. Le but de cette partie est de construire une résolution libre de k sur $\tilde{R}$ à partir des résolutions minimales libres de I et de k sur R.

Dans la suite, on désigne par $(t_1,\dots,t_n)$ un système générateur minimal (en abrégé s.g.m) de m et par $E = \Lambda \bigoplus_{i=1}^{n} RT_i$; $\partial T_i = t_i$ le complexe de Koszul associé aux t_i. Nous rappelons la construction de l'algèbre graduée différentielle strictement anticommutative introduite par Tate dans (9). On définit d'abord par récurrence les algèbres $X^{(t)}$: $X^{(0)} = R$, $X^{(1)} = E$; si $X^{(p)}$ est défini et $\varepsilon_p = \dim_k H_p(X^{(p)})$, on pose $X^{(p+1)} = X^{(p)} < \pi_1,\dots,\pi_{\varepsilon_p} >$; $\partial\pi_i = A_i$ où les π_i sont des variables libres de degré $p+1$ et les A_i sont des éléments de $Z_p(X^{(p)})$ tels que leurs classes dans $H_p(X^{(p)})$ forment une base de celui-ci. Il existe une inclusion naturelle $X^{(p)} \longrightarrow X^{(p+1)}$ et en identifiant $X^{(p)}$ à une sous-algèbre de $X^{(p+1)}$ on a $X^{(p)}_j = X^{(p+1)}_j$ pour tout $j \leq p$. On pose $X = \varinjlim X^{(p)}$ et on a $X_p = X^{(p)}_p = X^{(p+1)}_p = \dots = X^{(p+j)}_p = \dots$. X est une résolution libre minimale de k sur R ; plus précisément $Z_j(X^{(p)}) \subseteq mX^{(p)}$. Pour plus de détail, voir (2), (7) et (9).

<u>Lemme</u> 1 - (On se place dans les hypothèses ci-dessus). <u>Soit</u>

$$\cdots \longrightarrow L_{p+1} \longrightarrow L_p \longrightarrow L_{p-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_0 \longrightarrow I \longrightarrow 0$$

<u>une résolution minimale de</u> I <u>sur</u> R ; <u>alors il existe des morphismes</u>

$g_i : L_i \longrightarrow X_{i+1}$ vérifiant :

i) $\partial_{i+1} \circ g_i(x) \in Z_i(X) \cap IX_i$, $\forall i \in N$, $\forall x \in L_i$;

ii) Si $z \in Z_i(X) \cap IX_i$, $\exists z' \in L_i$ tel que $\partial_{i+1} \circ g_i(z') - z \in IZ_i(X)$.

Démonstration – $\mathrm{Tor}_i^R(I,k) = L_i \otimes k = L_i/mL_i$. De même $\mathrm{Tor}_i^R(I;k) = H_i\ (I \otimes X)$. Or $I \otimes X$ peut s'identifier au sous-complexe IX de X . Moyennant cette identification, on a $Z_i(I \otimes X) = IX_i \cap Z_i(X)$, $B_i(I \otimes X) = IZ_i(X)$. On a donc le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} & & & L_i \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & IZ_i(X) \arrow[r] & IX_i \cap Z_i(X) \arrow[r, "\pi"] & L_i/mI_i \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & & & 0 & \end{tikzcd}$$

Si $(e_1,\dots,e_s)$ est une base de L_i , $\forall p$, $\exists v_p \in IX_i \cap Z_i(X)$ tel que $\pi(v_p) = \bar{e}_p$. Soit $w_p \in X_{i+1}$ vérifiant $\partial_{i+1}(w_p) = v_p$. On définit $g_i : L_i \longrightarrow X_{i+1}$ en posant $g_i(e_p) = w_p$, $\forall p = 1\dots,s$. g_i vérifie bien i) et ii).

Proposition 1 – Soit (L_i,g_i) comme ci-dessus. On définit par récurrence les $\tilde{R}$-modules Y_p de la manière suivante : $Y_o = \tilde{R}$, $Y_1 = X_1 \otimes \tilde{R} = \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} \tilde{R}T_i$, si Y_j est défini pour $j \leq p$, on pose $Y_{p+1} = X_{p+1} \otimes \tilde{R} \oplus (\overset{p}{\underset{j=1}{\oplus}} L_{p-j} \otimes Y_{j-1})$; alors, il existe des morphismes de $\tilde{R}$-modules $d_p : Y_p \longrightarrow Y_{p-1}$ tel que

$$\cdots \longrightarrow Y_{p+1} \xrightarrow{d_{p+1}} Y_p \xrightarrow{d_p} Y_{p-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Y_0 \longrightarrow k \longrightarrow 0$$

soit une résolution libre de k sur $\tilde{R}$.

Démonstration – Nous allons construire les d_p par récurrence en partant de l'hypothèse de récurrence suivante :

i) $d_o = 0$, $d_1 = \partial_1 \otimes 1_{\tilde{R}} : X_1 \otimes \tilde{R} \longrightarrow X_0 \otimes \tilde{R} = \tilde{R}$

ii) Pour $i+j < p$, il existe un morphisme $f_{i,j} : L_i \otimes Y_j \longrightarrow Y_{i+j+1}$ de $\tilde{R}$-module rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} L_i \otimes Y_j \arrow[r, "f_{i,j}"] \arrow[d, "1_{L_i} \otimes d_j"] & Y_{i+j+1} \arrow[d, "d_{i+j+1}"] \\ L_i \otimes Y_{j-1} \arrow[r, "f_{i,j-1}"] & Y_{i+j} \end{tikzcd}$$

iii) $\mathrm{Im}\, f_{i,o} \subseteq X_{i+1} \otimes \tilde{R}$, $\mathrm{Im}\, f_{i,1} \subseteq X_{i+2} \otimes \tilde{R} \subseteq Y_{i+2}$ et $\mathrm{Im}\, f_{i,j}$ est inclus dans $X_{i+j+1} \otimes \tilde{R} \oplus L_{i+j-1} \otimes Y_o \oplus \ldots \oplus L_{i+1} \otimes Y_{j-2} \subseteq Y_{i+j+1}$;

iv) $d_{q|X_q \otimes \tilde{R}} = \partial_q \otimes 1_{\tilde{R}} : X_q \otimes \tilde{R} \longrightarrow X_{q-1} \otimes \tilde{R} \subseteq Y_{q-1}$

$d_{q|L_{q-j} \otimes Y_{j-2}} = f_{q-j,j-2} - 1_{L_{q-j}} \otimes d_{j-2} \qquad \forall j \leq q \leq p$;

v) la suite $\ldots \longrightarrow Y_p \longrightarrow Y_{p-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow Y_o \xrightarrow{\eta} k \longrightarrow 0$ où η est la surjection canonique de $\tilde{R}$ sur k , est exacte.

Avant de commencer les étapes de la récurrence, construisons $f_{p,o}$ et $f_{p,1}$. g_p étant le morphisme défini dans le lemme 1, posons $f_{p,o} = g_p \otimes 1_{\tilde{R}}$ et $f_{p,1}(x_p \otimes T_i) = T_i\, g_p(x_p) \otimes \bar{1}$.

Définissons $d_1 : Y_1 = X_1 \otimes \tilde{R} \longrightarrow X_o \otimes \tilde{R}$ par $d_1 = \partial_1 \otimes 1_{\tilde{R}}$. Le produit tensoriel étant exact à droite, la suite $Y_1 \longrightarrow Y_o \xrightarrow{\eta} k \longrightarrow 0$ est une suite exacte de $\tilde{R}$-modules, de même ii), iii) et iv) sont vérifiées trivialement. Supposons que l'hypothèse de récurrence est vérifiée au rang p et vérifions le au rang $p+1$. Conformément au iv), définissons $d_{p+1} : Y_{p+1} \longrightarrow Y_p$ par :

$$d_{p+1}|_{X_{p+1} \otimes \tilde{R}} = \partial_{p+1} \otimes 1_{\tilde{R}} \quad \text{et} \quad d_{p+1}|_{L_{p-j} \otimes Y_{j-1}} = f_{p-j,j-1} - (1_{L_{p-j}} \otimes d_{j-1}).$$

$d_p \circ d_{p+1} = 0$ en effet, si $z = u \otimes v \in L_{p-j} \otimes Y_{j-1}$ (avec $j \geq 2$) on a $d_{p+1}(z) = f_{p-j,j-1}(u \otimes v) - u \otimes d_{j-1}(v)$ et $d_p \circ d_{p+1}(z) = d_p \circ f_{p-j,j-1}(u \otimes v) - d_p(u \otimes d_{j-1}(v)) = f_{p-j,j-2}(u \otimes d_{j-1}(v)) - f_{p-j,j-2}(u \otimes d_{j-1}(v)) + u \otimes d_{j-2} \circ d_{j-1}(v) = 0$. Si $j=1$, $z = u \otimes \bar{1}$ et $d_{p+1}(z) = g_{p-1}(u) \otimes \bar{1}$.

On a alors :

$$d_p \circ d_{p+1}(z) = d_p(g_{p-1}(u) \otimes \bar{1}) = \partial_p \circ g_{p-1}(v) \otimes \bar{1} = 0$$

et finalement, si $z \in X_{p+1} \otimes \tilde{R}$, l'égalité $d_{p+1} \circ d_p(z) = 0$ est évidente.

Vérifions maintenant que la suite $Y_{p+1} \longrightarrow Y_p \longrightarrow Y_{p-1}$ est exacte. Soit $z = x_p \otimes \bar{1} + z_{p-2} + \ldots + z_o \in Y_p$ où $x_p \in X_p$ et $z_{p-j} \in L_{p-j} \otimes Y_{j-2}$. Supposons que $d_p(z) = 0$ et montrons que $z \in \mathrm{Im}\, d_{p+1}$. En examinant la projection de $d_p(z)$ sur $L_o \otimes Y_{p-3}$ (si $p \geqslant 3$), on voit que $1_{L_o} \otimes d_{p-2}(z_o) = 0$; la suite $L_o \otimes Y_{p-1} \longrightarrow L_o \otimes Y_{p-2} \longrightarrow L_o \otimes Y_{p-3}$ étant exacte, il existe $y_o \in L_o \otimes Y_{p-1}$ tel que $(1_{L_o} \otimes d_{p-1})(y_o) = z_o$. $z + d_{p+1}(y_o)$ a une projection nulle sur $L_o \otimes Y_{p-2}$, on peut donc supposer que $z_o = 0$. De même si $z = x_p \otimes \bar{1} + z_{p-2} + \ldots + z_{p-j}$ et vérifie $d_p(z) = 0$, en examinant la projection de $d_p(z)$ sur $L_{p-j} \otimes Y_{j-3}$ (si $j \geqslant 3$) on voit que $(1_{L_{p-j}} \otimes d_{j-2})(z_{p-j}) = 0$ et donc il existe $y_{p-j} \in L_{p-j} \otimes Y_{j-1}$ vérifiant $(1_{L_{p-j}} \otimes d_{j-1})(y_{p-j}) = z_{p-j}$. $z + d_{p+1}(y_{p-j})$ a une projection nulle sur $L_{p-j} \otimes Y_{j-2}$ (ainsi que sur $L_{p-i} \otimes Y_{i-2}$ pour $j \leqslant i \leqslant p-2$) on peut supposer donc que $z_{p-j} = 0$. En continuant ce raisonnenemt, on peut ramener le problème au cas $z = x_p \otimes \bar{1} + v_{p-2} \otimes \bar{1}$ et
et $d_{p+1}(z) = 0$. $d_{p+1}(z) = \partial_p(x_p) \otimes \bar{1} + g_{p-2}(v_{p-2}) \otimes \bar{1} = 0$ ce qui entraîne $\partial_p(x_p) + g_{p-2}(v_{p-2}) \in IX_{p-1}$ et en composant avec ∂_{p-1} on trouve que $\partial_{p-1} \circ g_{p-2}(v_{p-2}) \in IZ_{p-2}(X)$ ce qui montre que $v_{p-2} \in mL_{p-2}$ (en effet $\overline{\partial_{p-1} \circ g_{p-2}} : L_{p-2}/mL_{p-2} \longrightarrow Z_{p-2}(X) \cap IX_{p-2}/IZ_{p-2}(X)$ est un isomorphisme). $v_{p-2} = t_1 W_1 + \ldots + t_n W_n$; si $W = \sum_{i=1}^{n} W_i \otimes (T_i \otimes \bar{1})$, $W \in L_{p-2} \otimes Y_1$ et $z + d_{p+1}(W)$ a une projection nulle sur $L_{p-2} \otimes Y_o$. On peut donc supposer que $z = x_p \otimes \bar{1}$ et $d_{p+1}(z) = \partial_p(x_p) \otimes \bar{1} = 0$, ce qui donne $\partial_p(x_p) \in Z_{p-1}(X) \cap IX_{p-1}$. D'après le lemme 1, il existe $u \in L_{p-1}$ tel que $\partial_p(x_p) - \partial_p \circ g_{p-1}(u) \in IZ_{p-1}(X)$ donc $x_p - g_{p-1}(u) - w = \partial_{p+1}(x_{p+1})$ où $w \in IX_p$ et $x_{p+1} \in X_{p+1}$.
$z = x_p \otimes \bar{1} = d_{p+1}(x_{p+1} \otimes \bar{1} + u \otimes \bar{1})$ i.e. $z \in \mathrm{Im}\, d_{p+1}$

c.q.f.d.

<u>Remarque</u> 1 - Au cours de la démonstration nous avons aussi démontré que si $z = x_p \otimes \bar{1} + z_{p-2} + \ldots + z_{p-j}$ où $x_p \in X_p$, $z_{p-i} \in L_{p-i} \otimes Y_{i-2}$ et $2 \leqslant j$ (resp. $z = x_p \otimes \bar{1}$ où $x_p \in X_p$), et si $d_p(z) = 0$ alors, il existe y élément de $X_{p+1} \otimes \tilde{R} \oplus L_{p-1} \otimes Y_o \oplus \ldots \oplus L_{p-j} \otimes Y_{j-1}$ (resp. $y \in X_{p+1} \otimes \tilde{R} \oplus L_{p-1} \otimes Y_o$) tel que $z = d_{p+1}(y)$.

Construisons maintenant les $f_{i,j}$ pour $i+j = p$. Si $j=0$ ou $j=1$, $f_{i,j}$ est déjà construit ; on a bien $\mathrm{Im}\, f_{p,o} \subseteq X_{p+1} \otimes \tilde{R}$, $\mathrm{Im}\, f_{p-1,1} \subseteq X_{p+1} \otimes \tilde{R}$ et les deux diagrammes

$$\begin{tikzcd} L_p \otimes Y_0 \arrow[r, "f_{p,o}"] \arrow[d, "1_{L_p} \otimes d_o"] & Y_{p+1} \arrow[d, "d_{p+1}"] \\ 0 \arrow[r, "o"] & Y_p \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} L_{p-1} \otimes Y_1 \arrow[r, "f_{p-1,1}"] \arrow[d, "1_{L_{p-1}} \otimes d_1"] & Y_{p+1} \arrow[d, "d_{p+1}"] \\ L_{p-1} \otimes Y_o \arrow[r, "f_{p-1,o}"] & Y_p \end{tikzcd}$$

sont trivialement commutatifs. Supposons donc que $j \geq 2$ et $i+j = p$. Soient A une base de R-module libre L_i et B une base de $\tilde{R}$-module libre Y_j . $N = \{u \otimes v \mid u \in A \text{ et } v \in B\}$ est une base de $\tilde{R}$-module libre $L_i \otimes Y_j$. Pour construire $f_{i,j}$ il suffit de déterminer $f_{i,j}(z)$ quand z parcourt N . On remarque que pour $u \in A$ et $v \in B$, on a : $d_p \circ f_{i,j-1} (u \otimes d_j(v)) =$ $f_{i,j-2} \circ 1_{L_i} \otimes d_{j-1} \circ 1_{L_i} \otimes d_j (u \otimes v) = 0$; comme par hypothèse de récurrence $\operatorname{Im} f_{i,j-1} \subseteq X_p \otimes \tilde{R} \oplus L_{p-2} \otimes Y_o \oplus \dots \oplus L_{i+1} \otimes Y_{j-3}$, il existe $w \in X_{p+1} \otimes \tilde{R} \oplus L_{p-1} \otimes Y_o \oplus \dots \oplus L_{i+1} \otimes Y_{j-2}$ vérifiant $d_{p+1}(w) = f_{i,j-1} \circ 1_{L_i} \otimes d_j (u \otimes v)$. On pose $f_{i,j} (u \otimes v) = w$. Par construction, $f_{i,j}$ vérifie bien les conditions ii) et iii), ce qui termine la démonstration.

<u>Proposition</u> 2 - <u>On se place dans les hypothèses du lemme</u> 1 <u>et de la proposition précédente</u> ; <u>si</u> $\operatorname{Im} g_i \subseteq mX_{i+1}$ <u>et</u> $g_i(x)\, g_j(y) \in IX_{i+j+2}$ $\forall i$, $\forall j$, $\forall x \in L_i$, $\forall y \in L_j$ <u>alors</u>, $\dots Y_p \longrightarrow Y_{p-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow Y_o$ <u>est une résolution minimale de</u> k <u>sur</u> $\tilde{R}$.

<u>Démonstration</u> - Définissons $f_{p,j} : L_p \otimes Y_j \longrightarrow Y_{p+j+1}$ de la manière suivante : si $x_p \in L_p$ et $z = x_j \otimes \bar{1} + z_{j-2} + \dots + z_o \in Y_j$ (où $x_j \in X_j$ et $z_{j-i} \in L_{j-i} \otimes Y_{i-2}$) on pose $f_{p,j} (x_p \otimes z) = x_j\, g_p(x_p) \otimes \bar{1} \in X_{p+j+1} \otimes \tilde{R} \subseteq Y_{p+j+1}$ et on définit ensuite les $d_r : Y_r \longrightarrow Y_{r-1}$ par récurrence comme dans la condition iv) de la proposition 1 . Pour montrer que Y est une résolution libre de k sur $\tilde{R}$, il suffit de montrer que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} L_p \otimes Y_j \arrow[r, "f_{p,j}"] \arrow[d, "1_{L_p} \otimes d_j"] & Y_{p+j+1} \arrow[d, "d_{p+j+1}"] \\ L_p \otimes Y_{j-1} \arrow[r, "f_{p,j-1}"] & Y_{p+j} \end{tikzcd}$$

et ceci $\forall p$, $\forall j$ (en posant $Y_{-1} = 0$). Si $x_p \in L_p$ et $z \in Y_j$ sont comme ci-dessus, on a d'une part :

$$x_p \otimes z \xmapsto{f_{p,j}} x_j g_p(x_p) \otimes \bar{1} \xrightarrow{d_{p+j+1}} \partial_j(x_j)\, g_p(x_p) \otimes \bar{1}$$

et d'autre part :

$$x_p \otimes z \xrightarrow{1_{L_p} \otimes d_j} x_p \otimes d_j(z) \xrightarrow{f_{p,j-1}} f_{p,j-1}\,(x_p \otimes d_j(z))$$

tout revient donc à montrer que $f_{p,j-1}\,(x_p \otimes d_j(z)) = \partial_j(x_j)\, g_p(x_p) \otimes \bar{1}$.
$d_j(z) = \partial_j(x_j) \otimes \bar{1} + \sum_{i=2}^{j} f_{j-i,i-2}(z_i) - \sum_{i=2}^{j} 1_{L_{j-i}} \otimes d_{i-2}(z_i)$. La projection de $d_j(z)$ sur $X_{j-1} \otimes \tilde{R}$ s'écrit sous la forme $\partial_j(x_j) \otimes \bar{1} + W \otimes \bar{1}$ où W provient des $f_{j-i,i-2}(z_i)$ et compte tenu de la manière dont ces termes ont été définis, W s'écrit comme une somme des termes de la forme $u_i g_r(v_i)$. On a donc $f_{p,j-1}(x_p \otimes d_j(z)) = \partial_j(x_j)\, g_p(x_p) \otimes \bar{1} + W g_p(x_p) \otimes \bar{1}$. L'hypothèse $\operatorname{Im} g_i \cdot g_j \subseteq IX_{i+j+2}$ entraîne $W g_p(x_p) \otimes \bar{1} = 0$ et par conséquent, le diagramme est bien commutatif.

Montrons que la résolution Y est une résolution minimale. Il est évident que $\operatorname{Im} f_{i,j} \subseteq \tilde{m}\, Y_{i+j+1}$; un simple raisonnement par récurrence montre que $\operatorname{Im} d_p \subseteq \tilde{m}\, Y_{p-1}$ i.e. la résolution est minimale.

La principale application de la proposition 2 est la proposition suivante :

<u>Proposition</u> 3 - <u>Soient</u> (R,m,k) <u>un anneau local de Gorenstein de profondeur nulle</u>, $I = (\omega)$ <u>son soble et</u> $\tilde{R} = R/I$. <u>Alors</u>

i) <u>Si</u> $n = \dim_k m/m^2 = 1$ <u>et</u> $\omega \in m^2$, <u>on a</u> $P_R = P_{\tilde{R}}$

<u>Si</u> $n = \dim_k m/m^2 = 1$ <u>et</u> $\omega \in m - m^2$, <u>on a</u> $P_R = \frac{1+z}{1-z^2}$ <u>et</u> $P_{\tilde{R}} = 1$

ii) <u>Si</u> $n = \dim_k m/m^2 > 1$, <u>on a</u> $\omega \in m^2$ <u>et</u> $P_{\tilde{R}} = P_R + Z^2 P_R P_{\tilde{R}}$.

<u>Démonstration</u> - Si $n=1$ et $\omega \in m^2$, R et $\tilde{R}$ sont tous les deux des anneaux d'intersections complètes ou tous les deux des corps (selon qu'on ait $\omega \neq 0$ ou $\omega = 0$) et on a $P_R = P_{\tilde{R}} = \frac{1+Z}{1-Z^2}$ ou $P_R = P_{\tilde{R}} = 1$ (voir (6), Page 7, théorème 4).

Si $n=1$ et $\omega \in m-m^2$, on a $P_R = \dfrac{1+Z}{1-Z^2}$ et $P_{\tilde{R}} = 1$ (voir (6)).

Si $n>1$, $\omega \in m^2$: en effet, on sait qu'il existe j tel que $m^j = (\omega)$; l'hypothèse $\omega \in m-m^2$ entraînerait alors $m = I = (\omega)$ i.e. $n=1$. On a donc $\omega \in m^2$.

Nous supposerons dans la suite que $\dim_k m/m^2 = n > 1$ et nous construisons les g_i (notation de la proposition 1) de manière que les conditions de la proposition 2 soient vérifiées. Pour cela, nous avons besoin des lemmes suivants :

<u>Lemme</u> 2 - <u>Soient</u> (R,m,k) <u>un anneau local noethérien et</u> $X^{(j)}$ $(j = 1,\dots,p,\dots)$ <u>l'algèbre différentielle graduée définie au début du chapitre</u>. <u>On suppose que</u> $\forall j \leq p$, $X^{(j+1)} = X^{(j)} < V_1 , \dots, V_{\varepsilon_j} >$ <u>où</u> $\partial V_i \in Z_1(E)\, X^{(j)} + E_2X^{(j)}$. <u>Alors</u>, <u>si</u> $M \in Z_{p+1}(X^{(p+1)})$, <u>il existe un cycle</u> $M' \in Z_1(E)\, X^{(p)} + E_2X^{(p)}$ <u>homologue à</u> M <u>dans</u> $X^{(p+1)}$.

<u>Démonstration du lemme</u> 2 - $M = \sum_{i=1}^{s} \delta_i M_i$ où M_i est un monôme de degré total $p+1$, construit à l'aide des variables libres $T_1 ,\dots, T_n$, $S_1 ,\dots, S_{\varepsilon_1}$ $\Pi_1 ,\dots, \Pi_{\varepsilon_p}$, introduites pour la construction de $X^{(1)} = E$, $X^{(2)} ,\dots, X^{(p+1)}$ et les δ_i sont des éléments de m . En changeant au besoin la numérotation, on peut supposer que

$\forall j = 1,\dots,r$ $M_j \in E_1X^{(p+1)} - E_2X^{(p+1)}$ et

$\forall i = r+1 ,\dots, s$ $M_i \in E_2X^{(p+1)} \cup (X^{(p+1)} - E_1X^{(p+1)})$. Par hypothèse, si $i>r$, $\partial M_i \in E_1X^{(p)}$ et si $j \leq r$, $M_j = T_{j_k} M_{j,j_k}$ où M_{j,j_k} est un monôme dans lequel ne figure aucun des T_i . On peut donc écrire : $\sum_{i=1}^{r} \delta_i M_i = \sum_{i=1}^{q} (\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}T_j)K_i$ où les K_i sont des monômes non nuls et deux à deux distincts dans lesquels ne figure aucun des T_i .

$$M = \sum_{i=1}^{q} (\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}T_j)K_i + \sum_{i=r+1}^{s} \delta_i M_i$$

$$0 = \partial M = \sum_{i=1}^{q}(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}t_j)K_i - \sum (\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}T_j)\, \partial K_i + \partial(\sum_{i=1+r}^{s} \delta_iM_i)$$

Donc $\sum_{i=1}^{q}(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}t_j)K_i \in E_1X^{(p)}$, ce qui entraîne $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}t_j = 0$ i.e.

$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\ T_j \in Z_1(E)$. On sait d'autre part que $\delta_i \in m$; soit alors $P_i \in E_1$ tel que $\partial P_i = \delta_i$. $M = \sum_{i=1}^{q} (\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\ T_j)K_i + \sum_{i=r+1}^{s} P_i\,\partial M_i + \partial(\sum_{i=r+1}^{s} P_i M_i)$. Posons $M' = \sum_{i=1}^{q} (\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\ T_j)K_i + \sum_{i=r+1}^{s} P_i\,\partial M_i$. $M_i \in E_1\ X^{(p)}$ si $i > r$, $P_i \in E_1$ donc $P_i\,\partial M_i \in E_2\ X^{(p)}$ et $M' \in Z_1(E)\ X^{(p)} + E_2\ X^{(p)}$.

<u>Remarque</u> - En procédant par récurrence, on peut construire les $X^{(p)}$ de manière que $\forall q \geq 2$, si $X^{(q)} = X^{(q-1)} < W_1, \dots, W_{\varepsilon_{q-1}}$; $\partial W_i = w_i >$, $w_i \in Z_1(E)\ X^{(q-1)} + E_2 X^{(q-1)}$.

On supposera dans la suite que les $X^{(q)}$ vérifient cette propriété.

<u>Lemme</u> 3 - <u>Soient</u> (R,m,k) <u>un anneau local de Gorenstein de profondeur zéro et</u> $I = (\omega)$ <u>son socle</u>. <u>On pose</u> $n = \dim m/m^2$ <u>et on suppose que</u> $n > 1$. <u>Alors</u> :

i) <u>il existe</u> $A \in Z_1(E)$, $B \in Z_{n-1}(E)$ <u>vérifiant</u> $AB = \omega T_1 \dots T_n$

ii) <u>il existe des éléments</u> $a_1, \dots, a_n \in m$ $(n = \dim_k m/m^2$ <u>vérifiant</u> $\omega T_1 \dots \hat{T}_j \dots T_n = \partial((-1)^{j+1}\ a_j T_1\ \dots\ T_n)$ <u>pour</u> $j = 1, \dots, n$.

<u>Démonstration</u> - D'après (1), la multiplication $H_1(E) \times H_{n-1}(E) \longrightarrow H_n(E)$ est non dégénérée et $\dim_k H_n(E) = 1$; donc $H_1(E)\ H_{n-1}(E) = H_n(E)$ d'où i).
$\omega T_1 \dots \hat{T}_j \dots T_n \in Z_{n-1}(E)$ et $\forall D \in Z_1(E)$, $D \in mE_1$ donc $\omega T_1 \dots \hat{T}_j \dots T_n D = 0$, ce qui montre que $\omega T_1 \dots \hat{T}_j \dots T_n \in B_{n-1}(E)$, d'où ii).

Pour la suite, nous choisissons des éléments $A_1, \dots, A_{\varepsilon_1}$ dans $Z_1(E)$ tels que leurs classes forment une base de $H_1(E)$ et tel qu'on ait $A_1 B = \omega T_1 \dots T_n$ $(B \in Z_{n-1}(E))$. On pose $F = X^{(2)} = E < S_1, \dots, S_{\varepsilon_1}$; $\partial S_i = A_i >$ deg $S_i = 2$ et on suppose que les $X^{(q)}$ $(q \geq 2)$ vérifient les conditions de la remarque du lemme 2 . On pose finalement $J = (a_1, \dots, a_n)$. $J \subseteq (I : m)$ d'après ii) du lemme 3 .

<u>Lemme</u> 4 - <u>Pour tout élément</u> D <u>de</u> $X_k^{(p)}$, <u>il existe un élément</u> U <u>de</u> $JX^{(p)} + \sum_{i \geq 1} BS_1^{(i)}\ X^{(p)}$ <u>vérifiant</u> $\omega D = \partial U$.

<u>Démonstration du lemme</u> 4 - Nous allons procéder par récurrence sur p . Il suffit de prouver le lemme quand D est un monôme.

<u>p=1</u> : $D \in E_k$; si $k < n$, alors $D = T_{i_1} \ldots T_{i_k}$. Il existe $j \leqslant n$ tel que $j \neq i_1, \ldots, j \neq i_k$. $\partial(a_j T_j D) = \omega D$. On peut donc poser $U = a_j T_j D \in JE$. Si $k=n$, $D = T_1 \ldots T_n$; $\partial(BS_1) = \omega D$, on peut donc poser $U = BS_1 \in BS_1 E$.

Supposons maintenant que l'hypothèse est vérifiée pour $j = 1, \ldots, p$ et que l'on a $X^{(p+1)} = X^{(p)} < \pi_1, \ldots, \pi_{\varepsilon_p} >$ où $\partial(\pi_i) \in Z_1(E)\, X^{(p)} + E_2\, X^{(p+1)}$.

$D = H\pi_1^{(u_1)} \ldots \pi_{\varepsilon_p}^{(u_{\varepsilon_p})}$ où H est un monôme appartenant à $X_j^{(p)}$, $\pi_i^{(0)} = 1$, $\pi_i^{(1)} = \pi_i$; $u_1, \ldots, u_{\varepsilon_p}$ sont des entiers positifs quelconques si $p+1$ est paire et $u_i = 0$ ou 1 si $p+1$ est impaire. On a aussi la relation

$$k = j + (p+1)\,(u_1 + \ldots + u_{\varepsilon_p}) \quad (D \in X_k^{(p+1)} \ , \ H \in X_j^{(p)}) \ .$$

Nous allons procéder une deuxième fois par récurrence qui portera sur $\ell = u_1 + \ldots + u_{\varepsilon_p}$.

Si $\ell = 0$, $D = H \in X_j^{(p)}$, donc en appliquant la première hypothèse de récurrence on a $\omega H = \partial U$ avec $U \in JX^{(p)} + \Sigma\, BS_1^{(i)}\, X^{(p)}$. Supposons l'hypothèse vérifiée si $u_1 + \ldots + u_{\varepsilon_p} < \ell$. On a la relation

$$\partial(a_1 T_1 D) = \omega D - a_1 T_1\, \partial(H)\, \pi_1^{(u_1)} \ldots \pi_{\varepsilon_p}^{(u_{\varepsilon_p})} + (-1)^{j+1}\, a_1 T_1 H\, \partial(\pi_1^{(u_1)} \ldots \pi_{\varepsilon_p}^{(u_{\varepsilon_p})}) .$$

Comme $\partial(\pi_i) \in mX^{(p)}$, $a_1\, \partial(\pi_i) \in \omega X^{(p)}$; par conséquent, $a_1 T_1 H\, \partial(\pi_1^{(u_1)} \ldots \pi_{\varepsilon_p}^{(u_{\varepsilon_p})})$ est une combinaison linéaire des éléments de la forme $\omega K\, \pi_1^{(u_1)} \ldots \pi_i^{(u_i - 1)} \ldots \pi_{\varepsilon_p}^{(u_{\varepsilon_p})}$ et ces éléments s'écrivent sous la forme $\partial(U)$ avec $U \in JX^{(p)} + \sum_i BS_1^{(i)}\, X^{(p)}$ (hypothèse de récurrence). Comme $a_1 T_1 D \in JX^{(p+1)}$, il suffit de prouver que $a_1 T_1\, \partial(H)\, \pi_1^{(u_1)} \ldots \pi_{\varepsilon_p}^{(u_{\varepsilon_p})} = \partial(U)$ avec $U \in JX^{(p)} + \Sigma\, BS_1^{(i)}\, X^{(p+1)}$. Or, $\partial(H) \in mX^{(p)}$ ce qui entraîne $a_1\, \partial(H) \in \omega X^{(p)}$ donc $a_1 T_1\, \partial(H) \pi_1^{(u_1)} \ldots \pi_{\varepsilon_p}^{(u_{\varepsilon_p})}$ s'écrit comme une combinaison linéaire des éléments de la forme $\omega T_1 K \pi_1^{(u_1)} \ldots \pi_{\varepsilon_p}^{(u_{\varepsilon_p})}$ où $K \in X_{j-1}^{(p)}$.

On voit donc qu'on peut supposer que H est de la forme T_1K. On recommence cette opération en écrivant :

$$\partial(a_2T_1T_2K\pi_1^{(u_1)}\dots\pi_{\varepsilon_p}^{(u_{\varepsilon_p})}) = -\omega D + a_2T_1T_2\partial(K)\pi_1^{(u_1)}\dots\pi_{\varepsilon_p}^{(u_{\varepsilon_p})}$$

$$+(-1)^{j+1}T_1T_2K\partial(\pi_1^{(u_1)}\dots\pi_{\varepsilon_p}^{(u_{\varepsilon_p})})$$

et les mêmes considérations montrent qu'on peut prendre D de la forme $T_1T_2L\pi_1^{(u_1)}\dots\pi_{\varepsilon_p}^{(u_{\varepsilon_p})}$.

Si $j<n$, au bout de j opérations, on ramène le problème au cas où D s'écrit sous la forme $T_1T_2\dots T_j\pi_1^{(u_1)}\dots\pi_{\varepsilon_p}^{(u_{\varepsilon_p})}$ et on écrit alors :

$$\partial(a_{j+1}T_1\dots T_jT_{j+1}\pi_1^{(u_1)}\dots\pi_{\varepsilon_p}^{(u_{\varepsilon_p})}) = (-1)^j\omega D + a_{j+1}T_1\dots T_{j+1}\partial(\pi_1^{(u_1)}\dots\pi_{\varepsilon_p}^{(u_{\varepsilon_p})})$$

et en appliquant l'hypothèse de récurrence à $a_{j+1}T_1\dots T_{j+1}\partial(\pi_1^{(u_1)}\dots\pi_{\varepsilon_p}^{(u_{\varepsilon_p})})$ on arrive à démontrer la proposition.

Si $j\geq n$, on arrive à ramener le problème au cas où $H=T_1\dots T_nM$ où M est un monôme de $X^{(p)}$ de degré total $j-n$ et on écrit alors :

$$\partial(BS_1M\pi_1^{(u_1)}\dots\pi_{\varepsilon_p}^{(u_{\varepsilon_p})}) = \omega D + (-1)^{n+1}BS_1\partial M\pi_1^{(u_1)}\dots\pi_{\varepsilon_p}^{(u_{\varepsilon_p})} +$$

$$(-1)^{j+1}BS_1M\partial(\pi_1^{(u_1)}\dots\pi_{\varepsilon_p}^{(u_{\varepsilon_p})}).\ \partial(\pi_1^{(u_1)}\dots\pi_{\varepsilon_p}^{(u_{\varepsilon_p})})$$

s'écrit comme une combinaison linéaire des monômes de la forme $\partial(\pi_i)\pi_1^{(u_1)}\dots\pi_i^{(u_i-1)}\dots\pi_{\varepsilon_p}^{(u_{\varepsilon_p})}$ et comme $\partial(\pi_i)\in Z_1(E)\,X^{(p)}+E_2\,X^{(p)}$, $B\partial(\pi_i)\in BZ_1(E)\,X^{(p)}\subset IX^{(p)}$ donc $BS_1M\partial(\pi_1^{(u_1)}\dots\pi_{\varepsilon_p}^{(u_{\varepsilon_p})})$ est une combinaison linéaire des monômes de la forme $\omega N\pi_1^{(u_1)}\dots\pi_i^{(u_i-1)}\dots\pi_{\varepsilon_p}^{(u_{\varepsilon_p})}$. En appliquant l'hypothèse de récurrence à ces éléments, on arrive à les mettre sous la forme $\partial(U)$ avec $U \in JX^{(p+1)} + \Sigma\, BS_1^{(i)}\, X^{(p)}$. De même, compte tenu du fait que aucun T_i ne figure dans M (sinon $T_1 \dots T_n M = 0!$) $\partial(M) \in Z_1(E)\, X^{(p)} + E_2\, X^{(p)}$, donc $BS_1\, \partial M\, \pi_1^{(u_1)} \dots \pi_{\varepsilon_p}^{(u_{\varepsilon_p})}$ s'écrit comme une combinaison linéaire des monômes de la forme $\omega T_1 \dots T_n S_1 Q\, \pi_1^{(u_1)} \dots \pi_{\varepsilon_p}^{(u_{\varepsilon_p})}$ où Q est un monôme de $X^{(p)}$ de degré $j-(n+2)$. On peut donc supposer que $H = T_1 \dots T_n S_1 Q$. On considère maintenant $\partial(B\, S_1^{(2)}\, Q\, \pi_1^{(u_1)} \dots \pi_{\varepsilon_p}^{(u_{\varepsilon_p})})$ et les mêmes constatations qu'auparavant permettent de ne considérer que les monômes D de la forme $T_1 \dots T_n\, S_1^{(2)} P\, \pi_1^{(u_1)} \dots \pi_{\varepsilon_p}^{(u_{\varepsilon_p})}$.

En recommençant ces opérations, on arrive finalement à ramener le problème au cas où $D = T_1 \dots T_n\, S_1^{(i)}\, \pi_1^{(u_1)} \dots \pi_{\varepsilon_p}^{(u_{\varepsilon_p})}$ et on écrit alors :

$$\partial(BS_1^{(i+1)}\, \pi_1^{(u_1)} \dots \pi_{\varepsilon_p}^{(u_{\varepsilon_p})}) = \omega D + (-1)^{j+1}\, BS_1^{(i+1)}\, \partial(\pi_1^{(u_1)} \dots \pi_{\varepsilon_p}^{(u_{\varepsilon_p})})$$

Il suffit maintenant d'appliquer l'hypothèse de récurrence à $BS_1^{(i+1)}\, \partial(\pi_1^{(u_1)} \dots \pi_{\varepsilon_p}^{(u_{\varepsilon_p})})$ pour trouver le résultat recherché.

Démonstration de la proposition 3 - $I = (\omega)$ est isomorphe à k en tant que R-module ; on peut donc poser $L = X$ (notation du lemme 1). Compte tenu du fait que $IX_p \cap Z_p(X) = IX_p$ et $IZ_p(X) = 0$, il est clair que $\mathrm{Tor}_p^R(I,k) = IX_p$ et le morphisme canonique $X_p \longrightarrow X_p/m\,X_p \longrightarrow \mathrm{Tor}_p^R(I,k) = IX_p$ n'est autre que la multiplication par ω. On peut donc (d'après le lemme 4), construire les g_i (notation du lemme 1) de manière qu'on ait

$\forall p$, $\mathrm{Im}\, g_p \subseteq JX + \Sigma\, BS_1^{(i)} X$. $\mathrm{Im}\, g_p g_q \subseteq J^2X + JBX \subseteq IX$. D'après la proposition 2, la résolution Y définie dans la proposition 1 est minimale et on a par conséquent :

$$P_{\tilde{R}} = P_R + Z^2\, P_R\, P_{\tilde{R}} \quad .$$

Proposition 4 - Soient (R,m,k) un anneau local noethérien, $\omega \in m^2$ un élément vérifiant $\mathrm{Ann}\, \omega = m$, $I = (\omega)$, $\tilde{R} = R/I$, $\tilde{m} = m/I$, $(t_1,\dots,t_n)$ un s.g.m. de m, $\tilde{t}_j$ = classe de t_j dans $\tilde{R}$, $E = R\langle T_1,\dots,T_n\, ;\ \partial T_i = t_i\rangle$ $\tilde{E} = \tilde{R}\langle T_1,\dots,T_n\, ; \partial T_i = \tilde{t}_i\rangle$.

Alors, le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 \arrow[r] & \dfrac{IE_j}{IE_j \cap B_j(E)} \arrow[r] \arrow[u] & H_j(E) \arrow[r] \arrow[u] & H_j(\tilde{E}) \arrow[r] \arrow[u] & IE_{j-1} \cap B_{j-1}(E) \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & IE_j \arrow[r] \arrow[u] & Z_j(E) \arrow[r] \arrow[u] & Z_j(\tilde{E}) \arrow[r, "\delta_j"] \arrow[u] & IE_{j-1} \cap B_{j-1}(E) \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & IE_j \cap B_j(E) \arrow[r] \arrow[u] & B_j(E) \arrow[r] \arrow[u] & B_j(\tilde{E}) \arrow[r] \arrow[u] & 0 \arrow[u] & \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

est un diagramme commutatif dans lequel les lignes et les colonnes sont exactes. Le morphisme δ_j est défini par $\delta_j\left(\sum_{i_1<\dots<i_j} \tilde{a}_{i_1,\dots,i_j} T_{i_1} \dots T_{i_j}\right)$ $\partial\left(\sum_{i_1<\dots<i_j} a_{i_1,\dots,i_j} T_{i_1} \dots T_{i_j}\right)$, les autres morphismes sont définis de manière évidente.

Démonstration - Evident

Le cas où $(\omega) = I$ est le socle d'un anneau de Gorenstein de profondeur nulle $(\omega \in m^2)$.

On a vu dans ce cas $\exists a_1,\dots,a_n \in m$ avec $a_i t_j = \delta_{i,j}\,\omega$ ($\delta_{i,j}$ = le symbole de kronecker). $IE_k \subseteq B_k(E)$ si $k < n$; en effet, si $i_1 < i_2 \dots < i_k$ il existe $j \neq i_1,\dots,j \neq i_k$. $\partial(a_j T_j T_{i_1} \dots T_{i_k}) = \omega T_{i_1} \dots T_{i_k}$.

On trouve alors les suites exactes

$k < n$: $0 \longrightarrow IE_k \longrightarrow Z_k(E) \longrightarrow Z_k(\tilde{E}) \longrightarrow IE_{k-1} \longrightarrow 0$

$0 \longrightarrow H_k(E) \longrightarrow H_k(\tilde{E}) \longrightarrow IE_{k-1} \longrightarrow 0$

$k=n$: $0 \longrightarrow IE_n \xrightarrow{\text{iso}} H_n(E) \xrightarrow{\ 0\ } H_n(\tilde{E}) \xrightarrow{\text{iso}} IE_{n-1} \longrightarrow 0$

<u>Proposition 5 - Soient</u> (R,m,k) <u>un anneau local noethérien de Gorenstein, de profondeur nulle,</u> $I = (\omega)$ <u>son socle et</u> $(t_1,\dots,t_n)$ <u>un s.g.m de</u> m <u>et</u> E <u>le complexe de Koszul associé aux</u> t_i. <u>On suppose que</u> $\omega \in m^2$ <u>et on pose</u> $\tilde{E} = \tilde{R} < T_1,\dots,T_n \; ; \; \partial T_i = \tilde{t}_i >$. <u>Alors, si</u> $i \geq 1$, $j \geq 1$ <u>et</u> $i+j < n$, <u>le morphisme canonique</u> $H_{i+j}(E) \longrightarrow H_{i+j}(\tilde{E})$ (resp. $Z_{i+j}(E) \longrightarrow Z_{i+j}(\tilde{E})$) <u>induit un isomorphisme entre</u> $H_i(E)\, H_j(E)$ <u>et</u> $H_i(\tilde{E})\, H_j(\tilde{E})$ (resp. <u>une surjection entre</u> $Z_i(E)\, Z_j(E)$ <u>et</u> $Z_i(\tilde{E})\, Z_j(\tilde{E})$). <u>On a de plus pour</u> $i \geq 1$, $j \geq 1$ <u>et</u> $i+j = n$
$Z_i(\tilde{E})\, Z_j(\tilde{E}) = H_i(\tilde{E})\, H_j(\tilde{E}) = 0$.

<u>Démonstration</u> - Soient $M \in Z_i(\tilde{E})$ et $N \in Z_j(\tilde{E})$ deux cycles ; compte tenu de l'exactitude de la suite $Z_i(E) \longrightarrow Z_i(\tilde{E}) \longrightarrow IE_{i-1} \longrightarrow 0$ il existe $M_1 \in Z_1(E)$, $M_2 \in J\tilde{E}_i$ (J étant l'idéal engendré par $a_1,\dots,a_n$. Voir le lemme 3) tel que $M = \tilde{M}_1 + M_2$ (où $\tilde{M}_1$ est l'image de M_1 par $Z_i(E) \longrightarrow Z_i(\tilde{E})$). On peut de même écrire N sous la forme $\tilde{N}_1 + N_2$ où $N_1 \in Z_j(E)$ et $N_2 \in JE_j$. Comme $M_2N_2 = \tilde{M}_1 N_2 = \tilde{N}_1 M_2 = 0$, on a $MN = \tilde{M}_1\tilde{N}_1$, ce qui prouve la surjectivité de $Z_i(E)\, Z_j(E) \longrightarrow Z_i(\tilde{E})\, Z_j(\tilde{E})$. On démontre de même que $H_i(E)\, H_j(E) \longrightarrow H_i(\tilde{E})\, H_j(\tilde{E})$ est un isomorphisme. Si $i \geq 1$, $j \geq 1$, $i+j = n$, $M \in Z_i(\tilde{E})$, $N \in Z_j(\tilde{E})$, on écrit comme dans la première partie, $M = \tilde{M}_1 + M_2$, $N = \tilde{N}_1 + N_2$ avec $M_1 \in Z_i(E)$, $N_1 \in Z_j(E)$, $M_2 \in J\tilde{E}_i$, $N_2 \in J\tilde{E}_j$. On a alors, $MN = \tilde{M}_1\, \tilde{N}_1$ et comme $M_1\, N_1 \in IE_n$, $MN = 0$

c.q.f.d.

Nous rappelons ici brièvement la définition des opérateurs de Massey. Ces opérateurs, notés par γ, sont définis pour certain p-uplet d'éléments homogènes de $H(E)$ d'une algèbre différentielle graduée E (E sera ici le complexe de Koszul associé à un s.g.m de m ou de $\tilde{m}$).

Soient $(D_1,\dots,D_p)$ un p-uplet de cycles homogènes de E et $r_j = \deg D_j$. On pose $y(D_i) = D_i \; \forall i$, $\gamma(D_i,D_j) = (-1)^{r_i+1} D_i\, D_j \; \forall i < j$. $\gamma(D_i,D_j)$ est un cycle, si c'est un bord, on désigne par $y(D_i,D_j)$ un élément homogène de E dont l'image par l'opérateur de bord de E est $\gamma(D_i,D_j)$. Supposons que pour tout entier $k < p$ et pour toute suite d'entiers $i_1,\dots,i_k$ vérifiant $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq p$ $y(D_{i_1},\dots,D_{i_k})$ et $\gamma(D_{i_1},\dots,D_{i_k})$ sont définis et vérifient :

i) $\gamma(D_{i_1},\dots,D_{i_k})$ est un bord homogène de degré $r_{i_1}+\dots+r_{i_k} + k-2$;

ii) $y(D_{i_1},\dots,D_{i_k})$ est un élément homogène de E de degré $r_{i_1}+\dots+r_{i_k}+k-1$ qui relève $\gamma(D_{i_1},\dots,D_{i_k})$.;

iii) $$\gamma(D_{i_1},\dots,D_{i_k}) = \sum_{s=1}^{k-1} (-1)^{r_{i_1}+\dots+r_{i_s}+s}\, y(D_{i_1},\dots,D_{i_s})\, y(D_{i_{s+1}},\dots,D_{i_k}).$$

On pose alors :

$$\gamma(D_1,\dots,D_p) = \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^{r_1+\dots+r_i+i}\, y(D_1,\dots,D_i)\, y(D_{i+1},\dots,D_p)\ .$$

$\gamma(D_1,\dots,D_p)$ est un cycle.

Soient maintenant $\xi_1,\dots,\xi_p$ des éléments homogènes de $H(E)$, D_j un cycle homogène de E qui relève ξ_j, Si $\gamma(D_1,\dots,D_p)$ est défini, on posera alors $\gamma(\xi_1,\dots,\xi_p)$ = classe dans $H(E)$ de $\gamma(D_1,\dots,D_p)$.

Si E est le complexe de Koszul associé à un s.g.m de m, si $y(D_1,\dots,D_p)$ est défini pour des cycles homogènes $D_1,\dots,D_p$ alors, $y(D_1,\dots,D_p)\in mE$ (voir (8), Prop. 6).

<u>Proposition</u> 6 - <u>Soient</u> (R,m,k) <u>un anneau local de Gorenstein de profondeur nulle</u>, $I=(\omega)$ <u>son socle et</u> $t_1,\dots,t_n$ <u>un s.g.m</u> <u>de</u> m. <u>On suppose que</u> $\omega\in m^2$ <u>et on désigne par</u> E <u>le complexe de Koszul associé aux</u> t_i. <u>Alors, pour que</u> $\tilde{R}=R/I$ <u>soit un anneau de Golod, il faut et il suffit que</u> :

a) $H_i(E)\,H_j(E)=0 \quad \forall i\geqslant 1\ ,\ \forall j\geqslant 1\ ,\ i+j\leqslant 2n/3$;

b) <u>Si</u> p <u>est un entier supérieur à</u> 3 <u>et</u> $\xi_1,\dots,\xi_p$ <u>sont des éléments homogènes de</u> $H(\tilde{E})$ <u>de degrés respectifs</u> $r_1,\dots,r_p$ <u>où</u> $r_i>0$ <u>et</u> $r_1+\dots+r_p+p-2<n$, <u>alors</u>, $\gamma(\xi_1,\dots,\xi_p)=0$.

<u>Démonstration</u> - Désignons par $\tilde{E}=E\otimes\tilde{R}$ le complexe de Koszul associé aux $\tilde{t}_i$. Dire que $\tilde{R}$ est un anneau de Golod revient à dire que les opérateurs de Massey d'ordre $\geqslant 2$ sont triviaux sur $H(\tilde{E})$.

Montrons que les conditions a) et b) sont suffisantes. Il suffit de montrer que pour p cycles homogènes $Q_1,\dots,Q_p$ dans $\tilde{E}$, $y(Q_1,\dots,Q_p)$ est toujours défini. Nous procéderons par récurrence ; l'hypothèse de récurrence étant :

i) Si $r_i = \deg Q_i$ et $r_1+\dots+r_p+p-2 \geq n$ alors, $y(Q_1,\dots,Q_p) = 0$;

ii) Si $r_1+\dots+r_p+p-2 < n$ et $Q_i = \tilde{M}_i + N_i$ où $M_i \in Z_{r_i}(E)$ et $N_i \in J\tilde{E}_{r_i}$

(J est l'idéal désigné dans le lemme 3 et $\tilde{M}_i$ l'image de M_i dans $\tilde{E}$ par le morphisme canonique $E \longrightarrow \tilde{E}$) alors, $y(Q_1,\dots,Q_p) = \widetilde{y(M_1,\dots,M_p)}$.

Le cas de $p=2$:

Montrons d'abord que $H_i(\tilde{E})\,H_j(\tilde{E}) = 0 \;\; \forall i \geq 1$, $\forall j \geq 1$. C'est évident si $i+j > n$; si $i+j = n$, ceci résulte de la proposition 5. De même, si $i+j \leq 2n/3$, l'isomorphisme $H_i(E)\,H_j(E) \longrightarrow H_i(\tilde{E})\,H_j(\tilde{E})$ montre que $H_i(\tilde{E})\,H_j(\tilde{E}) = 0$.
Supposons donc que $\frac{2n}{3} < i+j < n$. Si $s = n-i-j$, $s > 0$ et on a $s+i \leq 2n/3$ ou $s+j \leq 2n/3$; ce qui donne $H_s(E)\,H_i(E) = 0$ ou $H_s(E)\,H_j(E) = 0$. On a donc $H_s(E)\,H_i(E)\,H_j(E) = 0$. Or, la multiplication $H_s(E) \times H_{n-s}(E) \longrightarrow H_n(E)$ est non dégénérée ; donc $H_i(E)\,H_j(E) = 0$ et finalement $H_i(\tilde{E})\,H_j(\tilde{E}) = 0$ (d'après la prop. 5).

Donc, si Q_1 et Q_2 sont deux cycles homogènes de $\tilde{E}$ de degrés respectifs r_1 et r_2, $Q_1 Q_2 = (-1)^{r_1+1}\,\gamma(Q_1,Q_2)$ est un bord qui est nul si $r_1+r_2 \geq n$ et provient d'un élément de $Z_{r_1}(E)\,Z_{r_2}(E)$ si $r_1+r_2 < n$ (prop. 5) ; l'hypothèse de récurrence est donc vérifiée pour $p=2$.

Supposons maintenant que l'hypothèse de récurrence est vérifiée pour tout $q < p$ et vérifions le pour p. Soient $Q_1,\dots,Q_p$ des cycles homogènes de E de degrés $r_1,\dots,r_p$ avec $r_i > 0$ et $r_1+\dots+r_p+p-2 \leq n$. Chaque Q_i peut se mettre sous la forme $\tilde{M}_i + N_i$ où $M_i \in Z_{r_i}(E)$ et $N_i \in J\tilde{E}_{r_i}$.

$$\gamma(Q_1,\dots,Q_p) = (-1)^{r_1+1}\,Q_1\,y(Q_2,\dots,Q_p) + \sum_{i=2}^{p-2}(-1)^{r_1+\dots+r_i+i}\,y(Q_1,\dots,Q_i)$$

$y(Q_{i+1},\dots,Q_p) + (-1)^{r_1+\dots+r_{p-1}+p-1}\,y(Q_1,\dots,Q_{p-1})Q_p$. En tenant compte du fait que $N_i \in J\tilde{E}$, que $\operatorname{Im} y \subseteq m\tilde{E}$ et finalement que $y(Q_{i_1},\dots,Q_{i_k}) = \widetilde{y(M_{i_1},\dots,M_{i_k})}$ pour $k < p$ (hypothèse de récurrence), on voit que $\gamma(Q_1,\dots,Q_p) = \widetilde{\gamma(M_1,\dots,M_p)}$.
Si $r_1+\dots+r_p+p-2 = \deg \gamma(Q_1,\dots,Q_p) < n$, on peut relever par hypothèse

$\gamma(M_1,\dots,M_p)$ par $y(M_1,\dots,M_p)$ et poser par conséquent $y(Q_1,\dots,Q_p) = \widetilde{y(M_1,\dots,M_p)}$. Si $r_1 +\dots+ r_p + p-2 = n$, $\gamma(M_1,\dots,M_p)$ étant un cycle de E_n , appartient à IE_n donc $\gamma(Q_1,\dots,Q_p) = 0$; on peut poser alors $y(Q_1,Q_2,\dots,Q_p) = 0$. Si $r_1 +\dots+ r_p + p-2 > n$, $\gamma(Q_1,\dots,Q_p) = 0$, on pose alors $y(Q_1,\dots,Q_p) = 0$.

Montrons maintenant que a) et b) sont nécessaires. a) résulte du fait que pour $i \geq 1$, $j \geq 1$, $i+j < n$, $H_i(E)\, H_j(E) = H_i(\tilde{E})\, H_j(\tilde{E}) = 0$ (d'après la proposition 5).

Soient $D_1,\dots,D_p$, p cycles homogènes dans E de degrés respectifs $r_1,\dots,r_p$ où $r_i > 0$ et $r_1 +\dots+ r_p + p-2 < n$; montrons que $y(D_1,\dots,D_p)$ est défini. p=2 est évident. Supposons que $p > 2$ et que $\forall k < n$, $\forall i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq p$, $\gamma(D_{i_1},\dots,D_{i_k})$ est défini. La démonstration que nous avons donné plus haut montre qu'on peut choisir les $y(\tilde{D}_{i_1},\dots,\tilde{D}_{i_k})$ dans $\tilde{E}$ de manière que $y(\tilde{D}_{i_1},\dots,\tilde{D}_{i_k}) = \widetilde{y(D_{i_1},\dots,D_{i_k})}$. Par conséquent, $\gamma(\tilde{D}_1,\dots,\tilde{D}_p) = \widetilde{\gamma(D_1,\dots,D_p)}$. Or, $\gamma(\tilde{D}_1,\dots,\tilde{D}_p)$ est un bord dans $\tilde{E}$; donc, $\gamma(D_1,\dots,D_p)$ est un bord dans E .

<u>Proposition</u> 7 - <u>Soit</u> (R,m,k) <u>un anneau local de Gorenstein vérifiant les conditions de la proposition</u> 6. <u>Alors</u>,

$$P_R = \frac{(1+Z)^n}{1 - c_1Z^2 - c_2Z^3 - \dots - c_{n-1}Z^n + Z^{n+2}}$$

<u>où</u> $c_j = \dim_k H_j(E)$ <u>et</u> $n = \dim_k m/m^2$ $(n > 1)$.

<u>Démonstration</u> - Les relations $P_{\tilde{R}} = P_R + Z^2 P_R P_{\tilde{R}}$ et $P_{\tilde{R}} = \dfrac{(1+Z)^n}{1 - \sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j Z^{j+1}}$ montrent que

$$P_R = \frac{(1+Z)^n}{1 - \sum_{j=1,\dots,n-1} (\tilde{c}_j - C_n^{j-1})Z^{j+1} + (\tilde{c}_n - C_n^{n-1})Z^{n+1} + Z^{n+2}}$$

Les suites exactes de la proposition 4 appliquée au cas d'un anneau de Gorenstein de profondeur nulle montrent que : $\tilde{c}_j - C_n^{j-1} = c_j$ $\forall j = 1,\dots,n-1$ et $\tilde{c}_n = n$;

ce qui démontre la proposition.

Remarque - Les conditions de la proposition 7 sont automatiquement vérifiées pour un anneau local de Gorenstein de profondeur nulle, non intersection complète et vérifiant $\dim_k m/m^2 = 3$. En effet, on sait dans ce cas que $H_1(E)^2 = 0$ (voir (10)) ; on retrouve alors le résultat de WIEBE dans (10).

Pour le cas de $n = \dim_k m/m^2 = 4$, les conditions de la proposition 7 sont vérifiées quand on a $H_1(E)^2 = 0$. Si $r = \dim_k H_1(E)$, on a alors :

$$P_R = \frac{(1+Z)^4}{1 - rZ^2 - 2(r-1)Z^3 - rZ^4 + Z^6}$$

Exemple d'un anneau local de Gorenstein de profondeur nulle, vérifiant les conditions de la proposition 7.

Soient k un corps et $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n}$ $(n > 1)$ une famille d'éléments k vérifiant :

i) $a_{1,1} = 1$;

ii) Si $a_{j,i} = a_{i,j}$ $\forall j > i$, alors, $\det D \neq 0$ où D est la matrice $(a_{i,j})$.

Posons $S = k[X_1,\dots,X_n]$, $\mathfrak{a} = (X_1,\dots,X_n)^3 + (X_iX_j - a_{i,j}X_1^2)_{i \leq j}$ et et $R = S/\mathfrak{a}$. Si t_j = classe de X_j dans R et m = l'idéal engendré par les t_j , il est facile de voir que (R,m,k) est un anneau local noethérien vérifiant $m^3 = 0$. La condition i) montre que $t_1^2 \neq 0$ et la condition ii) entraîne l'égalité $\mathrm{Ann}\, m = (t_1^2)$. Donc, R est un anneau de Gorenstein. $\tilde{R} = R/(t_1^2)$ est l'anneau $\dfrac{S}{(X_1,\dots,X_n)^2}$ qui est un anneau de Golod (voir (4), théorème 4.3.6).

Nous avons appris récemment que la relation $P_{\tilde{R}} = P_R + Z^2P_RP_{\tilde{R}}$ entre la série de Betti d'un anneau local de Gorenstein de profondeur nulle et celle de l'anneau quotient R/Socle R a été établie par G. LEVIN, dans une récente publication (Matematiken institutionen Stockholm universitet (1976 - n° 15), Théorème 2.9).

L'auteur établit notamment nos lemmes 3 et 4 et démontre ensuite que le morphisme $R \longrightarrow \tilde{R}$ est un morphisme de Golod.

(1) L.L. AVRAMOV, E.S. GOLOD - Homology algebra of the Koszul complex of a Local Gorenstein Ring. Math. Notes 9 (1971), 30-32

(2) T. GULLIKSEN - A proof of the existence of minimal R-algebra resolutions, Acta Math. 120 (1968) 53-57

(3) T. GULLIKSEN - Massey operations and the Poincaré series of certains local Rings, Journal of Algebra 22, 223-232 (1972)

(4) T. GULLISKEN and G. LEVIN - Homology of local Rings, Queens Paper n° 20, Queen's University, Kingston, Ontario

(5) G. LEVIN - Local rings and Golod homomorphisms, Journal of Algebra 37 , 266-289 (1975)

(6) M. SAKUMA and H. OKUYAMA - On the Betti series of local rings, J. Math, Tokushima Univ. Vol. 1 (1967) 1-10

(7) M. SAKUMA and H. OKUYAMA - Correction to "On the Betti series of local Rings", J. Math., Tokushima Univ., Vol. 2 (1968) 31-32

(8) J. SHAMASH - The Poincaré series of a local Ring II, Journal of Algebra 17 1-18 (1971)

(9) J. TATE - Homology of Noetherian rings and local rings, Illinois J. Math., Vol. 1 (1957) 14-27

(10) H. WIEBE - Über homologische invarianten lokaler ringe, Math. Annalen 179, 257-274 (1969)

Manuscrit reçu le 13 Décembre 1976

Hamid RAHBAR-ROCHANDEL

Université de Caen
rue du Gaillon

14032 CAEN CEDEX

INTERSECTIONS D'ANNEAUX INTEGRES (II)

par

Julien QUERRE

Soit $\overline{A}$ et A^* respectivement la clôture intégrale et la quasi-clôture d'un anneau intègre A dans K son corps des fractions, $X^{(1)}(A)$ l'ensemble des idéaux premiers de A de hauteur 1 et $A^{(1)} = \cap (A_{\mathfrak{p}} \mid \mathfrak{p} \in X^{(1)}(A))$. Krull [8] puis Heinzer [4] ont posé le problème suivant :

<u>Si A est un anneau noethérien de dimension 2, alors $A^{(1)}$ est-il noethérien</u> ?

Ferrand et Raynaud [3] (Corollaire 1-4 - p. 298) ont répondu affirmativement si A est local et $A^{(1)}$ entier sur A et Heinzer [4] a donné la même réponse positive si A est local.

Dans cette note, nous nous proposons de répondre affirmativement, sans les restrictions ci-dessus, au problème posé.

Soit, d'autre part, $\mathfrak{a}$ un idéal entier de A, alors $A(\mathfrak{a}) = \bigcup_{n>0} (A : \mathfrak{a}^n)$ est un anneau appelé transformé de Nagata de l'idéal [10] . Nagata et Rees [9] [12] ont donné un exemple d'un anneau local noethérien intègre de dimension 3 dont un transformé de Nagata n'est pas un anneau noethérien. Dans cette note, nous montrerons que tout transformé de Nagata d'un anneau noethérien est Σ_1-noethérien et que sa quasi-clôture est un anneau de Krull.

I - PRELIMINAIRES. -

a) Tout anneau B tel que $A \subset B \subset K$ est appelé surordre de A .
On dira qu'une famille $\{A_i\}_{i \in I}$ de surordres de A est une représentation finie de A si :

1) $A = \bigcap_I A_i$

2) Tout $x \in A$ est inversible dans A_i, sauf pour un nombre fini de A_i.

En particulier, si $\{A_i\}_{i \in I}$ est une représentation finie de A , alors $A^* = \bigcap_I A_i^*$ [6] (lemme 2-2).

b) Un idéal premier $\mathfrak{p}$ est dit associé à l'idéal $\mathfrak{a}$ s'il existe $b \in (A : \mathfrak{a})$ tel que $\mathfrak{p}$ idéal premier minimal de $\mathfrak{a}b^{-1} \cap A$. On notera P_A l'ensemble des idéaux premiers de A associés aux idéaux principaux et alors :

$$A = \cap (A_{\mathfrak{p}} \mid \mathfrak{p} \in P_A).$$

Si A est noethérien et M_A l'ensemble des éléments maximaux de P_A , alors la famille $\{A_{\mathfrak{p}} \mid \mathfrak{p} \in M_A\}$ est une représentation finie de A [7] (p. 90 - théorème 123).

c) Soit Σ une famille multiplicative d'idéaux entiers de A . L'ensemble

$$A_\Sigma = \{x \in K \mid x\mathfrak{a} \subseteq A \quad \text{pour} \quad \mathfrak{a} \in \Sigma\}$$

est un surordre de A appelé anneau généralisé de fractions de A par Σ [1] .

Donnons quelques exemples :

1) Si $\Sigma = \{\mathfrak{a}^n\}_{n > 0}$, alors $A_\Sigma = A(\mathfrak{a})$ transformé de Nagata de $\mathfrak{a}$.

2) Soit $X = \{\mathfrak{p}_\alpha\}$ une famille d'idéaux premiers de A et
$\Sigma = \{\mathfrak{a} \mid \mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}_\alpha$ pour tout $\mathfrak{p}_\alpha \in X\}$ alors
$A_\Sigma = \cap (A_{\mathfrak{p}_\alpha} \mid \mathfrak{p}_\alpha \in X)$.

3) Si B est un surordre A-plat, c'est un anneau généralisé de fractions car $B = \cap (A_{\mathfrak{p}} \mid \mathfrak{p} \in X)$ avec $X = \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p}B \neq B\}$.

Si $\mathfrak{a}$ est un idéal fractionnaire de A , alors
$\mathfrak{a}_\Sigma = \{x \in K \mid x\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$ pour $\mathfrak{b} \in \Sigma\}$ est un idéal de A_Σ .

Si X(A) est le spectre de l'anneau A , posons :

$P = \{\mathfrak{p} \in X(A) \mid \mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}$ pour tout $\mathfrak{a} \in \Sigma\}$

$P' = \{\mathfrak{p}' \in X(B) \mid B \not\subseteq \mathfrak{p}'$ pour tout $\mathfrak{a} \in \Sigma\}$

L'application $\mathfrak{p} \longrightarrow \mathfrak{p}_\Sigma$ est une bijection de P sur P' et $A_{\mathfrak{p}} = B_{\mathfrak{p}_\Sigma}$ [1] .

d) Un idéal $\mathfrak{a}$ d'un anneau intègre A sera dit quasi-fini s'il existe $\mathfrak{a}'$ de type fini tel que $\mathfrak{a}' \subseteq \mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}^{-1} = (\mathfrak{a}')^{-1}$. Si D(A) est le monoïde des idéaux divisoriels, on a les propriétés équivalentes :

1) D(A) vérifie la condition de chaîne ascendante,

2) Tout idéal est quasi-fini.

Si A vérifie l'une de ces propriétés, il sera appelé anneau de Mori [10] [11] .

On notera que dans un anneau de Mori $P_A = X(A) \cap D(A)$ et que $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p} \in P_A$ implique $\mathfrak{a}^{-1} = A$ et réciproquement. D'autre part :

Si la famille $\{A_i\}_{i \in I}$ d'anneaux de Mori est une représentation finie de l'anneau A , alors A est un anneau de Mori [13] .

Tout anneau généralisé de fractions A_Σ d'un anneau de Mori (resp. Krull) A par une famille multiplicative Σ est un anneau de Mori (resp. Krull).

e) Si M est un A-module, on notera E(M) son enveloppe injective. Un A-module L injectif sera dit Σ - injectif [2] s'il est de la forme

$$L = \bigcup_{\in Y} E(A/\mathfrak{p})$$

Y étant une famille d'idéaux premiers tels que A soit un anneau noethérien. Soit $0 \longrightarrow A \longrightarrow E_o \longrightarrow \dots \longrightarrow E_n \longrightarrow \dots$ une résolution injective minimale de l'anneau A. Si k est le plus grand entier tel que les A-modules injectifs E_i (i de 0 à k) sont Σ - injectifs, on dira que A est Σ_k-noethérien.

Les conditions suivantes caractérisent un anneau intègre A Σ_1 - noethérien :

1) $\{A_\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in Y \subset X(A)\}$ est une représentation finie de A

2) Pour tout $\in Y$, A est un anneau noethérien.

En particulier, un anneau Σ_1 - noethérien est de Mori.

f) Un idéal égal à son radical est dit semi-premier. En particulier, si les idéaux semi-premiers satisfont à la condition de chaîne ascendante, on dit que le spectre de l'anneau est noethérien. Dans un tel anneau :

Tout idéal n'admet qu'un nombre fini d'idéaux premiers minimaux.

g) On notera $\mathcal{A}$ l'équivalence d'Artin dans l'ensemble I(A) des idéaux fractionnaires :

$$(\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b} \ (\mathcal{A})) \Longleftrightarrow (\mathfrak{a}^{-1} = \mathfrak{b}^{-1}).$$

II - ETUDE DE L'ANNEAU $B = A^{(1)}$ POUR A ANNEAU NOETHERIEN DE DIMENSION 2. -

L'anneau $B = A^{(1)}$ est un anneau généralisé de fractions de la partie multiplicative :

$$\Sigma = \{ \mathfrak{a} \text{ idéal de } A \mid \mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p},$$

pour tout $\mathfrak{p} \in X^{(1)}(A) \}$.

En particulier, B est un anneau de Mori.

Lemme 1 [4] - p. 117

Si A est un anneau noethérien de dimension 2, alors $B = A^{(1)}$ a un spectre noethérien.

Lemme 2 [14]

Soit A un anneau noethérien de dimension ≤ 2, alors tout anneau de Krull contenant A et dont le corps des fractions est une extension finie de celui de A est un anneau noethérien de dimension ≤ 2.

Théorème 1

Si A est un anneau noethérien de dimension 2, alors $B = A^{(1)}$ est un anneau Σ_1 - noethérien de dimension ≤ 2 et sa clôture intégrale est un anneau noethérien.

Suivant I_c, l'application $\mathfrak{p} \longrightarrow \mathfrak{p}_\Sigma = \mathfrak{p}'$ est une bijection de P sur P' avec $A_\mathfrak{p} = B_{\mathfrak{p}'}$. On a $X^{(1)}(A) \subset P$, donc pour $\mathfrak{p} \in X^{(1)}(A)$, il existe $\mathfrak{p}' \in P'$ tel que $A_\mathfrak{p} = B_{\mathfrak{p}'}$ ce qui implique $\mathfrak{p}' \in X^{(1)}(B)$ et $X^{(1)}(B) \subset P'$. Mais si $\mathfrak{m}'$ est un idéal maximal de hauteur 2 de B, alors $(\mathfrak{m}'^{-1})^{-1} = \cap\, (\mathfrak{m}' B_{\mathfrak{p}'} \mid \mathfrak{p} \in X^{(1)}(A)) = B$. Ainsi les seuls idéaux premiers divisoriels sont les idéaux de $X^{(1)}(B)$ donc $X^{(1)}(B) = P_B$ et $B = B^{(1)}$ avec $B = \cap\, (B_{\mathfrak{p}'} \mid \mathfrak{p}' \in X^{(1)}(B))$. Suivant le lemme 1, B a un spectre noethérien, en particulier $x \in B$ n'appartient qu'à un nombre fini d'idéaux premiers minimaux sur xB ([7] - p. 59). Donc $\{B_{\mathfrak{p}'} \mid \mathfrak{p}' \in X^{(1)}(B)\}$ est une représentation finie de B et B est un anneau Σ_1 - noethérien.

Suivant I_a : $B^* = \cap\, ((B_{\mathfrak{p}'})^* \mid \mathfrak{p}' \in X^{(1)}(B)) = \cap\, (\bar{B}_{\mathfrak{p}'} \mid X^{(1)}(B))$ en notant que $B_{\mathfrak{p}'}$ est un anneau local noethérien de dimension 1. Suivant [6], (lemme 2-1), en posant $\bar{P} = \{ \bar{\mathfrak{p}} \in X^{(1)}(\bar{A}) \mid \bar{\mathfrak{p}} \cap A \in X^{(1)}(A) \}$:

$$B^* = \cap\, (\bar{B}_{\mathfrak{p}'} \mid \mathfrak{p}' \in X^{(1)}(B)) = \cap\, (\bar{A}_{\bar{\mathfrak{p}}} \mid \bar{\mathfrak{p}} \in \bar{P})$$

B^* est donc un anneau généralisé de fractions de $\bar{A}$, qui est un anneau de Krull donc B^* est aussi un anneau de Krull. Suivant le lemme 2, B^* est un anneau noethérien avec dim $B^* \leq 2$. Evidemment, $B^* = \bar{B}$ donc dim $B \leq 2$.

Lemme 3

Avec les hypothèses du théorème, si $\mathfrak{p}' \in X^{(1)}(B)$, alors $B/\mathfrak{p}'$ est un anneau noethérien.

$A/\mathfrak{p}$ est canoniquement immergé dans $B/\mathfrak{p}'$. D'autre part, $B \subseteq B_{\mathfrak{p}'} = A_{\mathfrak{p}}$ implique que $B/\mathfrak{p}'$ est contenu dans le corps des fractions de $A/\mathfrak{p}$. Puisque $A/\mathfrak{p}$ est un anneau intègre noethérien de dimension ≤ 1, d'après le théorème d'Akizuki-Krull, $B/\mathfrak{p}'$ est noethérien.

Lemme 4 [7]

Soit (a,b) deux éléments d'un anneau intègre A. L'idéal $(aX + b) A [X]$ de l'anneau $A [X]$ est premier si et seulement si (a,b) est une A-suite.

Si $f \in A [X]$, on note $\mathfrak{c}(f)$ l'idéal de A engendré par les coefficients de f.

$$\Sigma = \{f \in A [X] \mid \mathfrak{c}(f) = A\}$$

est une partie multiplicative de $A [X]$. On notera : $A(X) = \Sigma^{-1} (A [X])$. Cet anneau, introduit par Nagata [9] , p. 18 , possède, en autres, les propriétés suivantes :

1) A(X) est A-fidèlement plat. En particulier, si $\mathfrak{a}$ est un idéal de A tel que $\mathfrak{a}A(X)$ de type fini, alors $\mathfrak{a}$ est de type fini.

2) Si A est noethérien, alors A(X) est noethérien et dim A = dim A (X).

3) Les idéaux $\{\mathfrak{m}A(X) \mid \mathfrak{m}$ idéal maximal de A$\}$ sont les seuls idéaux maximaux de A (X).

Lemme 5 [7] (p. 54, ex. 13)

Soit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ trois idéaux distincts d'un anneau A tel que $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subset \mathfrak{c} \subset \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$. Si $A/\mathfrak{a}$ et $A/\mathfrak{b}$ sont noethériens, $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$ de type fini, alors $\mathfrak{a}$ est de type fini.

Lemme 6

<u>Si $\mathfrak{a}$ est un idéal d'un anneau de Mori, à spectre noethérien, A ,</u>
<u>les propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

<u>1) $\mathfrak{a}^{-1} = A$; 2) $G_r(\mathfrak{a}) \geq 2$.</u>

1) $\Longrightarrow$ 2)

Soit $\mathfrak{a}$ un idéal tel que $\mathfrak{a}^{-1} = A$ donc $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p} \in P_A$.
On a $A = \cap (A_{\mathfrak{p}} \mid \mathfrak{p} \in P_A)$; $a \in \mathfrak{a}$ n'appartient qu'à un nombre fini d'idéaux premiers $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots \mathfrak{p}_k$ de P_A. Naturellement, $\mathfrak{a} \not\subset \bigcup_{i=1}^{k} \mathfrak{p}_i$ car $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}_i$ (i de 1 à k) [15] (ex. 5_c , p. 54). Choisissons $b \in \mathfrak{a} - \bigcup_{i=1}^{k} \mathfrak{p}_i$, donc a et b n'appartiennent à aucun idéal commun de P_A .En particulier, $a A_{\mathfrak{p}} + b A_{\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}}$ pour tout $\mathfrak{p} \in P_A$ donc
$a A + b A \equiv A$ $(\not\!\!\mathscr{A})$ ce qui implique $G_r(\mathfrak{a}) \geq 2$.

2) $\longrightarrow$ 1)

Montrons que si (a,b) est une A-suite, alors $\mathfrak{d} = A a + A b \equiv A$ $(\not\!\!\mathscr{A})$.
Soit $x \in \mathfrak{a}_\alpha = A \cap \alpha^{-1} A$ avec $\alpha = b a^{-1}$, alors $bx \in A a$ et si j est l'épimorphisme canonique $A \longrightarrow A/_{A a}$, on a $j(b)\, j(x) = 0$.
Par hypothèse, j(b) n'est pas diviseur de zéro donc $j(x) = 0$,
c'est à dire $x \in A a$ d'où $\mathfrak{a}_\alpha \subseteq A a$. En particulier,
$\mathfrak{a}_\alpha : A a \subseteq A a = A$. Mais on a aussi $A \subseteq A : \mathfrak{d} = \mathfrak{a}_\alpha : a A$.
Finalement, $A : \mathfrak{d} = A$ et $\mathfrak{a}_\alpha = a A$. D'où $G_r(\mathfrak{a}) \geq 2$ implique $\mathfrak{a}^{-1} = A$. Notons en particulier que $A a + A b = A$ $(\not\!\!\mathscr{A})$ est équivalent à $Aab = A a \cap A b$ puis équivalent à (a,b) A-suite.

Théorème 2

<u>Soit A un anneau noethérien de dimension 2, et B un anneau de Mori, surordre de A.</u>

<u>Si les propriétés suivantes sont vérifiées</u> :

a) $B/_{\mathfrak{p}'}$ <u>est noethérien pour tout</u> $\mathfrak{p}' \in X^{(1)}(B)$,

b) <u>Pour tout</u> $\mathfrak{p}' \in X^{(1)}(B)$ <u>avec</u> $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}' \cap A$ <u>et</u> $\mathfrak{q}' = (\mathfrak{p}B : \mathfrak{p}') \cap B$,
<u>on a</u> $\mathfrak{q}'^{-1} = B$,

c) <u>Pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}'$ de hauteur</u> 2, $Gr(\mathfrak{m}') \geq 2$,
<u>alors B est un anneau noethérien.</u>

Soit $\mathfrak{m}'$ un idéal maximal de B de hauteur 2. Puisque $Gr(\mathfrak{m}') \geq 2$, $\mathfrak{m}'$ contient une B-suite (a',b'). Suivant le lemme 4, l'idéal $\mathfrak{n}$ engendré par le polynôme $a'X + b'$ est premier dans $B(X)$. Puisque $B[X]/(a'X + b')B[X] \cong B[-b'/a']$, l'anneau $B(X)/\mathfrak{n}$ admet K pour corps des quotients ; $\mathfrak{n} \cap A(X)$ est un idéal premier nécessairement de hauteur 1. car $\mathfrak{n} \cap A = (0)$. En particulier, A est plongé canoniquement dans $A(X)/\mathfrak{n} \cap A(X)$, mais ce dernier anneau est aussi plongé dans $B(X)/\mathfrak{n}$; A étant noethérien, $A(X)$ est noethérien et de dimension 2, donc $A(X)/\mathfrak{n} \cap A(X)$ est noethérien et de dimension 1. Il admet d'après ce qui précède K pour corps des quotients, donc, par le théorème d'Akizuki - Krull $B(X)/\mathfrak{n}$ est un anneau noethérien. Puisque $\mathfrak{n}$ est un idéal de type fini contenu dans $\mathfrak{m}'B(X)$, ce dernier est un idéal de type fini. Il en est donc de même de $\mathfrak{m}'$.
Soit $\mathfrak{p}' \in X^{(1)}(B)$ et $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}' \cap A$. Par hypothèse, $\mathfrak{q}' = (\mathfrak{p}B : \mathfrak{p}') \cap B$ vérifie $(\mathfrak{q}')^{-1} = B$. Puisque B est un anneau de Mori, il existe $\mathfrak{c}'$ un idéal de type fini tel que $\mathfrak{c}' \equiv \mathfrak{q}' \equiv B$ $(\not{\mathfrak{p}})$ avec $\mathfrak{c}' \subset \mathfrak{q}'$. En particulier, $\mathfrak{c}' \not\subset \mathfrak{p}' \in X^{(1)}(B)$ donc $B/\mathfrak{c}'$ est noethérien, d'après le théorème de Cohen [7] (p. 5, th. 8). Il en résulte que $\mathfrak{q}'$ est aussi un idéal de type fini. On a $\mathfrak{p}'\mathfrak{q}' \subset \mathfrak{p}B \subset \mathfrak{p}' \cap \mathfrak{q}'$; $B/\mathfrak{p}'$ est noethérien par hypothèse, $B/\mathfrak{q}'$ est aussi noethérien par le théorème de Cohen, $\mathfrak{q}'$ et $\mathfrak{p}B$ sont des idéaux de type fini. Selon le lemme 5, $\mathfrak{p}'$ est donc un idéal de type fini. Ce qui achève la démonstration.

<u>Théorème 3</u>

<u>Soit A un anneau noethérien de dimension 2, alors $B = A^{(1)}$ est un anneau noethérien.</u>

D'après la remarque du début du paragraphe, B est un anneau de Mori. Selon le lemme 3, pour tout $\mathfrak{p}' \in X^{(1)}(B)$, $B/\mathfrak{p}'$ est noethérien. Soit, pour $\mathfrak{p}' \in X^{(1)}(B)$ et $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}' \cap A$, $\mathfrak{q}' = (\mathfrak{p}B : \mathfrak{p}') \cap B$.
Si $\mathfrak{p}'_1 \in X^{(1)}(B)$, alors $\mathfrak{q}' B_{\mathfrak{p}'_1} = (\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}'_1} : \mathfrak{p}' B_{\mathfrak{p}'_1}) \cap B_{\mathfrak{p}'_1}$ donc $\mathfrak{q}' \not\subset \mathfrak{p}'_1 \in X^{(1)}(B) = P_B$.

Selon I_d, $\mathfrak{q}'^{-1} = B$. Si $\mathfrak{m}'$ est un idéal maximal de hauteur 2 de B, selon le théorème 1 et le lemme 6, $Gr(\mathfrak{m}') \geq 2$. Finalement, suivant le théorème 2, l'anneau B est noethérien.

III - TRANSFORME DE NAGATA D'UN ANNEAU NOETHERIEN. -

Théorème 1

Tout transformé de Nagata d'un anneau noethérien est Σ_1 - noethérien et sa quasi-clôture est un anneau de Krull.

Soit $\mathfrak{a} = \sum_{i=1}^{n} f_i A$ un idéal entier de l'anneau A, alors $A(\mathfrak{a}) = \bigcap_{i=1}^{n} A_{f_i}$ [10] (p. 352). Pour simplifier l'écriture, posons $A_i = A_{f_i}$; A_i est noethérien, donc suivant I_b :

$$A_i = \bigcap ((A_i)_{\mathfrak{p}'_i} \mid \mathfrak{p}'_i \in M_{A_i})$$

et $\{(A_i)_{\mathfrak{p}'_i} \mid \mathfrak{p}'_i \in M_{A_i}\}$ est une représentation finie de A_i.

Il y a bijection entre les idéaux premiers de A_{f_i} et ceux de A ne contenant pas f_i. Notons H_i l'image de M_{A_i} dans cette bijection, alors : si $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}'_i \cap A$ ou $\mathfrak{p}'_i \in M_{A_i}$ donc $\mathfrak{p}_i \in H_i$, $(A_i)_{\mathfrak{p}'_i} = A_{\mathfrak{p}_i}$.

Posons :

$$H = \bigcup_{i=1}^{n} H_i \quad . \text{ Alors } A(\mathfrak{a}) = \bigcap_{i=1}^{n} \left(\bigcap_{H_i} A_{\mathfrak{p}_i} \right) = \bigcap_{H} A_{\mathfrak{p}}$$

$\{A_{\mathfrak{p}} \mid \mathfrak{p} \in H\}$ est une représentation finie de $A(\mathfrak{a})$.

Notons $\Sigma = \{ \mathfrak{a}^n \mid \mathfrak{a}^n \not\subset \mathfrak{p}$ pour tout $\mathfrak{p} \in H\}$.

Alors $A(\mathfrak{a}) = A_\Sigma = B$. Suivant I_c l'application $\mathfrak{p} \longmapsto \mathfrak{p}_\Sigma$ est une bijection de P sur P'. Si H' est l'image de H dans cette bijection $A_{\mathfrak{p}} = B_{\mathfrak{p}_\Sigma}$ pour tout $\mathfrak{p} \in H$ donc :

$$A(\mathfrak{a}) = B \bigcap (B_{\mathfrak{p}_\Sigma} \mid \mathfrak{p}_\Sigma \in H').$$

Ainsi, A $(\mathfrak{a})$ est un anneau Σ_1 - noethérien.

Pour le dernier résultat, $\overline{A}_{f_i} = A^*_{f_i}$ est un anneau de Krull.

Mais $\{A_{f_i} \mid i$ de 1 à $n\}$ est une représentation finie de $A(\mathfrak{a})$, donc, selon I_a,

$$(A(\mathfrak{a}))^* = \bigcap_{i=1}^{n} A^*_{f_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_{f_i} \;.$$

Ainsi, $(A(\mathfrak{a}))^*$ intersection finie d'anneaux de Krull est un anneau de Krull.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARNOLD - BREWER
J. of Algebra 18 ; 254-263 (1971)

[2] BECK
J. of Algebra 21 ; 232-249 (1972)

[3] FERRAND et RAYNAUD
Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 3 ; 295-311 (1970)

[4] HEINZER W.
Conférence on Commutative Algebra - 107-117 (1972) - Kansas -
Springer Verlag - Berlin

[5] HEINZER W.
a) Proc. of the A.M.S. 22 ; 217-222 (1969)
b) Proc. of the A.M.S. 40 ; 370-372 (1973)

[6] HEINZER W. - OHM J. - PENDLETON R.L. -
J. Crelle 241 ; 147-159 (1970)

[7] KAPLANSKY
" Commutative rings " - Allyn and Bacon - Boston (1970)

[8] KRULL W.
Math. Nachr. 21 ; 319-338 (1960)

[9] NAGATA
" Local rings " - Interscience - Publishers Inc. New York (1962)

[10] QUERRE J.
Bull. Sc. Math. 95 ; 341-354 (1971)

[11] QUERRE J.
C.R. Acad. Sc. Paris - t. 279 (8 juillet 1974)

[12] REES
Illinois J. Math. 2 ; 145-149 (1958)

[13] RAILLARD N.
Thèse 3ème cycle ; Université P. et M. Curie (1976)

[14] SEYDI
Colloque d'Algèbre commutative . Rennes (1972)

[15] LARSEN - Mc CARTY
" Multiplicative theory of ideals "
Academic Press - New York and London (1971)

Vol. 489: J. Bair and R. Fourneau, Etude Géométrique des Espaces Vectoriels. Une Introduction. VII, 185 pages. 1975.

Vol. 490: The Geometry of Metric and Linear Spaces. Proceedings 1974. Edited by L. M. Kelly. X, 244 pages. 1975.

Vol. 491: K. A. Broughan, Invariants for Real-Generated Uniform Topological and Algebraic Categories. X, 197 pages. 1975.

Vol. 492: Infinitary Logic: In Memoriam Carol Karp. Edited by D. W. Kueker. VI, 206 pages. 1975.

Vol. 493: F. W. Kamber and P. Tondeur, Foliated Bundles and Characteristic Classes. XIII, 208 pages. 1975.

Vol. 494: A Cornea and G. Licea. Order and Potential Resolvent Families of Kernels. IV, 154 pages. 1975.

Vol. 495: A. Kerber, Representations of Permutation Groups II. V, 175 pages. 1975.

Vol. 496: L. H. Hodgkin and V. P. Snaith, Topics in K-Theory. Two Independent Contributions. III, 294 pages. 1975.

Vol. 497: Analyse Harmonique sur les Groupes de Lie. Proceedings 1973–75. Edité par P. Eymard et al. VI, 710 pages. 1975.

Vol. 498: Model Theory and Algebra. A Memorial Tribute to Abraham Robinson. Edited by D. H. Saracino and V. B. Weispfenning. X, 463 pages. 1975.

Vol. 499: Logic Conference, Kiel 1974. Proceedings. Edited by G. H. Müller, A. Oberschelp, and K. Potthoff. V, 651 pages 1975.

Vol. 500: Proof Theory Symposion, Kiel 1974. Proceedings. Edited by J. Diller and G. H. Müller. VIII, 383 pages. 1975.

Vol. 501: Spline Functions, Karlsruhe 1975. Proceedings. Edited by K. Böhmer, G. Meinardus, and W. Schempp. VI, 421 pages. 1976.

Vol. 502: János Galambos, Representations of Real Numbers by Infinite Series. VI, 146 pages. 1976.

Vol. 503: Applications of Methods of Functional Analysis to Problems in Mechanics. Proceedings 1975. Edited by P. Germain and B. Nayroles. XIX, 531 pages. 1976.

Vol. 504: S. Lang and H. F. Trotter, Frobenius Distributions in GL_2-Extensions. III, 274 pages. 1976.

Vol. 505: Advances in Complex Function Theory. Proceedings 1973/74. Edited by W. E. Kirwan and L. Zalcman. VIII, 203 pages. 1976.

Vol. 506: Numerical Analysis, Dundee 1975. Proceedings. Edited by G. A. Watson. X, 201 pages. 1976.

Vol. 507: M. C. Reed, Abstract Non-Linear Wave Equations. VI, 128 pages. 1976.

Vol. 508: E. Seneta, Regularly Varying Functions. V, 112 pages. 1976.

Vol. 509: D. E. Blair, Contact Manifolds in Riemannian Geometry. VI, 146 pages. 1976.

Vol. 510: V. Poènaru, Singularités C^∞ en Présence de Symétrie. V, 174 pages. 1976.

Vol. 511: Séminaire de Probabilités X. Proceedings 1974/75. Edité par P. A. Meyer. VI, 593 pages. 1976.

Vol. 512: Spaces of Analytic Functions, Kristiansand, Norway 1975. Proceedings. Edited by O. B. Bekken, B. K. Øksendal, and A. Stray. VIII, 204 pages. 1976.

Vol. 513: R. B. Warfield, Jr. Nilpotent Groups. VIII, 115 pages. 1976.

Vol. 514: Séminaire Bourbaki vol. 1974/75. Exposés 453 – 470. IV, 276 pages. 1976.

Vol. 515: Bäcklund Transformations. Nashville, Tennessee 1974. Proceedings. Edited by R. M. Miura. VIII, 295 pages. 1976.

Vol. 516: M. L. Silverstein, Boundary Theory for Symmetric Markov Processes. XVI, 314 pages. 1976.

Vol. 517: S. Glasner, Proximal Flows. VIII, 153 pages. 1976.

Vol. 518: Séminaire de Théorie du Potentiel, Proceedings Paris 1972–1974. Edité par F. Hirsch et G. Mokobodzki. VI, 275 pages. 1976.

Vol. 519: J. Schmets, Espaces de Fonctions Continues. XII, 150 pages. 1976.

Vol. 520: R. H. Farrell, Techniques of Multivariate Calculation. X, 337 pages. 1976.

Vol. 521: G. Cherlin, Model Theoretic Algebra – Selected Topics. IV, 234 pages. 1976.

Vol. 522: C. O. Bloom and N. D. Kazarinoff, Short Wave Radiation Problems in Inhomogeneous Media: Asymptotic Solutions. V. 104 pages. 1976.

Vol. 523: S. A. Albeverio and R. J. Høegh-Krohn, Mathematical Theory of Feynman Path Integrals. IV, 139 pages. 1976.

Vol. 524: Séminaire Pierre Lelong (Analyse) Année 1974/75. Edité par P. Lelong. V, 222 pages. 1976.

Vol. 525: Structural Stability, the Theory of Catastrophes, and Applications in the Sciences. Proceedings 1975. Edited by P. Hilton. VI, 408 pages. 1976.

Vol. 526: Probability in Banach Spaces. Proceedings 1975. Edited by A. Beck. VI, 290 pages. 1976.

Vol. 527: M. Denker, Ch. Grillenberger, and K. Sigmund, Ergodic Theory on Compact Spaces. IV, 360 pages. 1976.

Vol. 528: J. E. Humphreys, Ordinary and Modular Representations of Chevalley Groups. III, 127 pages. 1976.

Vol. 529: J. Grandell, Doubly Stochastic Poisson Processes. X, 234 pages. 1976.

Vol. 530: S. S. Gelbart, Weil's Representation and the Spectrum of the Metaplectic Group. VII, 140 pages. 1976.

Vol. 531: Y.-C. Wong, The Topology of Uniform Convergence on Order-Bounded Sets. VI, 163 pages. 1976.

Vol. 532: Théorie Ergodique. Proceedings 1973/1974. Edité par J.-P. Conze and M. S. Keane. VIII, 227 pages. 1976.

Vol. 533: F. R. Cohen, T. J. Lada, and J. P. May, The Homology of Iterated Loop Spaces. IX, 490 pages. 1976.

Vol. 534: C. Preston, Random Fields. V, 200 pages. 1976.

Vol. 535: Singularités d'Applications Differentiables. Plans-sur-Bex. 1975. Edité par O. Burlet et F. Ronga. V, 253 pages. 1976.

Vol. 536: W. M. Schmidt, Equations over Finite Fields. An Elementary Approach. IX, 267 pages. 1976.

Vol. 537: Set Theory and Hierarchy Theory. Bierutowice, Poland 1975. A Memorial Tribute to Andrzej Mostowski. Edited by W. Marek, M. Srebrny and A. Zarach. XIII, 345 pages. 1976.

Vol. 538: G. Fischer, Complex Analytic Geometry. VII, 201 pages. 1976.

Vol. 539: A. Badrikian, J. F. C. Kingman et J. Kuelbs, Ecole d'Eté de Probabilités de Saint Flour V-1975. Edité par P.-L. Hennequin. IX, 314 pages. 1976.

Vol. 540: Categorical Topology, Proceedings 1975. Edited by E. Binz and H. Herrlich. XV, 719 pages. 1976.

Vol. 541: Measure Theory, Oberwolfach 1975. Proceedings. Edited by A. Bellow and D. Kölzow. XIV, 430 pages. 1976.

Vol. 542: D. A. Edwards and H. M. Hastings, Čech and Steenrod Homotopy Theories with Applications to Geometric Topology. VII, 296 pages. 1976.

Vol. 543: Nonlinear Operators and the Calculus of Variations, Bruxelles 1975. Edited by J. P. Gossez, E. J. Lami Dozo, J. Mawhin, and L. Waelbroeck, VII, 237 pages. 1976.

Vol. 544: Robert P. Langlands, On the Functional Equations Satisfied by Eisenstein Series. VII, 337 pages. 1976.

Vol. 545: Noncommutative Ring Theory. Kent State 1975. Edited by J. H. Cozzens and F. L. Sandomierski. V, 212 pages. 1976.

Vol. 546: K. Mahler, Lectures on Transcendental Numbers. Edited and Completed by B. Diviš and W. J. Le Veque. XXI, 254 pages. 1976.

Vol. 547: A. Mukherjea and N. A. Tserpes, Measures on Topological Semigroups: Convolution Products and Random Walks. V, 197 pages. 1976.

Vol. 548: D. A. Hejhal, The Selberg Trace Formula for PSL $(2, \mathbb{R})$. Volume I. VI, 516 pages. 1976.

Vol. 549: Brauer Groups, Evanston 1975. Proceedings. Edited by D. Zelinsky. V, 187 pages. 1976.

Vol. 550: Proceedings of the Third Japan – USSR Symposium on Probability Theory. Edited by G. Maruyama and J. V. Prokhorov. VI, 722 pages. 1976.

Vol. 551: Algebraic K-Theory, Evanston 1976. Proceedings. Edited by M. R. Stein. XI, 409 pages. 1976.

Vol. 552: C. G. Gibson, K. Wirthmüller, A. A. du Plessis and E. J. N. Looijenga. Topological Stability of Smooth Mappings. V, 155 pages. 1976.

Vol. 553: M. Petrich, Categories of Algebraic Systems. Vector and Projective Spaces, Semigroups, Rings and Lattices. VIII, 217 pages. 1976.

Vol. 554: J. D. H. Smith, Mal'cev Varieties. VIII, 158 pages. 1976.

Vol. 555: M. Ishida, The Genus Fields of Algebraic Number Fields. VII, 116 pages. 1976.

Vol. 556: Approximation Theory. Bonn 1976. Proceedings. Edited by R. Schaback and K. Scherer. VII, 466 pages. 1976.

Vol. 557: W. Iberkleid and T. Petrie, Smooth S^1 Manifolds. III, 163 pages. 1976.

Vol. 558: B. Weisfeiler, On Construction and Identification of Graphs. XIV, 237 pages. 1976.

Vol. 559: J.-P. Caubet, Le Mouvement Brownien Relativiste. IX, 212 pages. 1976.

Vol. 560: Combinatorial Mathematics, IV, Proceedings 1975. Edited by L. R. A. Casse and W. D. Wallis. VII, 249 pages. 1976.

Vol. 561: Function Theoretic Methods for Partial Differential Equations. Darmstadt 1976. Proceedings. Edited by V. E. Meister, N. Weck and W. L. Wendland. XVIII, 520 pages. 1976.

Vol. 562: R. W. Goodman, Nilpotent Lie Groups: Structure and Applications to Analysis. X, 210 pages. 1976.

Vol. 563: Séminaire de Théorie du Potentiel. Paris, No. 2. Proceedings 1975–1976. Edited by F. Hirsch and G. Mokobodzki. VI, 292 pages. 1976.

Vol. 564: Ordinary and Partial Differential Equations, Dundee 1976. Proceedings. Edited by W. N. Everitt and B. D. Sleeman. XVIII, 551 pages. 1976.

Vol. 565: Turbulence and Navier Stokes Equations. Proceedings 1975. Edited by R. Temam. IX, 194 pages. 1976.

Vol. 566: Empirical Distributions and Processes. Oberwolfach 1976. Proceedings. Edited by P. Gaenssler and P. Révész. VII, 146 pages. 1976.

Vol. 567: Séminaire Bourbaki vol. 1975/76. Exposés 471–488. IV, 303 pages. 1977.

Vol. 568: R. E. Gaines and J. L. Mawhin, Coincidence Degree, and Nonlinear Differential Equations. V, 262 pages. 1977.

Vol. 569: Cohomologie Etale SGA 4½. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie. Edité par P. Deligne. V, 312 pages. 1977.

Vol. 570: Differential Geometrical Methods in Mathematical Physics, Bonn 1975. Proceedings. Edited by K. Bleuler and A. Reetz. VIII, 576 pages. 1977.

Vol. 571: Constructive Theory of Functions of Several Variables, Oberwolfach 1976. Proceedings. Edited by W. Schempp and K. Zeller. VI, 290 pages. 1977

Vol. 572: Sparse Matrix Techniques, Copenhagen 1976. Edited by V. A. Barker. V, 184 pages. 1977.

Vol. 573: Group Theory, Canberra 1975. Proceedings. Edited by R. A. Bryce, J. Cossey and M. F. Newman. VII, 146 pages. 1977.

Vol. 574: J. Moldestad, Computations in Higher Types. IV, 203 pages. 1977.

Vol. 575: K-Theory and Operator Algebras, Athens, Georgia 1975. Edited by B. B. Morrel and I. M. Singer. VI, 191 pages. 1977.

Vol. 576: V. S. Varadarajan, Harmonic Analysis on Real Reductive Groups. VI, 521 pages. 1977.

Vol. 577: J. P. May, E_∞ Ring Spaces and E_∞ Ring Spectra. IV, 268 pages. 1977.

Vol. 578: Séminaire Pierre Lelong (Analyse) Année 1975/76. Edité par P. Lelong. VI, 327 pages. 1977.

Vol. 579: Combinatoire et Représentation du Groupe Symétrique, Strasbourg 1976. Proceedings 1976. Edité par D. Foata. IV, 339 pages. 1977.

Vol. 580: C. Castaing and M. Valadier, Convex Analysis and Measurable Multifunctions. VIII, 278 pages. 1977.

Vol. 581: Séminaire de Probabilités XI, Université de Strasbourg. Proceedings 1975/1976. Edité par C. Dellacherie, P. A. Meyer et M. Weil. VI, 574 pages. 1977.

Vol. 582: J. M. G. Fell, Induced Representations and Banach *-Algebraic Bundles. IV, 349 pages. 1977.

Vol. 583: W. Hirsch, C. C. Pugh and M. Shub, Invariant Manifolds. IV, 149 pages. 1977.

Vol. 584: C. Brezinski, Accélération de la Convergence en Analyse Numérique. IV, 313 pages. 1977.

Vol. 585: T. A. Springer, Invariant Theory. VI, 112 pages. 1977.

Vol. 586: Séminaire d'Algèbre Paul Dubreil, Paris 1975–1976 (29ème Année). Edited by M. P. Malliavin. VI, 188 pages. 1977.

Vol. 587: Non-Commutative Harmonic Analysis. Proceedings 1976. Edited by J. Carmona and M. Vergne. IV, 240 pages. 1977.

Vol. 588: P. Molino, Théorie des G-Structures: Le Problème d'Equivalence. VI, 163 pages. 1977.

Vol. 589: Cohomologie l-adique et Fonctions L. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1965–66, SGA 5. Edité par L. Illusie. XII, 484 pages. 1977.

Vol. 590: H. Matsumoto, Analyse Harmonique dans les Systèmes de Tits Bornologiques de Type Affine. IV, 219 pages. 1977.

Vol. 591: G. A. Anderson, Surgery with Coefficients. VIII, 157 pages. 1977.

Vol. 592: D. Voigt, Induzierte Darstellungen in der Theorie der endlichen, algebraischen Gruppen. V, 413 Seiten. 1977.

Vol. 593: K. Barbey and H. König, Abstract Analytic Function Theory and Hardy Algebras. VIII, 260 pages. 1977.

Vol. 594: Singular Perturbations and Boundary Layer Theory, Lyon 1976. Edited by C. M. Brauner, B. Gay, and J. Mathieu. VIII, 539 pages. 1977.

Vol. 595: W. Hazod, Stetige Faltungshalbgruppen von Wahrscheinlichkeitsmaßen und erzeugende Distributionen. XIII, 157 Seiten. 1977.

Vol. 596: K. Deimling, Ordinary Differential Equations in Banach Spaces. VI, 137 pages. 1977.

Vol. 597: Geometry and Topology, Rio de Janeiro, July 1976. Proceedings. Edited by J. Palis and M. do Carmo. VI, 866 pages. 1977.

Vol. 598: J. Hoffmann-Jørgensen, T. M. Liggett et J. Neveu, Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour VI – 1976. Edité par P.-L. Hennequin. XII, 447 pages. 1977.

Vol. 599: Complex Analysis, Kentucky 1976. Proceedings. Edited by J. D. Buckholtz and T. J. Suffridge. X, 159 pages. 1977.

Vol. 600: W. Stoll, Value Distribution on Parabolic Spaces. VIII, 216 pages. 1977.

Vol. 601: Modular Functions of one Variable V, Bonn 1976. Proceedings. Edited by J.-P. Serre and D. B. Zagier. VI, 294 pages. 1977.

Vol. 602: J. P. Brezin, Harmonic Analysis on Compact Solvmanifolds. VIII, 179 pages. 1977.

Vol. 603: B. Moishezon, Complex Surfaces and Connected Sums of Complex Projective Planes. IV, 234 pages. 1977.

Vol. 604: Banach Spaces of Analytic Functions, Kent, Ohio 1976. Proceedings. Edited by J. Baker, C. Cleaver and Joseph Diestel. VI, 141 pages. 1977.

Vol. 605: Sario et al., Classification Theory of Riemannian Manifolds. XX, 498 pages. 1977.

Vol. 606: Mathematical Aspects of Finite Element Methods. Proceedings 1975. Edited by I. Galligani and E. Magenes. VI, 362 pages. 1977.

Vol. 607: M. Métivier, Reelle und Vektorwertige Quasimartingale und die Theorie der Stochastischen Integration. X, 310 Seiten. 1977.

Vol. 608: Bigard et al., Groupes et Anneaux Réticulés. XIV, 334 pages. 1977.

Vol. 609: General Topology and Its Relations to Modern Analysis and Algebra IV. Proceedings 1976. Edited by J. Novák. XVIII, 225 pages. 1977.

Vol. 610: G. Jensen, Higher Order Contact of Submanifolds of Homogeneous Spaces. XII, 154 pages. 1977.

Vol. 611: M. Makkai and G. E. Reyes, First Order Categorical Logic. VIII, 301 pages. 1977.

Vol. 612: E. M. Kleinberg, Infinitary Combinatorics and the Axiom of Determinateness. VIII, 150 pages. 1977.

Vol. 613: E. Behrends et al., L^P-Structure in Real Banach Spaces. X, 108 pages. 1977.

Vol. 614: H. Yanagihara, Theory of Hopf Algebras Attached to Group Schemes. VIII, 308 pages. 1977.

Vol. 615: Turbulence Seminar, Proceedings 1976/77. Edited by P. Bernard and T. Ratiu. VI, 155 pages. 1977.

Vol. 616: Abelian Group Theory, 2nd New Mexico State University Conference, 1976. Proceedings. Edited by D. Arnold, R. Hunter and E. Walker. X, 423 pages. 1977.

Vol. 617: K. J. Devlin, The Axiom of Constructibility: A Guide for the Mathematician. VIII, 96 pages. 1977.

Vol. 618: I. I. Hirschman, Jr. and D. E. Hughes, Extreme Eigen Values of Toeplitz Operators. VI, 145 pages. 1977.

Vol. 619: Set Theory and Hierarchy Theory V, Bierutowice 1976. Edited by A. Lachlan, M. Srebrny, and A. Zarach. VIII, 358 pages. 1977.

Vol. 620: H. Popp, Moduli Theory and Classification Theory of Algebraic Varieties. VIII, 189 pages. 1977.

Vol. 621: Kauffman et al., The Deficiency Index Problem. VI, 112 pages. 1977.

Vol. 622: Combinatorial Mathematics V, Melbourne 1976. Proceedings. Edited by C. Little. VIII, 213 pages. 1977.

Vol. 623: I. Erdelyi and R. Lange, Spectral Decompositions on Banach Spaces. VIII, 122 pages. 1977.

Vol. 624: Y. Guivarc'h et al., Marches Aléatoires sur les Groupes de Lie. VIII, 292 pages. 1977.

Vol. 625: J. P. Alexander et al., Odd Order Group Actions and Witt Classification of Innerproducts. IV, 202 pages. 1977.

Vol. 626: Number Theory Day, New York 1976. Proceedings. Edited by M. B. Nathanson. VI, 241 pages. 1977.

Vol. 627: Modular Functions of One Variable VI, Bonn 1976. Proceedings. Edited by J.-P. Serre and D. B. Zagier. VI, 339 pages. 1977.

Vol. 628: H. J. Baues, Obstruction Theory on the Homotopy Classification of Maps. XII, 387 pages. 1977.

Vol. 629: W.A. Coppel, Dichotomies in Stability Theory. VI, 98 pages. 1978.

Vol. 630: Numerical Analysis, Proceedings, Biennial Conference, Dundee 1977. Edited by G. A. Watson. XII, 199 pages. 1978.

Vol. 631: Numerical Treatment of Differential Equations. Proceedings 1976. Edited by R. Bulirsch, R. D. Grigorieff, and J. Schröder. X, 219 pages. 1978.

Vol. 632: J.-F. Boutot, Schéma de Picard Local. X, 165 pages. 1978.

Vol. 633: N. R. Coleff and M. E. Herrera, Les Courants Résiduels Associés à une Forme Méromorphe. X, 211 pages. 1978.

Vol. 634: H. Kurke et al., Die Approximationseigenschaft lokaler Ringe. IV, 204 Seiten. 1978.

Vol. 635: T. Y. Lam, Serre's Conjecture. XVI, 227 pages. 1978.

Vol. 636: Journées de Statistique des Processus Stochastiques, Grenoble 1977, Proceedings. Edité par Didier Dacunha-Castelle et Bernard Van Cutsem. VII, 202 pages. 1978.

Vol. 637: W. B. Jurkat, Meromorphe Differentialgleichungen. VII, 194 Seiten. 1978.

Vol. 638: P. Shanahan, The Atiyah-Singer Index Theorem, An Introduction. V, 224 pages. 1978.

Vol. 639: N. Adasch et al., Topological Vector Spaces. V, 125 pages. 1978.

Vol. 640: J. L. Dupont, Curvature and Characteristic Classes. X, 175 pages. 1978.

Vol. 641: Séminaire d'Algèbre Paul Dubreil, Proceedings, Paris 1976–1977. Edité par M. P. Malliavin. IV, 367 pages. 1978.