
STOP

Über die Rolle von Zirkel und Lineal in der griechischen Mathematik.*)

Von Arthur Donald Steele (Heythrop, England).

(Eingegangen 30. 10. 1935).

Inhaltsübersicht.

Schlüssel zu den Stellenangaben.

1. Wir verweisen mit fetten Ziffern auf die Nummern im Verzeichnis der genannten Schriften (S. 364—369), mit anderen Ziffern auf Band und Seite der dort erwähnten Ausgaben und Auflagen. Ein Doppelpunkt trennt Seiten- und Zeilenzahl.

2. Mit den bloßen Namen Archimedes, Eutocius, Pappus bzw. Proclus verweisen wir auf die häufig angeführten Schriften: **6** (Opera, ed. Heiberg), **14** (in Archimedem, ed. Heiberg), **20** (Collectiones, ed. Hultsch) bzw. **30** (in primum Euclidis Elementorum librum, ed. Friedlein).

*) Dissertation der Philosophischen Fakultät der Universität Bonn.

3. Da die neue Bearbeitung der Teubner-Ausgabe des Plutarch noch unvollständig ist, geben wir die üblichen Randzahlen an. Die Nummer des Bandes, in welchem die betreffende Schrift bei Sintenis oder Bernardakis zu suchen ist, wird in Klammern und mit kleinen römischen Ziffern jeweils beigefügt.

Einleitung.

Die neuere Mathematik hat die Aufgaben der Verdoppelung des Würfels, der Dreiteilung des Winkels und der Kreisquadratur von den Griechen übernommen. Sie erteilt diesen Aufgaben einen festumrissenen Sinn, indem sie genau die Hilfsmittel angibt, die bei der Lösung angewendet werden dürfen. Erst diese Umschreibung der Hilfsmittel schafft die notwendige Grundlage um behaupten und beweisen zu können, daß die drei genannten Aufgaben mit gewissen Werkzeugen, etwa mit Zirkel und Lineal, nicht ausführbar sind.

Die vorliegende Arbeit stellt sich die Aufgabe zu untersuchen, inwiefern solche Beschränkungen der Hilfsmittel von den Griechen selbst empfunden oder ausgesprochen worden sind. Der Umstand, daß Euklid in seinen *Elementen* tatsächlich nur Zirkel und Lineal verwendet, hat für die Mathematikhistoriker der letzten Jahrzehnte die Grundlage für die Meinung abgegeben, die Griechen hätten die genannten Aufgaben im Sinne der Beschränkung auf Zirkel und Lineal verstanden. Viele von ihnen haben überdies die Ansicht vertreten, daß ein besonderes Verbot Platons den Anlaß dazu gegeben habe.

Der *erste Teil* dieser Arbeit durchmustert die Äußerungen der Mathematikhistoriker über die genannte Frage und kommt zu dem Ergebnis (§ 1), daß ihre Ansichten außerordentlich schwanken, daß aber die Quellen, auf welche diese Ansichten gestützt werden, immer und immer wieder die gleichen sind, nämlich diejenigen drei Stellen, die Hankel zuerst herbeigezogen hatte. Eine genauere Auslegung dieser drei Stellen ergibt dann (§§ 2—4) daß sie für die Frage der Verwendung von Zirkel und Lineal bei den geometrischen Konstruktionen der Griechen keine ernsthafte Stütze enthalten.

Der *zweite Teil* bringt die planmäßige Untersuchung einer Reihe von anderen Quellen, die auf das Verhalten der Mathematiker vor Platon und derjenigen, die unter Platons Einfluß standen, insbesondere auf das Verhalten Platons selbst ein helleres Licht werfen. Vollständiger als im ersten Teile stellt es sich dann heraus, daß weder ein solches Verbot Platons noch irgendwelche Wirkungen eines solchen nachweisbar sind.

Hinter diesem Glauben der Mathematikhistoriker an ein „Verbot Platons" steht — ohne daß es irgendwo ausgesprochen worden ist —

die Vorstellung, daß es Platon nicht so sehr um Zirkel und Lineal zu tun gewesen ist, als vielmehr darum, daß bei jeder geometrischen Theorie die στοιχεῖα derselben und bei jeder Konstruktionsaufgabe die ihrer φύσις gemäßen Hilfsmittel genau und bewußt herausgearbeitet werden müssen, im Sinne der Richtlinien für die mathematischen Wissenschaften am Ende des sechsten Buches vom Staat. Möglich, daß die weitere Erforschung der mathematischen Denkweise Platons einmal über diese Frage eine Entscheidung bringen wird oder wenigstens einen Aufschluß darüber, in welchem genaueren Sinne Platon seine Zeitgenossen und Nachfolger beeinflußt hat. Bei dem heutigen Stande dieser Wissenschaft bleibt nichts übrig, als im dritten Teil der vorliegenden Arbeit festzustellen, in welchem Sinne die nacheuklidischen Mathematiker sich in einigen ihrer Arbeiten auf den Gebrauch von Zirkel und Lineal beschränkt haben (§ 9), inwieweit sie Fragen der Unmöglichkeit einer Lösung mit Zirkel und Lineal oder überhaupt mit vorgegebenen Hilfsmitteln erörtert haben (§ 10), und ob wir bei den Griechen eine entfernte Vorbereitung auf die heutige algebraische (§ 11) und gruppentheoretische (§ 12) Auffassung dieser Lehren beobachten können.

In der „Zusammenfassung" am Schluß der Arbeit findet man deren Ergebnisse rückschauend ausgesprochen.

Teil I: Die bisher verwendeten Zeugnisse über die Rolle von Zirkel und Lineal bei den Griechen.

§ 1.
Die Ansichten der neueren Mathematikhistoriker.

Die älteren mathematischen Geschichtsschreiber haben über die Fragen, denen die vorliegende Arbeit gewidmet ist, keine besonderen Untersuchungen angestellt. Von einer Beschränkung der zeichnerischen Mittel auf Zirkel und Lineal, welche für die gesamte Geometrie gegolten hätte, oder auf Platons Geheiß entstanden wäre, ist auch in ihren gelegentlichen Äußerungen nicht die Rede. Noch im Jahre 1873 erklärte Guldberg: „Die Werkzeuge, die in der elementaren Geometrie angewendet und nach altem Herkommen allein zur Benutzung zugelassen werden, sind das Lineal und der Zirkel" [1]). Hier ist eine Beschränkung auf Zirkel und Lineal ausgesprochen, aber lediglich für den Bereich der elementaren Geometrie. Im nächsten Jahre 1874 erscheint Hankels Geschichte der Mathematik (59), die auch in unserer

[1]) „De Instrumenter, som anvendes i den elementære Geometri og efter gammel Vedtægt alene tillades at benyttes, ere Linealen og Passeren" (55, 15).

Frage für die folgende Zeit bestimmend wird. Hankel schildert die Möndchen des Hippokrates, aber ohne bei diesem Anlaß unsere Frage anzuschneiden (p. 127). In einem anderen Zusammenhang sagt er dann etwas später: „Wir verdanken daher Plato die für die Geometrie so wichtige Beschränkung der geometrischen Instrumente auf jene zwei elementaren. Die anderen, von ihren Erfindern oft mit Pomp angekündigten Instrumente sind heute vergessen, da ihnen jede höhere wissenschaftliche Bedeutung abging" (p. 156). Hankel stützt sich mit dieser Behauptung auf zwei Stellen bei Plutarch und auf eine Äußerung in Platons Staat, die wir in §§ 2—4 der Reihe nach mitteilen und untersuchen. Seine Behauptung wurde in der Folgezeit oft wiederholt, aber entweder ohne jeden Beleg, oder mit denselben Belegen, die Hankel selbst herangezogen hatte. Die Schriftsteller, welche diese Ansicht immer wieder zum Ausdruck brachten, zeigten nicht immer die Zurückhaltung, mit welcher Hankel nur von anderen Geräten, nicht von anderen Kurven sprach, und auch nicht immer mit Hankels Einsicht in den Einfluß einer solchen Beschränkung auf die Bildung und Entwicklung von besonderen geometrischen Theorien. Wenn aber Hankels einzigartige Verbindung von mathematischer Schulung und geschichtlichem Tiefblick allen seinen Ansichten ein besonderes Gewicht verleiht, so ist andererseits zu beachten, daß seine Geschichte der Mathematik ein unvollendetes und unüberprüftes Werk geblieben ist, das erst nach des Verfassers frühem Tod herausgegeben wurde. Die Schilderung der griechischen Geometrie bricht gerade mit den Worten ab, die wir soeben anführten. Die ungenaue Wiedergabe der Behauptungen Clausens über die Möndchen (**59**, 127 über **94**, 375—376) zeigt in einem verwandten Zusammenhang, daß die verbessernde Hand des Verfassers an dieser Stelle fehlte[2]). Darum ist es mit der Hochachtung vereinbar, die Hankel unbedingt gebührt, daß diese drei Belegstellen noch einmal auf ihren Inhalt geprüft werden sollen.

Hankels Behauptung wurde in der Folgezeit oft wiederholt. Schon 1884 von Gow: „It may therefore be said that we owe to Plato the strict limitation of geometrical instruments to the ruler and compasses" (**54**, 181) und von Heiberg: „Der Sinn von Platons Tadel kann doch nur sein, daß Eudoxus, Archytas und Menaechmus zur Verdoppelung des Würfels Kurven angewandt hatten, die nicht mit Zirkel und Richtscheit konstruiert werden konnten" (**63**, 474) und 1886, wenn auch bereits etwas weniger scharf, von Zeuthen: „Daß die unbedingte Bevorzugung des Gebrauchs von Zirkel und Lineal, die wir jedenfalls bei Euklid finden, nicht uralt ist, sondern etwa erst von der Zeit Platos herrührt" (**86**, 271); diese Bemerkung hatte in der dänischen

[2]) Diese Unstimmigkeit wurde kürzlich auch von Wieleitner und Hofmann hervorgehoben (**82**, 33, Anm. 58).

Ausgabe der „Kegelschnitte im Altertum“ gefehlt (85, 176). Dann wieder 1888 von Ball: „Thus, the objection that he expressed to the use of any instruments other than a ruler and a pair of compasses in the construction of curves was at once accepted as a canon which must be observed in all such problems“ (45, 40). Rudio schrieb 1892 nicht so eindeutig von der Person Platons: „Immerhin darf darauf aufmerksam gemacht werden, daß von der Zeit Platons an, die Einsicht sich bei den Mathematikern zu befestigen begann, daß die Quadratur des Zirkels eine mit Zirkel und Lineal auszuführende Aufgabe sei“ (73, 14, Anm. 2). Drei Jahre später hat Günther die volle Behauptung mit ganz besonderem Nachdruck wiederholt: „Wir haben vielmehr daran festzuhalten, daß auf den strengen Denker, der das μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω [3]) zur Devise erkoren hatte, jene rigorose Definition des Begriffs ‚geometrische Lösung‘ sich zurückführt, welche alle anderen Hilfsmittel als Zirkel und Lineal unnachsichtlich von der Konstruktion ausschließt“ (57, 484). Witting fand bei Platon keine durchgreifende Beschränkung (117, 150) und Loria war noch zurückhaltender: „La riduzione a due, riga e compasso, degli istrumenti concessi al geometra si dovrebbe ritenere dovuta à Platone, se si accetta l'interpretazione data da H. Hankel“ (66, 203, Anm. 1). Cantor vermißt bei Hankel den bündigen Beweis: „H. spricht mit apodiktischer Gewißheit, aber durch kein Zitat unterstützt, den Satz aus: Wir verdanken ... Zirkel und Lineal“, und behauptet seinerseits, ohne nähere Angabe der Quellen: „Es ist ferner nicht zu bezweifeln, daß langezeit, ob auf Platons Einfluß hin, wie behauptet worden ist, lassen wir dahingestellt, nur die Geometrie des Zirkels und Lineals als eigentliche Geometrie betrachtet worden ist“ (50, I, 234 und Anm. 1). Tropfke schreibt: „Plutarch überliefert zwei Stellen, in denen Platon ein Hinausgehen über Zirkel und Lineal tadelt“ (81, IV, 83) und erwähnt als vorkommende Einwendung gegen die Urheberschaft Platons nur das sogenannte platonische Mesolabium. Dijksterhuis bezieht die Tadelstellen bei Plutarch wiederum auf Platon und auf Zirkel und Lineal (52, 95—96) und wehrt sich dabei nur gegen den abweichenden Gebrauch, den Heath (61, I, 288) von der dritten Hankelschen Belegstelle gemacht hat.

Andere Vermutungen über die Entstehungszeit einer Beschränkung auf Zirkel und Lineal sind seltener aufgestellt worden. Zeuthen zufolge trat sie erst nach dem Wirken des Hippias in Kraft: „Denn Hippias lebte, bevor der Gebrauch von Zirkel und Lineal zur Pflicht

[3]) Wilamowitz fragt in seinem Platonbuch (84, I², 495, Anm. 2), ob denn μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω überhaupt noch anderswo als bei Tzetzes stehe (41, Chil. VIII, 973). Als Inschrift über Platons Akademie wird der Spruch von drei Aristoteleskommentatoren beiläufig genannt: von David (10, 5:12—13 und 57:16—20) von Elias (12, 118:19 und 119:4), und von Philoponus (25a, 117:27).

gemacht wurde“ [4]). Auf Grund von Proclus' Nachrichten über Oinopides vermutet Heath in diesem Vorplatoniker einen möglichen Urheber der Beschränkung (**60**, III, 525—526 und **61**, I, 175—176). Doch soll dies nur eine Erklärung sein, warum Oinopides als Entdecker eines derart einfachen Satzes gepriesen wird, nicht aber das Ergebnis einer förmlichen Auslegung des Wortlautes selbst.

Eine zweite Reihe von Ansichten tritt für eine Art bedingter Beschränkung auf Zirkel und Lineal ein. Bereits 1730 äußerte sich Rabuel (**112**, 96) und 1802 wieder Bossut (**46**, 33—37) dahin, daß andere Kurven, wenn sie auch nicht „geometrisch“ genannt wurden, dennoch erlaubt waren; man habe gehofft und versucht, mit Zirkel und Lineal auszukommen, habe jedoch beim Mißlingen dieser Versuche bereitwillig zu höheren Mitteln gegriffen; die Kegelschnitte seien sogar zu diesem Zweck, und sogar von Platon selbst eingeführt worden. Das Bestreben, bei gewissen Aufgaben mit jenen Hilfsmitteln auszukommen, sehen Enriques und Santillana erst im Zeitalter des Apollonius: „Soltanto nel secolo successivo A. cercherà di ottenerla (d. h., die Lösung gewisser Einschiebungen) per quanto è possibile con l'uso della riga e del compasso“ (**53**, 252). Eine regelrechte Verpflichtung dazu nahm Zeuthen 1894 an: „Le péché capital (ce qu'il serait aux yeux des anciens) de résoudre le problème dit section de raison au moyen des coniques“ (**89**, 169); Vahlen 1911: „Man verlangte sogar, daß nur bei Konstruktionen, deren Lösung mit Zirkel und Lineal nicht gelingt, die Kegelschnitte, und erst bei deren Unzulänglichkeit noch höhere Kurven zugezogen würden“ (**115**, 96); Zeuthen 1913 noch zweimal: „Es wäre dann töricht gewesen dort, wo man mit Zirkel und Lineal auskommt, den Gebrauch von anderen Hilfsmitteln zu verbieten und bei weitergehenden Aufgaben den Gebrauch von Linien zu fordern, die so schwer zu zeichnen sind wie die Kegelschnitte“ [5]), und: „L'exigence formelle, qu'on se serve exclusivement de la droite et du cercle pour exécuter les constructions pour lesquelles ces courbes suffisent“ (**93**, 438). Endlich neuerdings noch von Heath: „No doubt Plato's influence would help to keep the restriction in force; for other instruments, and the use of curves of higher order than circles in constructions, were expressly barred in any case where the ruler and compasses could be made to serve“ (**61**, I, 288). Heath nennt dabei noch einmal die Nachricht über Oinopides und verweist den Leser auf den Tadel, den Pappus (272:1) gegen Apollonius gerichtet hat; die vorhergehende, grundsätz-

[4]) „Thi Hippias levede, før Brug af Lineal og Passer gjordes til Pligt“ (**92**, 110).

[5]) „Saa vilde det have været taabeligt at forbyde Brugen af andre Hjælpemidler end Lineal og Passer, hvor man kan komme frem med disse, og ved videregaaende Opgaver kræve Brug af Linier, der ere saa vanskelige at tegne som Keglesnittene“ (**92**, 121).

lich ausgesprochene „Regel des Pappus“ (unten § 9) erwähnt Heath an dieser Stelle nicht.

Einige Vertreter der reinen Mathematik haben sich zur vorliegenden Frage geäußert. So befand sich im Nachlaß von Dirichlet der Entwurf zu einem volkstümlichen Vortrag über die Quadratur des Kreises, mit der vorsichtigen Behauptung: „Die Alten suchten die Auflösung aller Aufgaben durch rein geometrische Konstruktionen zu bewältigen“, und mit der später gegebenen Erklärung, daß damit die Konstruktionen mit Zirkel und Lineal gemeint seien (**96**, II, 361—362). Prym glaubt, daß die konstruktionstheoretische Nebenbedingung klar und scharf gestellt worden ist: „Es befestigte sich durch das von ihm (d. h., von Hippokrates) Geleistete bei den Mathematikern die Überzeugung, daß die Quadratur des Kreises ausschließlich mit Hilfe von Zirkel und Lineal durchführbar sei, und so ging, indem man auf diese Art von Lösung nun das Hauptgewicht legte, aus der früher allgemein gestellten Aufgabe jetzt das Problem der Quadratur des Kreises im engeren Sinne hervor“ (**70**, 14). Felix Klein nähert sich der Ansicht von Dirichlet und fügt den bemerkenswerten Zusatz bei: „Und eben darin lag die Berühmtheit derselben (d. h., der drei klassischen Aufgaben), daß zu ihrer Bewältigung höhere Mittel nötig erschienen“ (**107**, 1).

Eine dritte Reihe von Ansichten läßt Platon die Kegelschnitte nicht allein nicht vermeiden, sondern geradezu einführen. So zum Beispiel 1802 Bossut (**46**, 36), 1828 Poppe (**69**, 60), 1850 Wittstein (**118**, 6) und 1852 Arneth (**44**, 89). Reimer hatte 1798 die Einteilung der Geometrie in elementare mit Zirkel und Lineal, höhere mit höheren Kurven, ausdrücklich auf Platon zurückgeführt (**71**, 36), während derselbe Platon nach Tropfkes Meinung sich „gegen die Zulassung der Kegelschnitte sowie höherer Kurven wandte“ (**81**, IV, 83).

Das Ergebnis einer umfassenden Durchmusterung aller einschlägigen Werke ist also, daß die Mathematikhistoriker der letzten Jahrzehnte in ihren Ansichten über Zirkel und Lineal außerordentlich schwanken. Aber diese Ansichten beruhen nicht auf der planmäßigen Untersuchung aller vorliegenden Quellen. Sehr selten und nur vorübergehend wird überhaupt eine neue Stelle genannt. Die einen Schriftsteller verzichten auf die Darlegung ihrer Quellen, immer und immer wieder halten andere, als Stütze für die Hankelsche Ansicht, an den drei von Hankel selbst benutzten Stellen fest und tragen ihnen keine neuen hinzu.

In den übrigen Abschnitten dieses ersten Teiles nehmen wir eine erneute Prüfung der Hankelschen Belegstellen vor. Wir wenden uns zunächst den beiden Tadelstellen aus Plutarch zu (§ 2) und versuchen dann, aus dem Wortlaut selbst, aus anderen schriftlichen Zeugnissen und insbesondere aus der dritten Belegstelle Hankels den Sinn von

Platons Tadel genauer zu bestimmen (§ 3). Endlich soll unsere Deutung durch den Vergleich mit der tatsächlichen Weiterentwicklung der Geometrie noch einmal auf die Probe gestellt werden (§ 4).

§ 2.
Die Tadelstellen bei Plutarch.

Zweimal berichtet Plutarch von einem Tadel, den Platon gegen Eudoxus, Archytas und Menaechmus gerichtet habe. Die zweite Frage im achten Buch der Quaestiones convivales lautet: „πῶς Πλάτων ἔλεγε τὸν θεὸν ἀεὶ γεωμετρεῖν“. Diogenianus zweifelt zuerst, ob dieser Spruch wirklich von Platon herrührt. Der Leiter des Gespräches antwortet ihm, die Worte stünden zwar nirgends in den Schriften Platons, seien aber glaubwürdig genug und ganz im Geiste Platons gehalten. Tyndares erblickt in ihnen nichts Geheimnisvolles, sondern bevorzugt die ungesuchte Erklärung, die Geometrie hebe uns (wie Platon oft gesagt und geschrieben habe) über die Sinneswelt empor; in allen Wissenschaften, vornehmlich aber in ihrer Mutterstadt, der Geometrie, fänden wir Spuren der geistigen Wahrheiten, die unsere Seele nach oben richteten, sie reinigten und von den Störungen der Wahrnehmungswelt befreiten. Dann fährt Tyndares fort

Πλάτων αὐτὸς ἐμέμψατο τοὺς περὶ Εὔδοξον καὶ Ἀρχύταν καὶ Μέναιχμον εἰς ὀργανικὰς καὶ μηχανικὰς κατασκευὰς τὸν τοῦ στερεοῦ διπλασιασμὸν ἀπάγειν ἐπιχειροῦντας, ὥσπερ πειρωμένους δι' ἀλόγου δύο μέσας ἀνάλογον μὴ παρείκοι λαβεῖν· ἀπόλλυσθαι γὰρ οὕτω καὶ διαφθείρεσθαι τὸ γεωμετρίας ἀγαθὸν αὖθις ἐπὶ τὰ αἰσθητὰ παλινδρομούσης, καὶ μὴ φερομένης ἄνω, μηδ' ἀντιλαμβανομένης τῶν ἀιδίων καὶ ἀσωμάτων εἰκόνων, πρὸς αἷσπερ ὢν ὁ θεὸς ἀεὶ θεός ἐστιν, 718 EF (iv).

Platon selbst tadelte die Kreise um Eudoxus, Archytas und Menaechmus, daß sie sich daran machten, die Verdoppelung des Raumstücks auf gerätliche und mechanische Konstruktionen zurückzuführen, weil sie so versuchten, ob es nicht doch gehe, zwei mittlere Proportionalen durch ein nichttheoretisches Verfahren[6]) herzustellen; denn so werde das Gute an der Geometrie verdorben und zugrundegerichtet, indem sie sich wieder zum Sinnfälligen zurückwende und nicht nach oben sich erhebe, noch festhalte an den ewigen, unkörperlichen Bildwesen, bei denen verweilend Gott eben Gott in Ewigkeit bleibt.

[6]) Zu δι' ἀλόγου im Sinne von „durch ein nichttheoretisches Verfahren“ vergleiche Pseudoammonius (Herennius Philon, ein Zeitgenosse Plutarchs): „Τεχνίτης μὲν γάρ ἐστιν ὁ λογικῆς τινὸς τέχνης ἔμπειρος καθεστώς· βάναυσος δέ, ὁ δι' ἀλόγου τινὸς ἐπιτηδεύματος“. (2, Valk. p. 134, Schn. p. 129).

Die zweite Tadelstelle steht im Leben des Marcellus. Dieser römische Feldherr hatte bei der Belagerung von Syrakus acht Schiffe zusammengebunden und auf ihnen ein Belagerungswerkzeug errichtet, welches sich gegen die Wehrgeräte des Archimedes doch nicht behaupten konnte. Von diesen Wehrgeräten, die Archimedes schon zur Zeit des Friedens erfunden hatte, heißt es dann weiter:

Τὴν γὰρ ἀγαπωμένην ταύτην καὶ περιβόητον ὀργανικὴν ἤρξαντο μὲν κινεῖν οἱ περὶ Εὔδοξον καὶ Ἀρχύταν, ποικίλλοντες τῷ γλαφυρῷ γεωμετρίαν καὶ λογικῆς καὶ γραμμικῆς ἀποδείξεως οὐκ εὐποροῦντα προβλήματα δι' αἰσθητῶν καὶ ὀργανικῶν παραδειγμάτων ὑπερείδοντες· ὡς τὸ περὶ δύο μέσας ἀνάλογον πρόβλημα καὶ στοιχεῖον ἐπὶ πολλὰ τῶν γραφομένων ἀναγκαῖον εἰς ὀργανικὰς ἐξῆγον ἀμφότεροι κατασκευάς, μεσογράφους τινὰς ἀπὸ καμπύλων γραμμῶν καὶ τμημάτων μεθαρμόζοντες. Ἐπεὶ δὲ Πλάτων ἠγανάκτησε καὶ διετείνατο πρὸς αὐτοὺς ὡς ἀπολλύντας καὶ διαφθείροντας τὸ γεωμετρίας ἀγαθόν, ἀπὸ τῶν ἀσωμάτων καὶ νοητῶν ἀποδιδρασκούσης ἐπὶ τὰ αἰσθητὰ καὶ προσχρωμένης αὖθις αὖ σώμασι πολλῆς καὶ φορτικῆς βαναυσουργίας δεομένοις, οὕτω διεκρίθη γεωμετρίας ἐκπεσοῦσα μηχανική, καὶ περιορωμένη πολὺν χρόνον ὑπὸ φιλοσοφίας μία τῶν στρατιωτίδων τεχνῶν ἐγεγόνει, 305 EF (ii).

Die Kreise um Eudoxus und Archytas brachten die geschätzte und vielgepriesene Gerätekunde in Bewegung. Sie verliehen der Geometrie eine zierliche Abwechselung[7]) und unterstützten mit sinnfälligen Modellen die Aufgaben, die mit abstrakten und geometrischen Lösungen nicht gut versehen waren. Die Aufgabe, z. B., über zwei mittlere Proportionalen, diese notwendige Vorstufe zu vielen Konstruktionen, führten beide Gruppen auf gerätliche Herstellungen zurück, indem sie, ausgehend von krummen Linien und Schnitten, nach deren Muster[8]) gewisse „Mittelwertner“ zusammenfügten. Darüber wurde Platon unwillig und er hielt ihnen entgegen, daß sie das Gute an der Geometrie auf diese Weise verdürben und zugrunde richteten, sofern diese von begrifflichen und unkörperlichen Dingen zum Sinnfälligen Zuflucht nehme und körperliche Gegenstände wieder mit anwende, die einer langen und standesunwürdigen Bearbeitung bedürften. So wurde die Mechanik von der Geometrie abgetrennt und ausgeschieden und, von der Philosophie (von der reinen Wissenschaft) lange Zeit vernachlässigt, in eine Fertigkeit des Wehrfaches verwandelt (§ 14).

[7]) Durch ποικίλλοντες kommt das Schillernde und Ungenauere, durch τῷ γλαφυρῷ die weichere Linie und die weniger scharfe Prägung mit zum Ausdruck.

[8]) Zu ἀπὸ in genau dieser Bedeutung vergleiche Platon, Philebus 51 C, sowie die Erörterung in § 7.

Beiden Tadelstellen gemeinsam sind: die Kreise um Eudoxus und Archytas; die Zurückführung der delischen Aufgabe auf gerätliche Herstellung; daß das Gute an der Geometrie dadurch verdorben und zugrundegerichtet wird; die Abwendung von unkörperlichen Gebilden zurück zum Sinnfälligen. Besonders auffallend ist das zweimalige Vorkommen der zwei Wörter ἀπόλλυμι und διαφθείρω, die bei Platon über 200-mal vorkommen, und zwar stets in sehr starken Bedeutungen. Διαφθείρω (bzw. διαφθείρομαι) heißt zum Beispiel: verfaulen (von einer Leiche, Resp. 614 B), auflösen (von einer Versammlung, Protagoras 338 D), das Zugegebene durch Widersprüche wieder zurücknehmen (Gorgias 495 A und öfter), die Jugend verderben (wie in der Anklage gegen Sokrates, Apologia 24 B). Ἀπόλλυμι (bzw. ἀπόλλυμαι) bedeutet unter anderem: den Gegensatz zu γίγνεσθαι (Parmenides 163 D und öfter), das Aufheben der logischen Gesetze (Parmenides 135 C). Beide Wörter treten verbunden auf und werden gebraucht einmal von aaszerreißenden Tieren (Protagoras 322 BC) und dann auch öfter bei der Fragestellung der Unsterblichkeit (Phaedon 70 A, Respublica 608 E). An mathematischen Stellen finden wir ἀπόλλυμι nur bei einem arithmetischen Beispiel (Phaedon 104 C und 106 A—C), und bei der Kennzeichnung der Geometrie als einer Wissenschaft von ewigen Dingen, nicht von Dingen, die bald entstehen und bald vergehen (Respublica 527 B). Für διαφθείρω in mathematischen Zusammenhängen habe ich kein Beispiel.

Parallelstellen wie die beiden angeführten sind bei Plutarch keine Seltenheit und werden uns in dieser Untersuchung noch zweimal begegnen. Unwahrscheinlich ist es jedoch, daß Plutarch die eine Tadelstelle von der anderen abgeschrieben hat, denn das Eigentümliche ist in beiden so eng mit dem Gemeinsamen verflochten und nicht allein widerspruchsfrei, sondern dem jeweiligen Zweck der Anführung ganz genau angepaßt; so stehen die Gründung der Gerätekunde, die Herstellung von wirklichen Mittelwertnern, etwa im Sinne unserer Nomogramme, die Loslösung von der Geometrie und ihre Entwicklung zu einer wehrfachlichen Fertigkeit sehr natürlicherweise in einem Bericht über die Belagerung von Syrakus, die Belehrung über die delische Aufgabe und die längere philosophische Begründung des Tadels mit gleicher Natürlichkeit im Tischgespräch des Tyndares.

In einem Punkt erscheint die Verteilung der Einzelheiten über die beiden Stellen freilich nicht völlig zweckentsprechend. Die Bezeichnung der delischen Aufgabe als eine Vorstufe (στοιχεῖον, vgl. Proclus 72 : 25) klingt nämlich etwas theoretischer, als man es an der Marcellusstelle erwarten kann, als ob diese Aufgabe vielleicht als Einfallstor in das kubische Gebiet gedacht gewesen sei. Allein, wir wissen von einer über die nackte Kubikwurzel hinausgehenden Lehre von den kubischen Irrationalitäten noch sehr wenig, und die bisherigen Deutungen der Stellen zu diesem Gegenstand haben keine solchen Fortschritte erkennen lassen[9]). Die Elementhaftigkeit der delischen Aufgabe läßt sich andererseits aber in einem ganz anderen Sinne verstehen, der mit dem Inhalt der Marcellusstelle aufs engste verknüpft ist. Diese Aufgabe wird nämlich regelmäßig verwendet, um die Änderungen in den Ausmaßen eines Geschützes zu berechnen, wenn gewisse Änderungen im Geschoßgewicht vorgeschrieben sind. Sie wird deshalb nicht selten in den kriegstechnischen Werken behandelt, zum Beispiel von Heron und Philon in ihren Werken über den Geschützbau (**16**, 236—238 und 246—247; **17**, 54), oder wie bei Eutocius 58 : 15 in Verbindung mit diesen Fertigkeiten gebracht. Pappus zählt die Aufgabe zu den Anwendungen der Geometrie (1028 : 18) und Eratosthenes (bei Eutocius 90 : 22—23) insbesondere zu den Anwendungen auf die Kriegstechnik. Die beiden Stellen unterscheiden sich noch in der Behandlung des Menaechmus; dieser wird aber wohl deshalb an der Marcellusstelle unerwähnt gelassen, weil er nicht wie Archytas und Eudoxus als Urheber (εὑρέτης) der ganzen Gerätekunde bezeichnet werden konnte und nur gelegentlich, vielleicht bloß für die delische Aufgabe, eine Lösung dieser Art entwickelte.

Wir finden die Angaben, die Plutarch an den beiden Tadelstellen macht, bei zahlreichen anderen Schriftstellern wieder, ohne daß die Späteren gerade in Plutarch einen regelrechten Zeugen der Mathematikgeschichte erblickt zu haben brauchen, also ohne daß ihre übereinstimmenden Angaben nur deshalb den Wert einer Bestätigung verlören. Die drei genannten Mathematiker standen in nahen Beziehungen zu einander; Eudoxus war nach Diogenes Laertius ein Schüler des Archytas (**11**, VIII, § 86), Menaechmus nach Proclus ein Schüler des Eudoxus (67 : 9). An mechanischen Erfindungen von Archytas kennen wir aus der Politik des Aristoteles die Kinderrassel (1340b 26—29) und aus Gellius, der sich verwundert auf den Wortlaut des Favorinus beruft, die selbsttätig fliegende Taube (**15**, X, § 12). Vitruvius weiß, daß Archytas und andere viele Geräte, Eudoxus eine Art Sonnenuhr hinterließ (**42**, 10 : 15—19 und 236 : 16). Über eine angebliche Schrift unseres Archytas „de machinationibus" (**42**, 160 : 2) vergleiche jedoch die kritische Bemerkung von Diogenes Laertius (VIII, § 82). Die Wendung, daß die Mechanik mit leichteren Lösungen einspringt, wo die Geometrie nur schwierige aufbietet, finden wir bei Pappus wieder (1070 : 6). Diogenes Laertius berichtet auch von Archytas' Anwendung der Bewegung auf die Geometrie (VIII, § 83), und dafür teilt uns

[9]) Zu erwähnen wäre zunächst: Respublica 528 B (κύβου αὔξη), Theaetetus 148 B (περὶ τὰ στερεὰ ἄλλο τοιοῦτον), Epinomis 990 C—991 B, ein Euklidscholion (**23**, V, 430 : 16 und 18) und ein Kommentar zum Theaetet (**4**, Spalte 41 : 17—43 : 30).

Eutocius ein Beispiel aus Eudemus mit (84:12). Die umgekehrte Anwendung der Geometrie auf die wissenschaftliche Vertiefung der Mechanik ist nach Diogenes (ebd.) ebenfalls das Verdienst des Archytas und konnte von Platon nur im Widerspruch zu Philebus 55 E verurteilt werden: „Entfernt man aus den Werkkünsten (τέχναι) die Lehre von Zahl, Maß und Gewicht, so dürfte von jeder einzelnen nur ein schäbiger Rest verbleiben; denn es blieben nur ein Drill der Sinne und ein Mutmaßen zurück“. Endlich wird die erwähnte Trennung der Mechanik von der Geometrie durch ihre Unterordnung unter die Stereometrie vorbereitet (Anal. post. 78 b 35—39) und bei Geminus vollzogen; die Taktik gehört nach ihm nicht zu den mathematischen Wissenschaften im weiteren Sinn, während die wehrfachliche Gerätekunde ihrerseits sogar der Mechanik untergeordnet wird (Proclus 38:11—13 und 41:3—6).

So reichlich aber die Nebenumstände der Tadelstellen bestätigt sind, so fehlt für den platonischen Tadel selbst jedes anderweitige Zeugnis. Keine Stelle in Platon, in Aristoteles, in den Kommentatoren zu beiden, im übrigen Plutarch, in Theon von Smyrna, Diogenes Laertius, Pappus, Proclus zu Euklid, Eutocius zu Archimedes oder in verschiedenen Geschichtchensammlern fanden wir bis jetzt, wo Platons Unwillen gegen Archytas, Eudoxus oder Menaechmus erwähnt wird. Die nächste Annäherung an den Inhalt der Tadelstellen liefert eine Bemerkung im Timaeuskommentar von Proclus: „Wir schrieben die Darlegung des Archytas auf (d. h., seine Lösung der delischen Aufgabe) und wählten diese lieber als die von Menaechmus oder von Eratosthenes, weil jener die Kegelschnitte, dieser das Anlegen eines Lineals benutzt“ (**32**, II, 33:29—34:4). Hier ist, ausgerechnet bei Proclus, von einem platonischen Tadel kein Wort gesagt, und für das Nichtwählen der kegelschnittlichen Lösung — die damit keineswegs grundsätzlich abgelehnt ist — reichen hier die unterrichtlichen Beweggründe aus. Die Lösung des Archytas ist, trotz aller Schwierigkeit der erstmaligen Entdeckung, dennoch mit den Mitteln der elementaren Geometrie leicht Schritt für Schritt zu verfolgen.

Wir kennen den wesentlichen Inhalt der Tadelstellen also nur aus Plutarch und müssen daher versuchen, diesen Schriftsteller aus seinen übrigen mathematischen Mitteilungen als Zeugen für die Geschichte der Mathematik zu bewerten. Die lückenlose Wiedergabe und Auslegung der mehr als vierzig mathematischen Stellen bei Plutarch ist eine Untersuchung, die getrennt und für sich noch unternommen werden muß[10]). Hier wird es genug sein, keine Stelle unerwähnt zu lassen, die zu einem wesentlichen anderen Urteil über Plutarchs Berufenheit

[10]) Damit würde ein Wunsch von Wilamowitz in Erfüllung gehen (**83**, 21[2]).

und sachliche Zuverlässigkeit auf diesem Gebiete führen müßte. Wir deuten den mathematischen Inhalt von Plutarchs Schriften mit kurzen Stichworten an:

1. Zwei weitere Berichte über die delische Aufgabe: de Ei apud Delphos 386 E (iii) und de genio Socratis 579 A—D (iii); diese kommen später zur Erörterung (§ 6 und § 9).

2. Kleine Angaben über die Mathematiker: Thales, Hippokrates und Platon haben sich kaufmännisch betätigt: Vita Solonis 79 E (i); Thales hat die Höhe der Pyramiden gemessen: Convivum VII sapientium 147 A (i); Anaxagoras behandelte (ἔγραφε) im Gefängnis die Quadratur des Kreises: de Exilio 607 EF (iii); Ansichten des Pythagoras über die Zahlen, die „Symmetrien“, die „Harmonien“, „die Einheit und die unbestimmte Zweiheit“: de Placitis philosophorum 876 E (v) — als unecht angesehen; über das Stieropfer des Pythagoras ist Plutarch ziemlich zurückhaltend; ob der Satz von der Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks, die Flächenanlegung (παραβολή) oder die Herstellung eines Vielecks von gegebener Gestalt und Größe den Anlaß gebildet habe, ist für ihn unsicher geworden: Quaestiones convivales 720 A (iv) und non suaviter vivi 1094 B (vi); Democritus zerlegte den Kegel in Scheiben: de communibus notitiis 1079 E (vi); Archimedes half bei der Verteidigung von Syrakus und trug große Sorge für die Reinheit der mathematischen Wissenschaft; gegenüber den drei Erzählungen über den Tod von Archimedes wird Plutarch wiederum bedenklich: Vita Marcelli §§ 14—19 (ii).

3. Erklärungen einzelner Ausdrücke: Zu αἴτημα: Quaestiones convivales 720 D (iv); zu ἀνάλυσις: Vita Romuli 24 AB (i) — die Astrologen bestimmen gewöhnlich das Schicksal aus der Geburtsstunde, bei Romulus sollen sie umgekehrt die Geburtsstunde aus dem Schicksal rückwärts errechnen; zu ἀόριστος δυάς de Placitis philosophorum (?) 876 E (v), de Defectu oraculorum 428 F (iii) und de Creatione animae 1012 E (vi); zu εὐθύς-καμπύλος und den übrigen, hier dem ἀγαθόν-κακόν zugeordneten Paaren von Gegensätzen: de Iside et Osiride 370 E (ii); zu κανών und διαβήτης: Reipublicae gerendae praecepta 802 EF (v) — hier nur im übertragenen Sinn von „kunstvoll abgezirkelten“ Reden — und de Fortuna 99 BC (i) — der κανών wird von Werkkünstlern im Sinne von Philebus 55 E verwendet, nämlich um das Planlose (τὸ εἰκῇ) und das Zufällige (ὡς ἔτυχε) fernzuhalten.

4. Einzelne mathematische Fragen: Die Zulässigkeit der Bewegung in der Geometrie: Praecepta coniugalia 140 A (i) — mit einer Anwendung auf das Eheleben, quomodo Adulator 63 BC (i), Quaestiones convivales 682 D (iv) und de Pythiae

oraculis 404 F (iii); welche Gestalten gelten als urhaft? Quaestiones platonicae V, 1003 B—1004 C; die scheinbare Entstehung einer Kurve aus vielen kleinen Strecken: ebd. § 3, 1004 B; der zahlentheoretische Satz „Ist T eine Dreieckzahl, so ist $8T+1$ eine Quadratzahl: ebd. § 2, 1003 F — wo die Folgerung gezogen wird, daß die Eins eine Dreieckszahl sei; die platonischen Körper und ihre zweierlei Dreiecke, ebd. § 1, 1003 B—D und de Defectu oraculorum 427 A —428 B (iii); einige Angaben aus der Kombinatorik, wo Chrysippus nach Hipparch berichtigt wird: Quaestiones convivales 732 F —733 A (iv) und de Stoicis repugnantiis 1047 CD (vi).

5. Endlich einige allgemeine Äußerungen: über Mathematik und Frauenerziehung: Praecepta coniugalia 145 C (i) günstig und Vita Pompeii 648 E (iii) ungünstig; über Mathematik und Freiheit der Rede: de Exilio 606 CD (iii); über die Zusammenarbeit von Philologen und Mathematikern: Quaestiones convivales 737 D (iv); eine humorvoll begeisterte Rede über die Mathematik als Quelle der reinsten Freuden: non posse suaviter 1093 D—1094 D (vi).

Man hat die Geschichtsschreibung Plutarchs gelegentlich etwas überscharf gerügt. Vita Camilli 132 A (i) zeuge von Wundersucht, Vita Alexandri 664 E (iii) von der Absicht, überhaupt keine ernste Geschichte zu schreiben, de Curiositate 520 D (iii) von einer Ablehnung der Inschriftenforschung. Doch sagt Plutarch an diesen Stellen nicht mehr, als daß die Zweifelsucht ebensosehr wie die Leichtgläubigkeit ein Unmaß ist; daß sich die Wesenszüge eines Menschen oft leichter in den kleinen als in den großen Handlungen offenbaren; und daß es eine müßige Zerstreuung wäre, jede Grabinschrift und jedes Mauergekritzel lesen zu wollen. Plutarch weiß genau, daß er zum Glauben hinneigt, de cohibenda Ira 463 C (iii); aber er zweifelt dennoch an der sagenhaften Frühgeschichte Roms, de Fortuna Romanorum 326 A (ii); vermutet Textlücken, Vita Solonis 89 A (i) und Einschiebsel, Quaestiones convivales 730 F (iv) und trägt der Geistesverfassung von Augenzeugen Rechnung, Vita Othonis 1073 B (v). Er weiß ferner, den historischen Quellenreichtum der Großstadt zu schätzen, Vita Demosthenis 846 D—F (iv), findet für schwitzende, blutende und tönende Götterbilder eine naturgemäße Erklärung, Vita Camilli 132 BC (i) und kennt den historischen Unwert, aber zugleich doch die bildungsgeschichtliche Verwertbarkeit der Sagen, Vita Numae 70 EF (i). Die Angaben des Plutarch können selbstredend aus anderen Gründen irrig sein, aber Stellen wie die letztgenannten zeigen, daß der Vorwurf des Leichtsinns nicht leichtsinnig gegen ihn erhoben werden sollte.

Aus dem vorhergehenden Überblick ersehen wir andererseits, daß Plutarch nigendwo den Besitz von ungewöhnlichen mathematischen

Fachkenntnissen verrät. Einmal, bei dem Satz über Dreieckszahlen, begeht er einen beweistheoretischen Formfehler. Ein anderes Mal kann er uns über die so wichtige Kegelzerlegung des Democritus keine klare Rechenschaft geben. Aber er redet gern, mit Hochachtung, und innerhalb seiner Grenzen mit Verständnis von mathematischen Dingen; in seiner Jugend hat er die Mathematik eifrig gelernt, de E apud Delphos 387 F (iii). Mehr als einmal schöpft er aus dem Fachschrifttum eine sachliche Berichtigung, und mehr als einmal hält er in geschichtlichen Fragen mit seinem Urteil zurück. Von seinen übrigen mathematischen Stellen aus bietet er also keinen besonderen, greifbaren Grund zu zweifeln, daß er die Quellen der Tadelstellen mit Umsicht gewählt und ihnen bei zwei verschiedenen Gelegenheiten das jeweils Passende entnommen hat.

Als Quelle für die Tadelstellen schlagen Diels (**43**, Archytas A 15 = I³, 327 : 20) und Wilamowitz (**83**, 7, Anm. 2, und 21; **84**, I 503 Anm. 1 und II, 82, Anm. 3) den Platonicus des Eratosthenes vor. Dafür sprechen auch folgende Tatsachen. Nach Theon von Smyrna (**40**, 2 : 3—12) hat es sich jedenfalls im Platonicus um die delische Aufgabe gehandelt, also vermutlich auch um Platons Stellungnahme zu den Lösungen. Die Nutzanwendung der delischen Sage — der Gott wünsche nicht so sehr gerade die Verdoppelung des Altares, als vielmehr daß die Hellenen sich den friedlichen Künsten und Wissenschaften widmeten — stand nach Theon ebenfalls im Platonicus, und wird von Plutarch ebenfalls erwähnt, aber nicht an den Tadelstellen, sondern de Genio Socratis 579 D (iii).

Scheinbar im Widerspruch mit den Tadelstellen steht freilich eine Nachricht des Eutocius über das „platonische" Mittelwertgerät (56 : 13 —58 : 14). Cantor faßt die Erklärungsversuche für diesen Widerspruch zusammen (**50**, I, 234) und zieht dort seine einstige Vermutung zurück, daß Plutarch hier die Getadelten und den Tadelnden einfach miteinander verwechselt hätte (**49**, 33)[11]. Cantor hat aber eine weitere Möglichkeit übergangen, die sich aus einer Bemerkung von Mollweide (**67**, 52) leicht ableiten läßt. Mollweide gibt für die vielbesprochene Stelle Menon 86 E eine Erklärung, die als eine Vorstufe zur unten besprochenen Erklärung vor Heath bezeichnet werden darf (§ 6). Er bemerkt selbst, daß seine Figur nur aus dem ersten und zweiten Quadranten in den dritten fortgesetzt zu werden braucht, um die Figur der „platonischen" Würfelverdoppelung zu ergeben (Eutocius 57, nicht 56). Mollweide geht dann zu anderen Erörterungen über. Es wäre nun denkbar, daß Platon sich diese einfache Figur als eine ὑπόθεσις gedacht hat, ähnlich der ὑπόθεσις an der erwähnten Menonstelle: wenn

[11]) Die Angabe „133" in den Vorlesungen (p. 234, Anm. 2) ist ein Druckfehler für 33.

die Winkel AED und EDC rechte sind, und wenn ABD, EBC ein Achsenkreuz bilden, so sind die Strecken BE und BD die zwei delischen Mittel zwischen BA und BC. Wie nun die Figur herzustellen ist, wenn BA und BC allein gegeben werden, kann nachher ein anderer geometrisch, ein dritter mechanisch entdeckt haben, und die Überlieferung kann während der zehn Jahrhunderte, die Platon und Eutocius trennen, die mechanische Lösung vielleicht dem Entdecker der ursprünglichen, wissenschaftlich einwandfreien ὑπόθεσις irrtümlich zugeschrieben haben. Wie auch nur dieser Irrtum sich trotz aller Zeugnisse über Platons Abneigung gegen gerätliche Sondermittel ereignet haben sollte, bleibt freilich nach wie vor ein Rätsel.

Die Frage, ob die beiden Tadelstellen echte Zeugnisse sind, bleibt nach diesen Überlegungen nicht restlos entschieden. Glücklicherweise ist die Lösung dieser Frage für den gegenwärtigen Zweck entbehrlich. Entweder ist die Nachricht über Platons Tadel falsch — und dann versiegt die einzige bisher benutzte Quelle — oder sie ist wahr. Gesetzt aber, Plutarchs Quelle sei inhaltlich richtig und einwandfrei verwendet, so fragt es sich immer noch, ob man aus diesem überlieferten Tadel eine Beschränkung gerade auf Zirkel und Lineal herauslesen darf.

§ 3.

Der Gegenstand von Platons Tadel im Lichte der antiken Zeugnisse.

Die Entscheidung der Frage, ob Platons Tadel gegen das Hinausgehen über Zirkel und Lineal gerichtet war, soll zuerst bei den Tadelstellen selbst gesucht werden. Die dritte Belegstelle Hankels, die aus Platons Staat, wird uns dabei wesentliche Dienste leisten.

Diogenes Laertius bezeichnet Archytas als den ersten Mathematiker, der die Bewegung auf die διαγράμματα γεωμετρικά angewendet habe (**11**, VIII, § 83) und führt seine Lösung der delischen Aufgabe als Beispiel an. In der Würfelverdoppelung, die uns Eutocius aus Eudemus mitteilt (84 : 12—88 : 2), dreht Archytas in der Tat den Halbkreis um eine Tangente und das Dreieck um eine Seite. Ist es vielleicht diese Bewegungsgeometrie, die Platon gerügt hat?

Die Lösung des Archytas ist aber nicht im strengen Sinne bewegungsgeometrisch; denn die Bewegung wird nicht gebraucht, um die Lösung überhaupt zu finden, und auch nicht, um ihr Gelingen zu beweisen, sondern lediglich um die benötigten Flächen herbeizuschaffen. Wären der Halbzylinder, der Kegel und der Ringwulst durch ihre kennzeichnenden Eigenschaften, ihre συμπτώματα, erklärt gewesen, so stünde die Lösung als solche bewegungsfrei da. Der Nachweis der Existenz braucht nicht bei jeder neuen Anwendung einer Fläche von neuem erbracht zu werden, und wo ein solcher hier notwendig wäre — nämlich für die Existenz eines gemeinsamen Schnittpunktes K der drei erzeugten Flächen — fehlt er in der überlieferten Lösung ganz. Die Schilderung der Flächen durch ihre bewegungsgeometrische Entstehungsweise ist für die eigentliche Lösung überflüssig und wurde von Archytas wahrscheinlich nur deshalb vorausgeschickt, weil er sich auf eine bestehende Theorie dieser Flächen und auf eine bereits eingeführte Benennung ihrer Stücke nicht berufen konnte. Sind aber die Verbindungen zwischen der Bewegungsgeometrie und der Lösung des Archytas, zwischen der Lösung des Archytas und dem platonischen Tadel (S. 308) so locker und so unsicher, dann ist die Verbindung zwischen Bewegungsgeometrie und platonischem Tadel von hier aus gesehen nicht als sicher und feststehend zu erkennen.

Platons eigene Ansicht, daß die Geometrie nur ewig Seiendes betrachtet, niemals das bald Entstehende, bald Vergehende (Respublica 527 B), und daß sie nützlich oder schädlich ist, je nachdem sie uns nötigt, das Sein oder das Werden zu betrachten (526 E), schließt von den beiden Arten der κίνησις nur die ἀλλοίωσις aus, nicht die περιφορά (Parmenides 138 BC, Theaetetus 181 D). Aus der Tatsache, daß das Gerade und das Runde im Parmenides 137 E bewegungsfrei definiert sind, ist eine Sonderstellung Platons in diesem Punkt nicht abzuleiten; denn auch vor ihm in dem Gedicht des Parmenides (43, Parmenides B 8, Zeile 43—44) und nach ihm bei Aristoteles wird die Kugel rein statisch erklärt (Met. 1033 b 14). Aus solchen zerstreuten Zeugnissen werden wir über Platons Stellungnahme zur abstrakten Bewegungsgeometrie nicht klar. Die späteren Mathematiker, auch die Platoniker unter ihnen, haben jedenfalls nicht so gehandelt, als ob Platon diese Methode allgemein, bindend und endgültig verboten hätte (§ 4).

Die Zeugnisse und die Erklärungen an den Tadelstellen selbst, die Zirkel und Lineal mit keinem Wort erwähnen, legen einen anderen Gegenstand der Rüge bedeutend näher. Die Angabe des Diogenes Laertius über Archytas redet bestimmter von der „gerätlichen“ Bewegung, ὀργανικὴ κίνησις. Die Tadelstellen sprechen noch deutlicher von sinnfälligen und gerätlichen Modellen, von gerätlichen und mechanischen Herstellungen. Wollte Platon diesen Abstieg in den Bereich der Sinneswahrnehmung verwerfen, diese Abkehr von der rein begrifflichen Geometrie, diese Zuflucht zu Gegenständen, die durch Handwerkerfleiß aus Werkstoffen entstehen?

Ein solches Bestreben, praktische Lösungen mit einem besonderen Gerät durch rein theoretische zu ersetzen, scheint in bestimmten Fällen schon vor Platon bestanden zu haben. Oinopides (um — 450) wird von Proclus als Urheber von zwei einfachen, aber ausgesprochen theoretischen Konstruktionen bezeichnet (283 : 7 und 333 : 5). Er soll danach das gefällte Lot in der altertümlichen Redeweise κατὰ γνώμονα genannt haben, und von dem früheren Gebrauch dieses Geräts hat man in der vierten Forderung Euklids (über die Gleichheit aller rechten Winkel) einen Niederschlag gesehen. Die Lösungen des Oinopides gelingen zwar ausschließlich mit Zirkel und Lineal, aber sie sind derart einfach, und es fehlt so sehr an grundsätzlichen Andeutungen, daß die Entscheidung schwer fällt, ob Oinopides die Wahl der Gerade und des Kreises als Hilfskurven bewußt vorgenommen hat, oder ob sein Gebrauch dieser Mittel durch den Zufall oder durch die Schranken seines tatsächlichen Wissens in der theoretischen Geometrie bestimmt war. Es fällt dabei auf, daß auch Proclus über diesen Punkt keine Andeutungen zu machen weiß.

Unsere zweite Vermutung über den Gegenstand des Tadels entspricht ganz der Geistesrichtung Platons. Die Zahlenlehre und einige verwandte Fächer gewähren nach ihm nur Einsicht und sind jeder Handlung bar; die Kunst des Zimmermanns hingegen, und alle übrigen Handwerke, gehen in Handlungen auf und schaffen das, was vorher nicht da war (Politicus 258 DE). Wer in den Fertigkeiten und Handwerken geschickt ist, heißt ein Banause (Symposium 203 A), und Handlungen dieser Art sind anderen zu überlassen (Leges 806 DE). Als Ziele des menschlichen Strebens nehmen sie erst den dritten Rang ein, hinter der Körperpflege an zweiter und der Seelenpflege an erster Stelle (743 E). Das Anfertigen von wirklichen Gegenständen wird andererseits nicht ohne Unterschied verpönt, sondern nur als Mittel zum Erwerb und Besitz, und auch als solches kann es am rechten Ort eine ὀρθῶς σπουδαζομένη σπουδή sei. Der Kriegstechniker (μηχανοποιός) rettet nicht weniger als der Feldherr unsere Städte (Gorgias 512 B), und Hippias wird als Hersteller aller seiner beweglichen Güter lediglich geneckt (Hippias maior 368 B). Die Künste und die Handwerke stehen nicht alle auf derselben niedrigen Stufe. Sie werden vielmehr in dem Maß veredelt, als sie durch passende Werkzeuge an Genauigkeit (Philebus 56 B) oder durch den Gebrauch der mathematischen Wissenschaften davor bewahrt bleiben, in ein bloß faustregelartiges Schätzen zu entarten (55 E). Auch Aristoteles unterscheidet die Tätigkeit des Geometers und des Zimmermanns. Beide betrachten den rechten Winkel, dieser aber nur so weit als die Arbeit es erfordert, jener dagegen in seinem Wesen und in seiner Eigenart, weil sich der Geometer in der Betrachtung des Wahren ergeht (Eth. ad Nicom. 1098 a 29—31). In die gleiche Richtung weist die Rangordnung der mathematischen Teilfächer, wie sie uns von Proclus, in genauer Anlehnung an den Staat, überliefert und erklärt wird: an Sicherheit und Genauigkeit steht die Zahlenlehre höher als die Geometrie (59 : 16, vgl. 43, Archytas B 4), die Geometrie ihrerseits höher als die Mechanik und die Optik, und zwar deshalb, weil diese letzten Teilfächer sich mit dem sinnlich Wahrnehmbaren beschäftigen (60:1). Daraus leitet Platon (nach Proclus 34:4—7) eine Verschiedenheit der Beweispflicht: der Naturphilosoph (φυσιολόγος) darf mit wahrscheinlichen Gründen seine Rechenschaft ablegen, aber wer geistige, wesensbeständige Dinge auslegt, muß unwiderlegliche und unantastbare Darlegungen liefern.

Daß Platons Unwillen den mechanischen Ersatzlösungen galt, geht aber auch aus den Tadelstellen selbst hervor. Nachdem die Würfelverdoppelung als Beispiel genannt ist, schreiten beide Stellen zu einer sehr allgemeinen Begründung. Das Gute an der Geometrie (wir sagen: der W e r t der Geometrie) werde dadurch verdorben und vernichtet, indem ihre Begrifflichkeit preisgegeben werde; nicht durch die bloße Tatsache der Anwendung — die P h i l e b u s 55 E zum Wohl der Werkkünste geradezu gefordert wird — sondern durch ihren „Rückfall", ihr „Zufluchtnehmen" zu den Sinnendingen. Die Geometrie muß an den ewigen, unkörperlichen Urgebilden festhalten, sie muß begrifflich bleiben und schwierige Aufgaben theoretisch, nicht durch Anleihen bei den Sinnendingen bezwingen.

So wurde der Tadel auch von anderen aufgefaßt. Einer der frühesten Erklärer, der Mathematiker Xylander, legt ihn folgendermaßen aus: „Porro autem Platonis indignatio eam causam habuit, quod in contemplatione positas scientias, quae ab omni materia abstractas species quantitatis per seipsam considerarent, nolebat materiae et sensilium rerum quasi contagio affici et contaminari. Hinc illa apud eum in Philebo mathematum divisio in pura et impura, quam ne Aristoteles quidem dissimulavit" (Diese Anmerkung steht in Reiskes Plutarchausgabe, Leipzig 1774—1782, Band II, Seite 428). Nach Max C. P. Schmidt kämpfte Platon hier „gegen die Vermischung des Mechanischen und Geometrischen, der instrumentalen und rein räumlichen Anschauung" (76, 40). Wilamowitz deutet den Tadel nicht anders: „Die Mathematiker der Akademie machen sich aber an die Lösung; der Pythagoreer Archytas, Eudoxos und Menaichmos erkennen, daß sie auf die Konstruktion von zwei mittleren Proportionalen hinausläuft, und erfinden Modelle, vermittels deren es möglich ist, diese Linien ohne eigene mathematische Ableitung des Beweises zu finden, zu greifen. Da schilt sie Platon, weil so die Mathematik wieder in das Reich des Materiellen gezogen wird; in der Tat geht für den bloßen Praktiker ja ihr Bildungswert verloren" (84, I², 503).

Zu den beiden Tadelstellen tritt bei Hankel die dritte Belegstelle aus Platons S t a a t. Nach ihr darf nicht einmal die Sprache der Geometrie an wirkliche Handlungen erinnern:

Λέγουσι μέν που μάλα γελοίως τε καὶ ἀναγκαίως· ὡς γὰρ πράττοντές τε καὶ πράξεως ἕνεκα πάντας τοὺς λόγους ποιούμενοι λέγουσι τετραγωνίζειν τε καὶ παρατείνειν καὶ προστιθέναι καὶ πάντα οὕτω φθεγγόμενοι, τὸ δ' ἔστι που πᾶν τὸ μάθημα γνώσεως ἕνεκα ἐπιτηδευόμενον.

Sie sprechen aber höchst lächerlich und gezwungen und wählen ihre Ausdrücke, als ob sie etwas täten und Handlungen setzen wollten, indem sie sagen: „Quadrieren", „Anstrecken", „Hinzusetzen" und was sie sonst alles in dieser Weise benennen, während diese ganze Wissenschaft nur der Erkenntnis wegen betrieben wird. (527 A).

Auch an dieser letzten von den bisher verwendeten Quellen stehen eher die betrachtende und die handelnde Geometrie gegenüber, die Theorie der Praxis, die reine Wissenschaft der angewandten, die begriffliche der anschauungsgebundenen, als Zirkel und Lineal auf der einen Seite und auf der anderen Seite alle übrigen Geräte. Die Geometrie wäre ja sonst ungeeignet, das Ziel zu erreichen, das Platon ihr kurz zuvor gesteckt hatte: πρὸς τὸ ποιεῖν κατιδεῖν ῥᾷον τὴν τοῦ ἀγαθοῦ ἰδέαν (526 E). Diese Gedanken werden an zwei benachbarten Stellen im Staat wirklich ausgesprochen, 510 DE nur von den geometrischen Figuren, später aber ausdrücklich von angefertigten Modellen:

Οὐκοῦν (εἶπον) τῇ περὶ τὸν οὐρανὸν ποικιλίᾳ παραδείγμασι χρηστέον τῆς πρὸς ἐκεῖνα μαθήσεως ἕνεκα, ὁμοίως ὥσπερ ἂν εἴ τις ἐντύχοι ὑπὸ Δαιδάλου ἤ τινος ἄλλου δημιουργοῦ ἢ γραφέως διαφερόντως γεγραμμένοις καὶ ἐκπεπονημένοις διαγράμμασιν. Ἡγήσαιτο γὰρ ἄν πού τις ἔμπειρος γεωμετρίας, ἰδὼν τὰ τοιαῦτα, κάλλιστα μὲν ἔχειν ἀπεργασίᾳ, γελοῖον μὴν ἐπισκοπεῖν ταῦτα σπουδῇ ὡς τὴν ἀλήθειαν ἐν αὐτοῖς ληψόμενον ἴσων ἢ διπλασίων ἢ ἄλλης τινὸς συμμετρίας.

Der bunte Sternenhimmel ist also nur als ein Modell zu benutzen, um zu jener höheren Kenntnis zu gelangen, ähnlich wie wenn jemand auf Modelle oder Figuren stieße, die von einem Daedalus oder sonst einem Bildhauer oder Maler vorzüglich gezeichnet und ausgearbeitet wären. Ein erfahrener Geometer würde aber beim Anblick solcher Sachen wohl meinen, sie seien zwar sehr schön ausgeführt, aber es sei lächerlich, sie allen Ernstes in der Absicht zu betrachten, daß man so das wahre Wesen des Gleichen, des Doppelten oder sonst eines (rationalen) Verhältnisses erfasse, 529 DE.

Das Wort διπλασίων kann natürlich ein zufälliges, naheliegendes Beispiel geben, aber vielleicht auch eine Erinnerung an die delische Aufgabe enthalten. Diese Aufgabe wird im Staat als für die Raumlehre geradezu charakteristisch angesehen: ἔστι δέ που τοῦτο (die Lehre von der τρίτη αὔξη καθ' αὑτό) περὶ τὴν τῶν κύβων αὔξην καὶ τὸ βάθους μετέχον, 528 B. Das klingt fast wie eine Billigung der bekannten, einwandfreien stereometrischen Lösung, die Archytas für die delische Aufgabe fand, und entfernt sich ziemlich weit von der Forderung, mit Zirkel und Lineal in der Ebene auszukommen. Wir dürfen auch nicht sagen, daß jene Lösung „mit Zirkel und Lineal im Raum" erfolgt. Sie geht zwar von drei Flächen aus, die mit Hilfe von Kreisen und Geraden im Raume erzeugt werden können, aber der entscheidende Schritt ist die Auffindung ihres gemeinsamen Schnittpunktes, und dies läßt sich auch im Raume nicht allein durch das Schlagen von Kreisen und das Ziehen von Geraden bewerkstelligen.

Die überlieferten Würfelverdoppelungen gehen entweder durch den Aufstieg in den Raum (Archytas) oder durch die Heranziehung von Kegelschnitten (Menaechmus) über Zirkel und Lineal hinaus. Es ist nicht leicht einzusehen, warum der Aufstieg in die dritte Dimension oder die Heranziehung der Kegelschnitte den Wert der Geometrie „verderben und vernichten" soll. Sie bedeuten vielmehr Fortschritte der Geometrie, und Fortschritte, die Platon selbst lebhaft gewünscht hat (Respublica 528 B, Leges 819 D).

Andererseits ist an keiner einzigen der drei Hankelschen Belegstellen von Zirkel und Lineal ausdrücklich die Rede. Es fehlt auch jede eindeutige Anspielung auf gerade diese zwei Geräte. Die Erwähnung der delischen Aufgabe, die mit Zirkel und Lineal tatsächlich nicht lösbar ist, mag schuld sein daran, daß man in diesen Stellen eine Beschränkung auf Zirkel und Lineal hat sehen wollen. Die Verknüpfung der delischen Aufgabe mit dem Gedanken an Zirkel und Lineal ist für den heutigen Mathematiker freilich sehr geläufig. Um so notwendiger ist es, von dieser Gedankenverbindung Abstand zu nehmen, wenn man sich gerade die Frage stellt, ob sie auch den griechischen Mathematikern bereits gegenwärtig gewesen ist. Man hat ferner zu wenig beachtet, daß die delische Aufgabe nur als Beispiel auftritt, und daß der Tadel nicht notwendigerweise gegen die überlieferten Lösungen gerichtet war. Es bleibt immerhin möglich, daß die delische Aufgabe erst von Plutarch selbst, oder von seinem Gewährsmann, als Beispiel gewählt wurde; möglich ist es auch, daß Archytas, Eudoxus und Menaechmus erst auf Anlaß des Tadels ihre bekannten, rein wissenschaftlichen Lösungen suchten und fanden, und daß ihre getadelten, mehr praktischen Lösungen daraufhin in Vergessenheit gerieten. Eratosthenes läßt in der Tat eine Lösung des Menaechmus im Vergleich mit anderen einigermaßen handlich und für die Praxis brauchbar sein (Eutocius 90:10—11). Auf seine zwei kegelschnittlichen Lösungen lassen sich die Worte χειρουργῆσαι δὲ καὶ εἰς χρείαν πεσεῖν auch mit dem Vorbehalt ἐπὶ βραχύ τι . . . καὶ ταῦτα δυσχερῶς wohl nicht leicht anwenden, so daß wir in diesen Worten vielleicht die Spuren einer wirklich verlorengegangenen Lösung des Menaechmus vor uns haben.

Alle diese Ungewißheiten und alle diese unerörtert gelassenen Möglichkeiten ermahnen uns jedenfalls, den Gegenstand von Platons Tadel nicht unbesehen gerade aus den überlieferten Lösungen gerade der delischen Aufgabe zu entnehmen. Wir halten uns vielmehr an die sehr allgemeine, aber auch sehr bestimmte Begründung, welche die Tadelstellen selbst enthalten. Wir sehen den Gegenstand des Tadels nicht in der Bewegungsgeometrie und nicht in dem Hinausgehen über Zirkel und Lineal, sondern in dem Gebrauch von gerätlichen Sondermitteln und in der Abkehr von der rein begrifflichen Geometrie. Die weitere Entwicklung dieser Wissenschaft, insbesondere die allmähliche aber sichtbare Entstofflichung der höheren Kurvenlehre, steht im Einklang mit dieser Ausdeutung und soll im nächsten Abschnitt zur Kontrolle herangezogen werden.

§ 4.

Der Gegenstand von Platons Tadel im Lichte der späteren Entwicklung der Geometrie.

Die Geometrie hätte sich dem Einfluß eines ernsten, allgemein bindenden platonischen Tadels nicht gänzlich entziehen können. Ihre spätere Entwicklung gestattet zwar auf den Gegenstand des Tadels keine zwingenden Rückschlüsse, aber die Übereinstimmung mit ihr schafft für jede Auslegung des Tadels einen gewissen Rechtsvorteil, die Nichtübereinstimmung einen gewissen Rechtsnachteil. Mit Hilfe dieser Richtschnur unterziehen wir die beiden Fragen des vorigen Abschnittes einer erneuten Prüfung.

Die soeben (§ 3) herangezogenen Zeugnisse genügten nicht zur Entscheidung der Frage, wie sich Platon zur Bewegungsgeometrie verhielt. Diese Entscheidung ist für die vorliegende Frage nach Zirkel und Lineal glücklicherweise nicht unbedingt erforderlich; denn sowohl die Beschränkung auf Kreis und Gerade als Hilfslinien, wie auch der Gebrauch von höheren Kurven, läßt sich sowohl mit Benutzung, wie auch ohne Benutzung des Bewegungsbegriffes durchführen. Soviel wollen wir aber trotzdem feststellen, daß sich die Geometrie jedenfalls nicht in der Weise weiter entwickelt hat, wie man es nach einem wirksamen platonischen Verbot der Bewegungsgeometrie erwarten würde.

Denn der Gebrauch der Bewegung um Gestalten erzeugend zu beschreiben — und nur in diesem Umfang hat sie Archytas bei der bekannten Würfelverdoppelung verwendet — wird bald nach Platon gang und gäbe. Hatten Parmenides, Platon und Aristoteles die Kugel bewegungsfrei erklärt (§ 3), so erklärt sie der Platoniker[12]) Euklid dennoch durch eine Drehung (Buch XI, Def. 14), also anders als bei seiner Definition des Kreises (I, Def. 15). Ausgerechnet die „unreinen“ Mathematiker Heron und Theodosius kehren zur statischen Definition zurück (**18**, IV, 52 : 12—22 und **39**, 2 : 2—4), Heron freilich mit nachfolgender genetischer Schilderung; und ausgerechnet Theon von Smyrna in dem Werk, das er der Erläuterung des Mathematischen bei Platon widmet, benutzt wiederum die Drehung eines Halbkreises (**40**, 39 : 3—5). Bewegungsgeometrisch sind ferner die Erklärungen des Zylinders bei Euklid (XI, Def. 21) und Serenus (**36**, 4 : 12—19), des Kegels bei Euklid (XI, Def. 18), Apollonius (**5**, I, 6 : 2—13) und Heron (**18**, IV, 56 : 1—4), des Wulstes bei Heron (ebd. 60 : 24—62 : 2) und trotz aller Besorgtheit um die Wissenschaftlichkeit seines Faches[13]) auch bei Archimedes die Definitionen der Spirale (II, 44 : 17—23), der Konoiden (I, 246 : 16—19 und 248 : 20—250 : 1) und der Sphäroiden (I 252 : 14—22). Sporus erhebt gegen den Gebrauch der Quadratrix zur Kreisquadratur zwei vollauf berechtigte und scharfsinnige Einwände, aber ohne die Bewegung als solche zu verwerfen und nur mit der Begründung, daß der Gebrauch der Bewegung in diesem Fall auf zwei besonderen Kreisschlüssen beruht (Pappus 252 : 26—256 : 1). Plutarch berichtet von den Geometern, daß sie die Bewegung der Punkte, der Linien und der Flächen von der Bewegung der Körper abhängig sein ließen, aber nicht, daß sie die Bewegung dieser Gebilde als solche oder ihre Verwendung in der Geometrie grundsätzlich ablehnten Praecepta coniugalia 140 A (i) und Quomodo adulator 63 BC (i). Auch dort, wo höhere Kurven wie Quadratrix, Muschellinie und Spirale verwendet werden, kommt die Bewegung nur bei den genetischen Definitionen vor, während bei den Beweisen alles auf die daraus hervorgehenden συμπτώματα gestützt wird.

Lehrreich ist hier die Stellungnahme des Neuplatonikers Proclus. Er berichtet über die Ansicht von Speusippus und Amphinomus, die mathematischen Sätze seien alle θεωρήματα, nicht προβλήματα, und daß wir τὰς γενέσεις der herzustellenden Figuren οὐ ποιητικῶς, ἀλλὰ γνωστικῶς ὁρῶμεν, ὡσανεὶ γιγνόμενα λαμβάνοντες τὰ ἀεὶ ὄντα (78 : 4—6), aber Proclus selbst rechnet die Bewegung trotzdem zu den Gegenständen der Geometrie (57 : 10—14) und knüpft mit ihrer Hilfe die drei euklidischen Forderungen zu einem Ganzen zusammen (185 : 1—25). Dann hält er inne und erwartet den Einwand: „εἰ δέ τις ἀποροίη, πῶς κινήσεις ἐπεισάγομεν τοῖς γεωμετρητοῖς ἀκινήτοις οὖσιν, πῶς δὲ τὰ ἀμερῆ κινοῦμεν, ταῦτα γὰρ ἀδύνατα εἶναι παντελῶς“ (185 : 25—186 : 2). Zur Antwort mahnt er,

[12]) Proclus 68 : 20.

[13]) Plutarch, Vita Marcelli § 17 und Pappus: ὃς φαίνεται τὰς εἰρημένας ἐπιστήμας οὕτως ἀγαπήσας ὡς μηδὲν ἔξωθεν ὑπομένειν αὐταῖς ἐπεισάγειν, 1026 : 18—19.

keine böswilligen, silbenstechenden Schwierigkeiten zu machen (δυσχεραίνω), sondern sich an die vorausgeschickten Ausführungen zu erinnern. „Τὴν δὲ κίνησιν“, fährt er fort, „μή τοι σωματικὴν ἀλλὰ φανταστικὴν νοήσωμεν καὶ τὰ ἀμερῆ τὰς μὲν σωματικὰς κινήσεις κινεῖσθαι μὴ συγχωρῶμεν τὰς δὲ φανταστικὰς διεξόδους ὑπομένειν“ (186 : 9—12). Unter den letzten Worten darf man vielleicht eine vorgestellte, zu durchlaufende Reihenfolge verstehen, unter dieser „Bewegung“ eines Punktes eine geordnete Folge von Stellungen, unter dieser Art von Bewegung kaum mehr denn die Zeit als eine nur gedachte Hilfsgröße. Wie weit der letzte Schritt in der Absicht des Proclus lag, steht nicht ohne weiteres fest, sicher ist es aber, daß für diesen strengen Neuplatoniker eine genügend begrifflich aufgefaßte Bewegung nicht aus der Geometrie verbannt zu werden brauchte. Im Gegenteil, wir finden nicht lange nach Platon und sicher nicht später als Euklid, in den ersten Definitionen des Autolycus (8, 2 : 4—10) einen bereits sehr abstrakten Bewegungsbegriff, auf den die neugegründete eudoxische Logoslehre angewendet werden soll. Letzteres ist noch bei Proclus selbst lebendig (33, 30 : 11—12).

Wir hatten in § 3 die Deutung gegeben, daß Platons Tadel vielmehr die mechanischen Hilfsmittel treffen sollte. Beim Vergleich mit der späteren Entwicklung der Geometrie sind wir nicht verpflichtet zu zeigen, daß man diese Mittel fortan einfach fallen ließ; noch in spätester Zeit hat Isidor von Milet, nach einem Bericht seines Schülers Eutocius (84 : 8—11), einen „Parabelzirkel“ erfunden, und bereits in den Problemata finden wir ein Stück „Scherengeometrie“ (914 a 25—39). Es genügt zu zeigen, wie sich die Theorie immer mehr und mehr von den gerätlichen Sondermittelchen loslöste, und daß im Vergleich mit den theoretischen Lösungen die mechanischen nicht mehr als vollwertig und beweiskräftig angesehen wurden. Wir belegen zuerst diese Loslösung und diese unterschiedliche Bewertung und zeigen dann, wie die Entstofflichung der Kurvenlehre im einzelnen vor sich ging.

War den Mathematikern die Reinhaltung der Theorie Herzenssache, so werden sie ihre Werke über mathematische Lehrstücke auch theoretisch gehalten haben, aber ohne sich mit den nichttheoretischen Methoden eigens auseinanderzusetzen. Äußerungen über diesen Punkt sind daher weniger in den formgerechten Abhandlungen, als in den Erläuterungsschriften zu den Mathematikern und Philosophen zu erwarten. So erkennt Eratosthenes an, daß Archytas und Eudoxus logisch stichhaltige Lösungen gaben (ἀποδεικτικῶς) und wirft ihnen nur die Unhandlichkeit ihrer Methoden vor (Eutocius 90 : 8—10). So unterscheidet auch Pappus zwischen der μηχανικωτέρα γένεσις und dem γεωμετρικῶς ἀναλύεσθαι (258 : 22), und Sporus zwischen der μηχανικωτέρα (κατασκευή) und dem δεικνύμενον πρόβλημα (254 : 24—256 : 2). Ein Zusatz zu Pappus stellt die ἀπόδειξις der ὀργανικὴ κατασκευή ausdrücklich entgegen (164:1—3). Erklärer des Aristoteles verfahren nicht anders; Philoponus nennt eine zweite Würfelverdoppelung ὀργανικωτέρα (25, 104:1) und Simplicius löst die Unstimmigkeiten darüber, ob die Kreisquadratur wirklich gelungen sei, zweimal durch die gleiche Unterscheidung in eine ὀργανικὴ εὕρεσις und eine ἀποδεικτική 35, 112:2—3 = 37, 192:30 und 35, 46:1—3 = 38, 60:17—18). Viel früher aber und nicht weniger deutlich wird dieselbe Unterscheidung von Archimedes gemacht; bei aller Anerkennung der Findkraft seiner „mechanischen" Überlegungen gibt er mehrmals zu, daß diese χωρὶς ἀποδείξεως und darum durch eine regelrechte geometrische Beweisführung zu ergänzen sind (II, 262:11—13 und 428:27—28).

Waren die Einschiebungen für Aristoteles ein anerkanntes geometrisches Verfahren (Anal. post. 76b 9), so hat bereits Apollonius über diesen Gegenstand eine eigene Abhandlung geschrieben, und darin wird die hippokratische Einschiebung völlig theoretisch gelöst (§ 5). In diesem Fall gelang die Lösung mit Zirkel und Lineal; andere Einschiebungen aber, die erst durch Kegelschnitte ersetzt werden konnten, wurden nach Pappus wirklich so ersetzt: 280:21 χωρὶς τῆς νεύσεως, 284:4: ἄνευ τῆς νεύσεως. In den Fällen, wo selbst die Kegelschnitte nicht ausreichten, unterwarf man die Kurven, welche die gerätlichen Lösungen nahegelegt hatten, einer mehr und mehr theoretischen Behandlung. Die Winkelteilung hatte zu der (später sogenannten) Quadratrix geführt, die delische Aufgabe zur Kurve des Eudoxus, eine Einschiebung an die Gerade zur ersten Muschellinie des Nicomachus, eine Einschiebung an den Kreis zur Efeulinie von Diocles, die Kreisquadratur zu des Carpus „Kurve aus zwei Bewegungen". Weit entfernt davon, diese Kurven zu verpönen, oder ihre Erforschung in der Hoffnung auf eine Lösung mit Zirkel und Lineal zurückzustellen, suchte man sie vielmehr in einer sicheren theoretischen Grundlage zu verankern und eine vollanerkannte Theorie der verschiedenen höheren Kurven zu schaffen. Dies begann spätestens im zweiten vorchristlichen Jahrhundert und geschah:

1. Durch die Untersuchung der συμπτώματα. Proclus erklärt die συμπτώματα als diejenigen Eigenschaften eines geometrischen Gebildes, die aus der gewählten Definition folgen und ebensogut als Kennzeichen des Gebildes dienen können (79:19, 355:22 und 356:3—4). Das Beispiel der Parallelen zeigt, daß sie mehr sind als bloße Umformungen der Definitionen, und dies geht aus einem Beispiel des Pappus noch klarer hervor (350:25, die Minimaleigenschaft der Kugel). Ihre Auffindung war somit eine wohlbestimmte wissenschaftliche Leistung, die Apollonius bei den Kegelschnitten, Nicomedes bei den viererlei Muschellinien, Hippias bei der Quadratrix und Perseus bei

den Wulstschnitten nachgerühmt werden durfte (Proclus 356 : 6—12). Nicomedes wird an anderer Stelle als Entdecker, nicht nur der συμπτώματα, sondern auch der τάξις und der γένεσις der Muschellinien genannt (Proclus 272 : 3—5), in Übereinstimmung mit Pappus, der σύμπτωμα bald schlechthin (240 : 26, 242 : 11, 244 : 5, 252 : 2, 256 : 28 und 286 : 14), bald mit dem Beiwort ἀρχικόν (234 : 19, 236 : 14 und 252 : 21; vgl. Apollonius, 5, I, 4 : 3) in eine bestimmte Beziehung zur γένεσις setzt: diese gibt die bewegungsgeometrische Entstehungsart und damit wohl die ursprüngliche Auffassung der Kurve an (252 : 3—4), jene stellt die daraus entstehende kennzeichnende Eigenschaft dar (252 : 21—22), und zwar als Grundlage für die bewegungsfreie Auffassung der Kurve als eines geometrischen Ortes.

2. Durch die Änderung der Entstehungsart. Die Zylinderspirale hat einen bewegungsgeometrischen Ursprung gehabt (Proclus 105 : 1—4), aber für Pappus war sie bereits durch ein σύμπτωμα festgelegt (260 : 9) und ihre Theorie soll für ihn der Quadratrix zugute kommen, indem diese Kurve nicht mehr durch eine eigentümliche Bewegung in der Ebene, sondern durch Lotfällung aus der Zylinderspirale abgeleitet wird.

3. Durch die Schaffung neuer Fachausdrücke. Der gleitende Stab, der Zapfen und die feste Leitkante der gerätlich beschriebenen Muschellinie werden unter der Hand des Nicomachus zum Drehpunkt (πόλος), zur Leitlinie (κανών) und zum Abstand (διάστημα, Pappus 244 : 15—16 und Eutocius 100 : 12—15). Einschiebungen zwischen die Schenkel eines Winkels werden alsdann wie eine streng theoretische Aufgabe behandelt (Pappus 246 : 8—14 und Eutocius 104 : 1—3). Nicomedes hat die Theorie seiner Kurve noch weiter ausgebaut, obwohl ihm die Möglichkeit einer gerätlichen Beschreibung gegenwärtig blieb (Pappus 244 : 21—28 und Eutocius 100 : 15—18). Seine Bemühungen um eine feste theoretische Unterlage für die Muschellinie verleihen seinem Tadel gegen Eratosthenes eine größere Berechtigung, als Eutocius anerkennen möchte: ὡς ἀμηχάνοις τε ἅμα καὶ γεωμετρικῆς ἕξεως ἐστερημένοις (98 : 4—7).

4. Durch die Verwendung einer Kurve zu mehreren Zwecken. Nicomachus verwendete seine erste Muschellinie einmal zur Verdoppelung des Würfels (Pappus 56 : 7—8 und 242 : 13) und dann auch zur Dreiteilung des Winkels (Proclus 272 : 3). Zu diesem zweiten Zweck hatte sie auch Pappus auf seine Weise gebraucht (246 : 1—3). Andere Muschellinien fanden bei Nicomachus andere Verwendungen (Pappus 244 : 18—20 und Eutocius 100 : 12—13). Die Quadratrix des Hippias wurde zuerst für die Dreiteilung des Winkels benutzt, später aber auch für die Streckung und für die Quadratur des Kreises (Pappus 252 : 1 und 258 : 15—19).

Ist die Theorie einer Kurve einmal festgelegt, so wird es unnötig, diese Kurve bei jeder neuen Anwendung von neuem zu erzeugen. Im Vertrauen auf die bereits geleistete Sicherung des Lehrgebäudes darf man sich die Kurve im Bedarfsfall als irgendwie hergestellt denken, so daß die Geometer es sich in der Weise bequemer machen können, wie Pappus einmal erzählt „τινὲς δὲ τῆς χρήσεως ἕνεκα, παρατιθέντες κανόνα“ (246 : 15). Selbst der praktisch eingestellte Heron, der auf bequeme Handhabung der Methoden so viel Gewicht gelegt hat (Pappus 56 : 12 und 62 : 17—18), erblickte im Mittelwertgerät nur den Ersatz für eine schon geleistete theoretische Lösung mit Hilfe von Kurven im Raum (Archytas). Diese Äußerung steht allerdings nur in der arabisch erhaltenen Mechanik (18, II_2, 24 : 1—5).

Alle diese Tatsachen und noch mehr die weiteren Forschungen eines Demetrius von Alexandrien, eines Philon von Tyana oder eines Menelaus über andere besondere Kurven zeigen nicht nur, daß eine ausgesprochene Loslösung der theoretischen Geometrie von der gerätlichen Praxis stattfand, sondern darüber hinaus, daß Zirkel und Lineal von den Zeiten des Apollonius und des Nicomedes an jedenfalls keine hemmende Sonderrolle spielten, und daß von diesen Zeiten an auch die theoretische Geometrie die nötige Fülle von anerkannten höheren Hilfsmitteln besaß, um die Frage nach der Leistungsfähigkeit von Zirkel und Lineal mit vollem Bewußtsein zu stellen. Die Kreise und Geraden der Ebene wurden bereits in den τόποι ἐπίπεδοι des Apollonius zu einer in sich abgeschlossenen Kurvengattung zusammengefaßt (§ 12). Hieraus allein ist es jedoch nicht möglich zu entscheiden, ob Apollonius die Leistungsfähigkeit von Zirkel und Lineal bis zur Grenze des Möglichen anspannen wollte.

Teil II: Die planmäßige Prüfung weiterer Zeugnisse über eine grundsätzliche Beschränkung auf Zirkel und Lineal.

Nachdem sich die Stützen der üblichen Aussagen über Zirkel und Lineal als zu schmal und zu wenig fest erwiesen haben, halten wir nach anderen Zeugnissen Umschau, die auf unseren Gegenstand ein helleres Licht werfen. Merkwürdigerweise ist das sogenannte Hippokratesfragment, das umfangreichste Zeugnis vorplatonischer Mathematik, noch nirgends in unseren Zusammenhang hineingestellt worden [14]). Aller-

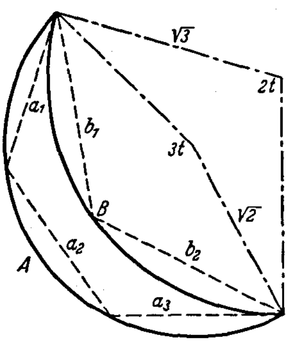
[14]) Das Bruchstück ist im Kommentar des Simplicius zur Physik von Aristoteles enthalten (38, 54 : 12—69 : 49) und von Rudio gesondert herausgegeben worden (35). Diese Quelle für die Geschichte der Mathematik überhaupt nutzbringend gemacht zu haben, ist nach Cantor (50, 202, Anm. 5), Heath (61, I, 183) und Rudio (35, 4) das große Verdienst Bretschneiders (47, 99—124). Indes hatte der englische Neuplatoniker Thomas Taylor bereits 1792 die Aufmerksamkeit vergebens auf dieses Zeugnis hingelenkt (79, I, 100).

dings stehen in diesem Bericht des Simplicius über die Möndchen von Hippokrates ganz andere Dinge im Vordergrund, und es versteht sich durchaus nicht von selbst, daß Fragen der geometrischen Herstellbarkeit hier eine wirklich ausschlaggebende Rolle spielen. Es wird deshalb notwendig, zuerst auf diese Quelle genauer einzugehen.

§ 5.

Zirkel und Lineal bei den Möndchen des Hippokrates.

Der geometrische Sachverhalt — zunächst ohne jede Rücksicht auf die geschichtlichen Zusammenhänge — ist folgender. Es liege ein Kreisbogenzweieck vor, gebildet aus den Kreisbogen A und B, über das wir zwei Voraussetzungen machen:



1., die Zentriwinkel von A und B verhalten sich wie zwei natürliche Zahlen p und q, wobei $p > q$.

2., die Halbmesser von A und B verhalten sich wie $\sqrt{q}$ und $\sqrt{p}$.

Wir teilen den Bogen A in p und den Bogen B in q gleiche Teile und verbinden die benachbarten Teilungspunkte. Die so entstehenden kleinen Kreisabschnitte mögen mit

$$a_1, a_2, \ldots, a_p \text{ bzw. } b_1, b_2, \ldots, b_q$$

bezeichnet werden; wir sagen kürzer „die a" und „die b". Alle a sind untereinander kongruent und ebenso alle b unter einander. Jedes a ist jedem b ähnlich, da alle diese kleineren Kreisabschnitte auf Grund der ersten Voraussetzung den gleichen Zentriwinkel besitzen. Zieht man jetzt den Hilfssatz heran, daß die Flächeninhalte ähnlicher Kreisabschnitte sich wie die Quadrate ihre Halbmesser verhalten, so ergibt die zweite Voraussetzung, daß der Inhalt eines jeden a sich zu dem Inhalt eines jeden b wie $q:p$ verhält. Da nun ihre Anzahlen umgekehrt p bzw. q sind, so ist der Gesamtinhalt aller a gleich dem Gesamtinhalt aller b. Bezeichnen wir endlich mit M das Möndchen zwischen den Kreisbogen A und B, und mit V das einspringende $(p+q)$-Eck, das von den kleinen Sehnen gebildet wird, so entsteht V offenbar aus M dadurch, daß man alle a wegnimmt und alle b hinzufügt. M und V haben somit den gleichen Flächeninhalt. Da man ferner nach Euklid (Buch II, Satz 14) jedes geradlinige Vieleck mit Zirkel und Lineal in ein Quadrat gleichen Inhaltes verwandeln kann, so ist jedes Möndchen, welches die beiden Voraussetzungen 1. und 2. erfüllt, mit Zirkel und Lineal „quadrierbar".

Was wir von Hippokrates (um -450) über diesen Gegenstand besitzen, ist nicht sein eigener Wortlaut, sondern ein Auszug, den Simplicius (um + 520) aus der Geometriegeschichte des Aristotelesschülers Eudemus gemacht hat. Simplicius scheint von dem Text des Eudemus nichts weggelassen, wohl aber mancherlei Erläuterungen in der Redeweise des Euklid eingefügt zu haben. Aber Simplicius kennzeichnet seine Erläuterungen nicht als solche, und wie der Text der geschichtlichen Darlegungen von Eudemus sich zur ursprünglichen Schrift des Hippokrates verhält, wissen wir nicht.

Hippokrates gibt sachlich genau die oben geschilderte mathematische Überlegung, aber nicht allgemein für beliebige Zahlenpaare (p, q), sondern an den drei Fällen (2, 1), (3, 1) und (3, 2), jedesmal einzeln auseinandergesetzt. Es ist kein Zweifel, daß er den Grundgedanken durchschaut hat; ist es doch griechischer Brauch, einen allgemeinen Satz nicht für beliebiges n, sondern für einen besonderen, niedrigen Wert von n darzustellen. Sein Text zeigt auch dort, wo der Wortlaut jeden Eingriff des Simplicius ausschließt, die Merkmale der strengen griechischen Beweisführung, wie wir sie aus allen späteren Schriften kennen. Bezeichnend für dies alles ist die Art, wie Hippokrates den allgemeinen Hilfssatz über alle Paare von ähnlichen Kreisabschnitten bewußt an die Spitze des Ganzen stellt und damit begründet, daß Kreisinhalte sich wie die Quadrate über den Durchmessern verhalten (**35**, 48 : 5—11 = **38**, 61 : 5—9). Wie er diesen letzten Satz bewiesen hat — ob mit Hilfe der Ausschöpfung (Euklid XII, 2), oder durch ein ἐναλλάξ an zwei Quadraten mit einbeschriebenen Kreisen, oder auf irgend eine dritte Art — wissen wir nicht. Daß auch Eudemus über diese grundlegende Frage zur Geschichte der griechischen Mathematik keine Andeutungen macht, ist zu bedauern, aber für die gegenwärtige Untersuchung unerheblich.

Im Vordergrund des eudemischen Berichtes steht der Nachweis des Hippokrates, daß der äußere Kreisbogen A im ersten der drei Fälle ein genauer Halbkreis ist, im zweiten größer und im dritten kleiner als ein Halbkreis. Auch dieser Nachweis wird mit der vollen Genauigkeit der Griechen geführt. Dagegen tritt die Frage, die für uns am wichtigsten ist, bei Eudemus sichtlich zurück: nämlich, wie hat Hippokrates seine drei Möndchen hergestellt? In den beiden Fällen (2, 1) und (3, 1) ist ziemlich unmittelbar zu sehen, daß sie mit Zirkel und Lineal geleistet werden können, und die Worte des Eudemus lassen durchblicken, daß Hippokrates sie wirklich so gezeichnet hat. Das dritte Möndchen (3, 2) zeichnet er dagegen nicht — oder nicht unmittelbar — mit Zirkel und Lineal, sondern mit Hilfe einer „Einschiebung" (νεῦσις), und Eudemus bemerkt nichts darüber, wie Hippokrates diese Einschiebung selbst bewerkstelligt hat.

Solche Einschiebungen kommen in der griechischen Geometrie öfter vor und sind im allgemeinen nicht von der Art, daß sie sich mit Zirkel und Lineal ausführen lassen. Die erwähnte Einschiebung des Hippokrates ist aber tatsächlich mit Zirkel und Lineal ausführbar, und wir erfahren durch Pappus sogar, daß ihre Ausführung mit Zirkel und Lineal in einem Werke des Apollonius gestanden hat (670 : 16–19). Aber Pappus teilt nur die Tatsache mit, nicht die Einzelheiten der Lösung, und er sagt nichts darüber, ob Apollonius diese Lösung von Hippokrates übernommen hat.

Auf der anderen Seite stehen wir vor der Frage, warum Hippokrates gerade diese drei Fälle und keine anderen behandelt hat. Da das Hauptstück der hippokratischen Beweisführung, die Umwandlung des Möndchens in ein Quadrat, für alle Fälle (p, q) zugleich gilt, so kann der Grund seiner Beschränkung auf die obigen drei Fälle nur in der Sorge um die Herstellung des einzelnen Möndchens gelegen haben.

Fragen wir — wiederum ohne jede Rücksicht auf die geschichtlichen Zusammenhänge — zuerst, wie es mit dieser Herstellung nach dem heutigen Stande der Wissenschaft steht[15]. Man übersieht zunächst nicht unmittelbar, daß für jedes Zahlenpaar (p, q) ein solches Möndchen überhaupt vorhanden sein kann. Euler ist der erste, bei dem sich eine Überlegung dieser Art findet (**99**). Bezeichnet man mit t den gemeinsamen Zentriwinkel aller $p+q$ kleinen Kreisabschnitte a und b, so führen die beiden Voraussetzungen 1. und 2. zu der Bedingungsgleichung

$$\text{(1)} \qquad \frac{\sin pt}{\sqrt{pt}} = \frac{\sin qt}{\sqrt{qt}}.$$

Aus dem Verlauf der Funktion $x/\sin^2 x$ im Intervall $0 < x < \pi$ folgert Euler (ohne den Satz als solchen aufzustellen), daß (1) für jedes Zahlenpaar (p, q) erfüllt werden kann, also aus Gründen der Stetigkeit und der Monotonie[16].

Die Herstellbarkeit der Winkel t, pt und qt mit Zirkel und Lineal[17])

[15]) Die neuzeitliche Geschichte der quadrierbaren Kreismonde ist erst kürzlich von Wieleitner und Hofmann dargestellt worden (**82**). Die bald zu nennenden Ergebnisse von Tschebotaröw (**114**) konnten in diesem Programm noch nicht berücksichtigt werden. Dort stehen auch die Gesichtspunkte, unter denen wir Euler und Hutton anführen, nicht im Vordergrund.

[16]) Siehe **99**, §§ 7, 11 und 19. Gedanken dieser Art waren den griechischen Mathematikern nicht ganz fremd. Ptolemaeus hat die Sehne des Winkels von einem Grad, unter Umgehung einer kubischen Gleichung, mit Hilfe eines Satzes abgeschätzt, der auf eine Monotonieeigenschaft der Funktion $\frac{\sin x}{x}$ hinausläuft und bereits von Aristarch und Archimedes benutzt worden war (**34**, I, 43 : 6—9).

[17]) Da die reellen, sich nicht überschlagenden unter den Möndchen (np, nq) und (p, q) auf Grund der Eulerschen Überlegung identisch sind, so dürfen wir in diesem

ist gleichbedeutend mit der Lösbarkeit der algebraischen Gleichung

$$(2)\qquad q z^{2p} - p z^{p+q} + 2(p-q) z^p - p z^{p-q} + q = 0$$

allein mit Hilfe von quadratischen Zwischengleichungen. Mit den Mitteln der Galoisschen Theorie hat man nun die Frage geprüft, für welche (p, q) die Aufgabe mit Zirkel und Lineal lösbar ist. Bisher ist es noch nicht gelungen, dies in allen Fällen zu entscheiden. Man kennt die Lösbarkeit von (2) unter der genannten algebraischen Nebenbedingung außer in den hippokratischen nur noch in den drei Fällen (5, 1), (5, 3) und (9, 1). Die Unlösbarkeit kennt man wiederum nur in besonderen Fällen, und zwar:

1. nach Euler (**99**) für (4, 1), (4, 3), (5, 2) und (5, 4). Die Durchführung des kubischen Falls (4, 1) findet man bereits bei Vieta (**82**, 17),

2. nach Landau (**109**) in denjenigen Fällen $(p, 1)$, in welchen p prim ist und nicht von der Gestalt $2^k + 1$,

3. nach U. Wegner — gemäß einer mündlichen Mitteilung an O. Toeplitz (**80**, 12) — auch in den restlichen Fällen $(p, 1)$ mit p prim und von der genannten Gestalt,

4. nach Tschebotaröw (**114**) in allen bisher unentschiedenen Fällen, in denen p und q beide ungerade sind. Der eigentümlich gelagerte Fall (9, 1) bildet hier die einzige neue Ausnahme[18]).
Von dieser Arbeit ist bisher nur der erste Teil erschienen.

5. durch eine Verschärfung des Eisensteinschen Kennzeichens schließt man leicht auch diejenigen Fälle (p, q) aus, wo p prim, $p \neq 2^k + 1$ und jetzt allgemeiner $1 \leqq q \leqq p - 1$.

Wenn es also die Absicht des Hippokrates gewesen sein sollte, die Herstellung seiner Möndchen mit Zirkel und Lineal zu leisten, so sind ihm von den fünf bis heute bekannten reellen Fällen lediglich die letzten zwei, (5, 1) und (5, 3) entgangen. Die elementargeometrische Konstruktion derselben ist erheblich verwickelter, und man kann sich wohl vorstellen, daß Hippokrates aus diesem Grund nicht durchgekommen sein mag. Wenn man also annimmt, daß Hippokrates seine Möndchen mit Zirkel und Lineal hat herstellen

---

Fall p und q als teilerfremd voraussetzen. Alsdann gibt es zwei ganze Zahlen P und Q derart, daß $Pp - Qq = 1$. Das Winkelpaar pt und qt ist daher in genau denselben Fällen mit Zirkel und Lineal herstellbar, wie der Winkel t selbst.

[18]) $p = 9$, $q = 1$ ist der einzige günstige Fall, in dem p nicht selbst eine Primzahl ist (Tschebotaröw, p. 173). Für p prim sieht man mit Hilfe des Eisensteinschen Kennzeichens leicht ein, daß die linke Seite von (2) nach Abtrennung des trivialen Faktors $(z-1)^2$ unzerlegbar ist. Für $p = 9$, $q = 1$ ist diese linke Seite zerlegbar. Einer der Faktoren hat Nullstellen, die mit Quadratwurzelzeichen darstellbar sind, aber sämtlich imaginär; der andere Faktor hat reelle Nullstellen, die aber mit Zirkel und Lineal nicht darstellbar sind.

wollen, so wäre es jedenfalls einleuchtend, warum er aus allen (p, q) gerade seine drei Fälle herausgegriffen hat.

Gegen diese Annahme bieten sich eine Reihe von Einwendungen dar. Einmal könnte Hippokrates die Herstellbarkeit in irgend einem anderen Sinne verstanden haben, der ebenfalls die Wahl jener drei Fälle verständlich macht. Er könnte z. B. den Wunsch gehabt haben, die Existenz der Möndchen, die gewiß nicht unmittelbar anschaulich ist, einzusehen — gleichgültig, mit welchen Hilfsmitteln[19]. Andererseits gibt die fehlende Behandlung der Neusis in dem Bericht über den Fall (3, 2) — insbesondere der Verzicht, wenigstens des Eudemus, auf die an sich mögliche Ausführung mit Zirkel und Lineal — einige Rätsel auf. Endlich könnte man geltend machen, daß möglicherweise Eudemus nicht alle Fälle des Hippokrates in seinen Bericht aufgenommen hat. Allen diesen Einwendungen müssen wir etwas genauer nachgehen.

Zur ersten Frage ist zu sagen, daß die Zulassung von höheren Hilfsmitteln, zum Beispiel von allen kubischen Neuseis, die Menge der konstruierbaren Fälle sofort vermehren würde. Denn wie Vieta bemerkt hat, ist bereits der Fall (4, 1) mit Hilfe der delischen Aufgabe zu erledigen[20]. Eine volle Übersicht darüber, welche Fälle mit kubischen Konstruktionen gelöst werden können, ist von der heutigen Mathematik noch nicht geleistet worden. Wenn man bedenkt, wie tiefe Sätze der Galoisschen Theorie schon zu den oben angegebenen Feststellungen nötig waren, wäre eine nicht ganz geringe Anstrengung der modernen Mathematiker erforderlich, um diese durch die Geschichtsbetrachtung angeregte Fragestellung zu bewältigen.

Das einzige, was geschichtlicherseits zu der ersten Frage noch beigebracht werden kann, ist eine bisher nicht erwähnte Bemerkung von Eudemus. Die ersten Worte, die aus seiner Geschichte der Geometrie in den Bericht des Simplicius aufgenommen sind, bringen die Möndchen in Verbindung mit dem vollen Kreis: „Aber auch die Quadraturen der Möndchen gehören, wegen der Verwandtschaft mit dem Kreis, zu den nichttrivialen geometrischen Lehrstücken“ (δόξαντες εἶναι τῶν οὐκ ἐπι-

[19]) In den Fällen mit $q = 1$ verhält sich die gemeinsame Sehne von A und B zu den kleinen Randsehnen wie $\sqrt{p}$ zu 1. Die Existenz dieser besonderen Teilfolge von Möndchen ist somit für den heutigen anschauenden Geometer etwas leichter anzunehmen als die Existenz der übrigen Fälle mit $q \geqq 2$.

[20]) Hippokrates hat die delische Aufgabe ihrerseits auf eine andere zurückgeführt (Proclus 213 : 8 zu ἀπαγωγή und Eutocius 88 : 18). Ob er die Zurückführung der vorliegenden kubischen Aufgabe auf die delische so leicht im Rahmen der Elementargeometrie hätte vollziehen können, muß allerdings dahingestellt bleiben, hat sie doch Vieta selbst erst durch die Mittel der neuerfundenen Algebra erschlossen. Er geht nämlich von dem Cardanschen Ansatz $x = u + v$ aus und erhält u und v als die delischen Mitteln zwischen den Quadratwurzelgrößen $\frac{u^2}{v}\left(=\frac{u^3}{uv}\right)$ und $\frac{v^2}{u}\left(=\frac{v^3}{uv}\right)$.

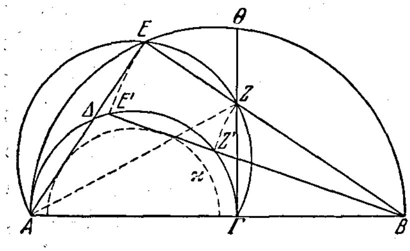
πολαίων διαγραμμάτων διὰ τὴν οἰκειότητα τὴν πρὸς τὸν κύκλον, 35, 48 : 1—2 = 38, 61 : 1—3). Man könnte die Bemühungen des Hippokrates um immer weitere Möndchen der geschilderten Art fast als den Versuch deuten, den Kreis in endlich viele Möndchen zu zerlegen und damit die Quadrierbarkeit des vollen Kreises darzutun. Dieser Eindruck wird vertieft durch die Tatsache, daß Hippokrates nach dem Bericht des Eudemus außer den drei alleinstehenden Möndchen noch zwei weitere Quadraturen geleistet hat, einmal die Summe von drei kongruenten Möndchen und einem Halbkreis (35, 34 : 22—24 = 38, 57 : 17—18), das andere Mal die Summe eines Möndchens und eines vollen Kreises (35, 68 : 13—14 = 38, 67 : 11—13). Aristoteles selbst bezeichnet die Quadratur des Kreises „mit Möndchen zusammen" als einen Schritt auf dem Wege zur Kreisquadratur (Anal. pr. 69a 32—33). Philoponus sagt dasselbe von den Möndchen schlechthin (24, 477 : 1—5) und Simplicius spricht nicht seltener als fünfmal von einer Zerlegung des Kreises in Möndchen (35, 36 : 18—38 : 20 = 38, 58 : 5—23). Jedenfalls geht daraus hervor, daß die Hilfsmittel, mit denen Hippokrates seine Möndchen herstellen und quadrieren wollte, dieselben sein müssen, wie diejenigen, mit denen die Quadratur des Vollkreises zu leisten war.

Rudio (35, 59) und Zeuthen (85, 176 : 18—23 und **91**, 80) tun die zweite Frage, die fehlende Behandlung der Neusis im Falle (3, 2), mit der Bemerkung ab, daß diese Einschiebung nur gerätlich ausgeführt wurde. Diese Einstellung hat die genannten Schriftsteller wohl verhindert, einmal zu überlegen, wie die an sich mögliche Konstruktion mit Zirkel und Lineal beschaffen gewesen sein könnte, und ob sie zu dem Wortlaut des Eudemus stimmen kann[21]).

Die Buchstaben in der nachfolgenden Lösung dieser Aufgabe sind so gewählt, daß der Leser entweder den Anschluß an Rudios Zeichnung findet (35, 58 = 38, 64), oder aber die ganze Zeichnung unabhängig von Rudio verstehen kann. AB sei ein Durchmesser des Kreises $A\Theta B$, und $\Theta\Gamma$ eine Halbsehne, die im Punkte Γ auf AB lotrecht steht. Es sind Punkte E auf dem Bogen $A\Theta$ und Z auf der Strecke $\Theta\Gamma$ so zu bestimmen, daß sie einen vorgegebenen Abstand ($< A\Gamma$)

[21]) Nicht jede elementargeometrische Konstruktion mit Zirkel und Lineal gewährt die gleiche Einsicht in die Möglichkeiten, die Hippokrates offen standen. Die wirkliche Herstellung der Möndchen mit Zirkel und Lineal scheint zum Beispiel nach den Inhaltsangaben von Wieleitner und Hofmann (82, 26—30) ebenfalls bei Wallenius (**116**) gestanden zu haben, doch nur in dem unechten Sinn, daß die errechneten Strecken einzeln nachgezeichnet wurden. Eine durchgehend geometrische Herstellung, die nicht mit den errechneten Strecken arbeitet, wurde in den Fällen (3, 1) und (5, 1) von Hutton gegeben (**104**, I, 327—339). Den schwierigen hippokratischen Fall (3, 2) zeichnet auch Hutton nicht eigentlich rein geometrisch, sondern wiederum nur in schrittweiser Nachahmung der algebraischen Formeln (p. 332).

besitzen und mit B zusammen geradlinig liegen. In dieser Allgemeinheit wurde die Aufgabe von Apollonius gelöst (Pappus 670:16—19), während Hippokrates selbst nur eine bestimmte Lage von Γ und einen bestimmten Abstand ins Auge zu fassen brauchte.



Auf $A\Gamma$ als Durchmesser schlagen wir einen neuen Kreis $AE'\Gamma$ und in diesen Kreis legen wir die Sehne $E'Z'$ so ein, daß B auf ihrer Verlängerung liegt und die Sehne selbst die für EZ vorgeschriebene Länge besitzt. Diese kleine Zwischenaufgabe ist an derselben Stelle wie die Hauptaufgabe, aber leider ohne Angabe der Lösung, für dasselbe Werk des Apollonius bezeugt (Pappus 670:23—24). Eine Lösung mit Zirkel und Lineal ist möglich: man zeichne in den Kreis $AE'\Gamma$ eine beliebige Sehne $A\Delta$ von der gewünschten Länge ein, berühre $A\Delta$ mit einem konzentrischen Kreise $\varkappa$ und ziehe von B aus eine Tangente an $\varkappa$. Ein Kreisbogen um B und durch E' möge dann den ersten Kreis $A\Theta B$ in E, BE möge die Halbsehne $\Theta\Gamma$ in Z schneiden. Wir behaupten, daß die Punkte Z und E alles Gewünschte leisten. Für die Geradlinigkeit von B, Z und E ist bereits gesorgt. Es bleibt nur übrig zu zeigen, daß $EZ = E'Z'$.

Aus der Ähnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke $B\Gamma Z$, BEA folgt, daß

$$(1) \qquad BE.BZ = BA.B\Gamma,$$

und dies kann man auch daraus erschließen, daß die Punkte $AEZ\Gamma$ auf einem Kreise liegen. Die Punkte $AE'Z'\Gamma$ liegen ebenfalls auf einem Kreise, sodaß nach dem Sehnensatz für einen Außenpunkt B:

$$(2) \qquad BE'.BZ' = BA.B\Gamma.$$

Die rechten Seiten von (1) und (2) sind identisch, und da $BE = BE'$, so ist auch $BZ = BZ'$ und schließlich der Unterschied $EZ = E'Z'$. Wer bei Hippokrates die bewußte Auswahl derjenigen Möndchen positiv nachweisen will, welche mit Zirkel und Lineal herstellbar sind, muß den positiven Nachweis liefern, daß er diese mehrschrittige quadratische Konstruktion — oder eine ihr körperalgebraisch gleichbedeutende — wirklich durchführen konnte und durchgeführt hat. Dazu passen nun allerdings schlecht die Worte „καὶ πάλιν ἀπὸ τοῦ B ἐπὶ τὰ Z, H ἐπεζεύχθωσαν“ (35, 58:15 = 38, 64:22), falls die hippokratische Lösung damit treu wiedergegeben ist. Denn die angegebene Lösung bestimmt Z aus E (bzw. E aus Z) erst durch die Verbindung mit B, und dies ist mit einer nachträglichen Verbindung von B mit Z schwerlich vereinbar. Eine andere Möglichkeit besteht allerdings darin, daß Hippokrates E aus E' und Z aus Z' durch zwei unabhängige Kreisbogen um B bestimmt habe. Dann bliebe aber die Geradlinigkeit von E, Z und B hinterher und ziemlich mühsam zu beweisen.

Eine zweite Lösung mit Zirkel und Lineal wurde von Horsley auseinandergesetzt (65, 6, casus 4). Sie benutzt weniger die Kreissätze und die Ähnlichkeitslehre als die Anlegung (παραβολή) und geht an der Hilfsaufgabe vorbei, die für Apollonius bezeugt ist. Aber sie teilt mit unserer Lösung alle Eigenschaften der Punkte B, E und Z, auf denen das besprochene Bedenken beruht.

Damit scheint glatt widerlegt zu sein, daß Hippokrates diese Neusis mit Zirkel und Lineal bewältigt habe, und eine solche Widerlegung würde uns nötigen, die oben aufgestellte Vermutung fallen zu lassen. Der Umstand nämlich, daß einzig die drei hippokratischen Möndchen mit Zirkel und Lineal und zugleich einigermaßen einfach zu zeichnen sind, läßt nur dann auf eine grundsätzliche Auswahl des mit diesen Mitteln Erreichbaren, wenn Zirkel und Lineal in allen drei Fällen wirklich verwendet werden. Allein, zu der genannten Widerlegung reicht unsere bisherige Betrachtung doch nicht ganz hin.

Zuerst wäre es möglich, daß Hippokrates diese Neusis zwar wirklich mit Zirkel und Lineal geleistet hat, aber nicht in dem von Eudemus benutzten Werk über die Möndchen, sondern in einer früheren Abhandlung, etwa in dem Lehrbuch, das er „zuerst von den erwähnten" Mathematikern verfaßt hatte (Proclus 66 : 8); Apollonius könnte dann die Lösung der Aufgabe hierher bezogen haben, ähnlich wie er die ersten Bücher seiner Kegelschnitte von den Vorgängern übernimmt und verarbeitet. Unter dieser Voraussetzung kann man sich leicht vorstellen, daß Hippokrates in dem folgenden Werk über die Möndchen die Konstruktion als bereits geleistet herübernimmt (κείσθω ... νεύουσα, 35, 58 : 9—10 = 38, 64 : 17—18), aber im Laufe der weiteren Beweisführung doch einige Einzelheiten der Konstruktion wiederholen muß.

Weiter setzt eine solche Schlußweise voraus, daß die betreffenden Worte von Eudemus und nicht von Simplicius stammen. Man hat zur Unterscheidung von eudemischen und simplicianischen Textteilen unter anderen scharfsinnigen Überlegungen auch einen besonderen Prüfstein ersonnen, welcher diese Trennung erleichtern soll. Bretschneider (47, 114, Anm. 2) lenkte die Aufmerksamkeit darauf, daß die Benennung der Buchstaben bald in der altertümlichen Form „τὸ (σημεῖον) ἐφ' ᾧ A", bald in der kürzeren, seit Autolykus und Euklid üblicheren Form „τὸ A" erfolgt. Bretschneider vermutete, daß die erste Form für Hippokrates, die zweite für Eudemus kennzeichnend sei. Allman, Rudio und Tannery ersetzten nachher den Gegensatz Hippokrates-Eudemus durch den Gegensatz Eudemus-Simplicius. Wenn diese Scheidung auch an der vorliegenden Stelle Recht behalten sollte, würden die fraglichen Worte dem Simplicius zukommen, und der geschilderte Einwand würde dann weniger ins Gewicht fallen. Neuerdings hat aber O. Becker in einer noch nicht veröffentlichten Untersuchung eine erneute Prüfung dieses Scheidungsmittels vorgenommen, die im ganzen einen einheitlicher geschlossenen Eudemustext absondern würde, als man ihn bisher abgesondert hatte. Seine freundlichst mitgeteilten Ergebnisse sprechen dafür, daß unsere Stelle und ihre nächste Umgebung (35, 58 : 3—19 = 38, 64 : 7—24) mit Ausnahme der Worte ὑπόκειται γὰρ ἡ EZ ἐπὶ τὸ B νεύουσα dem Eudemus, ja vielleicht sogar dem Hippokrates selbst gehören [22]).

Die dritte Frage betraf die Möglichkeit, daß Eudemus nicht alle Fälle des Hippokrates in seinen Bericht aufgenommen hat. Der Text liefert zur Entscheidung dieses Punktes keine Handhabe. Die angeführten Einwände haben nichts daran geändert, daß die Annahme, Hippokrates habe seine Möndchen mit Zirkel und Lineal konstruieren wollen, die einige geblieben ist, die einleuchtend macht, warum er gerade seine drei Fälle behandelt hat. Doch zeigen die Einwendungen, daß der Nachweis dieser Annahme als der einzig möglichen keineswegs gelungen ist. So hat also die Heranziehung des Hippokratesfragmentes kein greifbares Ergebnis über Zirkel und Lineal erbracht. Sie hat uns jedoch unzweideutig ergeben, daß Hippokrates die Konstruktion der Möndchen als einen wesentlichen Teil der Aufgabe erkannt und ihr einen uns freilich unbekannten Sinn erteilt hat.

§ 6.
Kubische Aufgaben bei Platon.

Nachdem wir das umfangreichste Zeugnis vorplatonischer Mathematik für die Frage nach einer bewußten Stellungnahme zu Zirkel und Lineal herangezogen haben, wenden wir uns nun zur Stellungnahme von Platon selber. Im ersten Abschnitt dieser Arbeit wurde nicht selten die Ansicht angetroffen, daß Platon alle höhere Hilfsmittel als Zirkel und Lineal habe verbieten wollen. Es hat sich jedoch gezeigt, daß diese Ansicht in den bisher verwendeten Quellen keine hinreichende Stütze findet. Wir müssen uns daher auch für diese besondere Frage nach neuen Zeugnissen umsehen und wollen sie zunächst an

[22]) Ein Vergleich zwischen dem Gebrauch und der Benennung des Punktes H erhöht die Bedenken gegen eine unverfeinerte Anwendung des Kennzeichens und trägt zur Unterstützung der Beckerschen Textzuteilung bei. Jener Punkt tritt in wenigen Zeilen (11—18, bzw. 19—24) fünfmal auf. Er wird zunächst zweimal in der längeren Form genannt, aber nur als unbestimmter Punkt auf EH; dann in der kurzen Form erst definiert, dann einmal in der kurzen und ein zweites Mal in der längeren Form benutzt.

den Stellen suchen, wo Platon sich über wesentlich kubische Aufgaben äußert oder mit solchen Aufgaben in Verbindung gebracht wird.

Derselbe Plutarch, der für eine Beschränkung auf Zirkel und Lineal durch Platon immer wieder angerufen worden ist, bringt zwei weitere Nachrichten über die delische Aufgabe, wo diese nicht als fehlerhaft gelöst oder als unslösbar hingestellt wird, sondern nur als eine Sache der höheren Geometrie. An der ersten Stelle soll die Zweideutigkeit der Göttersprüche an einem Beispiel gezeigt werden: dem Gott Apollon habe bei der Forderung an die Delier nicht so sehr die wirkliche Verdoppelung des Altares am Herzen gelegen, als vielmehr die Pflege der Geometrie unter den Hellenen. Von der Aufgabe selbst heißt es dabei in einem Relativsatz „ὃ τῆς ἄκρας ἕξεως περὶ γεωμετρίαν ἔργον ἐστίν", de Ei apud Delphos 386 E (iii). Die zweite Nachricht des Plutarch entwickelt mit größerer Ausführlichkeit denselben Gedanken: „Sie (d. h., die Delier) riefen in dieser Verlegenheit Platon zu Hilfe. Dieser nun ... erklärte daraufhin, daß der Gott mit den bildungschmähenden Hellenen Spaß treibe, ⟨ihre⟩ Unwissenheit verhöhne und ihnen befehle, sich mit der Geometrie zu beschäftigen, und zwar nicht bloß nebenbei. Die Hernahme (λῆψις) von zwei mittleren Proportionalen — das einzige Mittel zur Verdoppelung der Gestalt eines kubischen Körpers, wenn seine sämtlichen Ausmessungen im gleichen Verhältnis vergrößert werden sollen — sei nicht die Leistung eines schlecht oder unscharf blickenden Geistes, sondern eines Geistes, der in Bezug auf Linien die äußerste Geübtheit besitze (οὐ γάρτοι φαῦλον, οὐδ' ἀμβλὺ διανοίας ὁρώσης, ἄκρως δὲ τὰς γραμμὰς ἠσκημένης ἔργον εἶναι). Dies würde ihnen Eudoxus von Cnidus oder Helicon von Cyzicus zustande bringen. Aber nicht diese Sache selbst wünsche der Gott, er befehle vielmehr den Hellenen, sie sollten den Krieg und seine Übel vermeiden, sich den Musen widmen, ihre Leidenschaften durch Literatur und Wissenschaft besänftigen und so ohne Schaden und hilfreich mit einander verkehren," de Genio Socratis 579 A–D (iii).

Die inhaltliche Zuverlässigkeit dieser Nachricht ist durch unser günstigeres Urteil über Plutarch nicht gewährleistet (§ 2). Die angeführten Worte vertragen sich mit der Möglichkeit, daß die Lösung der delischen Aufgabe in diesem Augenblick nur erhofft und von der großen Begabung eines Eudoxus oder eines Helicons erwartet wurde. Falls man sich so schwer auf die Wahl der Worte stützen darf, spricht λῆψις anstelle von εὕρεσις eher für die Anwendung eines bereits vorhandenen Verfahrens, als für das Suchen nach der erstmaligen Lösung. Die Äußerung gewinnt jedenfalls sehr an Inhalt und Ernst, wenn wir sie in die Zeit verlegen, wo Archytas, Eudoxus und Menaechmus ihre überlieferten und theoretisch tadellosen Lösungen bereits gefunden hatten. Wir brauchen nicht gerade auf diese drei Lösungen zu warten, denn

Philoponus erzählt allgemeiner, daß Platon die delische Aufgabe an seine Schüler stellte und daß „einige unter ihnen" die gefundenen Lösungen niederschrieben (**25**, 102 : 22—23). Die Stelle gibt uns ferner den ersten Wink darüber, welche Rolle für Zirkel und Lineal wirklich in Frage kommen: zunächst also die Rolle einer genauen, gegenständlichen Grenzscheide zwischen elementarer und höherer Geometrie. Wir kommen auf diesen Punkt zurück und werden feststellen, daß Zirkel und Lineal unter anderem tatsächlich als eine didaktische Grenze gegolten haben.

Die delische Aufgabe wird im Corpus Platonicum einmal ausdrücklich erwähnt, allerdings nicht in einer echten Schrift, sondern im Sisyphus 388 E. Sie wird dort, zusammen mit der Bestimmung der Diagonale eines Quadrats, als Beispiel einer geometrischen Untersuchung genannt. Der Geometer fragt nicht, so heißt es dort, ob die Diagonale existiert oder nicht, sondern „ὁπόση τίς ἐστιν μέτρῳ πρὸς τὰς πλευράς", und er fragt ebensowenig, ob der Würfel existiert, sondern „ὁπόσος τίς ἐστι λόγῳ". Der Gesichtspunkt der Größenbestimmung tritt hier in den Vordergrund, vielleicht auch die nicht ganz scharf geprägte Frage nach der algebraischen Beschaffenheit von $\sqrt[2]{2}$ und $\sqrt[3]{2}$, jedenfalls erfahren wir nichts von irgendwelcher konstruktionstheoretischen Einstellung. Insbesondere erfahren wir an dieser Stelle nichts darüber, ob die delische Aufgabe mit Zirkel und Lineal zu lösen sei, und ob die Lösungen mit höheren Hilfsmitteln mißbilligt oder zugelassen werden sollen.

Mit einer zweiten wesentlich kubischen Aufgabe beschäftigt sich Platon in einer echten Schrift, an der vielbesprochenen Stelle Menon 86 E—87 B. Wir werden uns auf die Deutung stützen, welche diese Stelle neuerdings bei Heath gefunden hat (**61**, I, 298—303), aber schon früher von Mollweide (**67**, 31—64 und 115—122), von Butcher (**48**) und von Cook-Wilson (**51**) klarer und klarer vorgeahnt worden war. Heath macht über die Kenntnisse zu Platons Zeit keine neuen Voraussetzungen, vermeidet aber auch den entgegengesetzten Fehler, die Stelle zu stark zu trivialisieren. Seine sehr sorgfältige Begründung läßt sich in wenigen Zeilen nicht wiedergeben; sie wird dem Zweck des platonischen Beispiels und zugleich den heutigen Kenntnissen über die Fachsprache mehr als alle bisherigen Auslegungen gerecht. Der Nachweis, daß diese Aufgabe tatsächlich nicht mit Zirkel und Lineal zu lösen ist, steht bei Heath und in der mathematischen Literatur nicht fertig zur Hand und möge hier in einem Zusatz nachgeliefert werden. Dieser Zusatz wird Gelegenheit geben, den mathematischen Kern der Heathschen Deutung zu schildern.

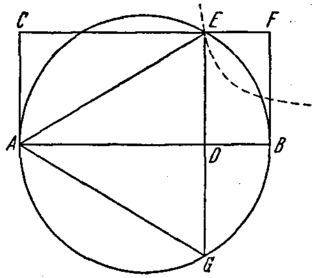
Die Bedeutung der Stelle für die vorliegende Frage liegt nicht in ihren mathematischen Einzelheiten, sondern in der Rolle, die eine gewisse Nebenbedingung dabei spielt. Die Aufgabe ist dann und nur dann lösbar, sagt Sokrates, wenn diese Bedingung erfüllt werden kann. Diese Bedingung ist aber nicht dafür notwendig und hinreichend, daß die Aufgabe mit Zirkel und Lineal lösbar ist, sondern nur dafür, daß eine (reelle) Lösung überhaupt existiert. Sobald die Nebenbedingung erfüllt ist, also eine reelle Lösung vorhanden, gilt diese Aufgabe, obwohl sie mit Zirkel und Lineal nachweislich nicht ausführbar ist, bei dem redenden Sokrates als lösbar: εἴτε ἀδύνατον εἴτε μή. An unserer Stelle steht wesentlich mehr als ein bloßer διορισμός. Für einen solchen hätte die Angabe der oberen Schranke für τόδε τὸ χωρίον genügt; und wenn man diese Schranke nicht hätte bestimmen können, so wäre mit dem Hinweis auf ihr bloßes Vorhandensein ein Beispiel zur ὑπόθεσις der Geometer schon gefunden. Platon gibt mehr; er gibt darüber hinaus den ersten Schritt zu einer wirklichen Lösung der Aufgabe. Diese Lösung war für die Mathematiker um Platon durchaus kein Ding der Unmöglichkeit; sie muß ihnen im Gegenteil besonders nahe gelegen haben, denn sie erfolgt durch die Schnittpunkte des gegebenen Kreises mit derjenigen Hyperbel, welche Menaechmus in seiner ersten Würfelverdoppelung verwendet (Eutocius 78 : 13, und namentlich 80 : 2). In beiden Fällen wird diese Hyperbel in der gleichen Weise aufgefaßt, nämlich als der geometrische Ort, den wir heute durch die Gleichung $xy = c$ darstellen. Die Aufgabe im Menon 86 E wurde daher möglicherweise unter den Augen von Platon gelöst, vielleicht von Menaechmus selbst, und trotz des unvermeidlichen Gebrauchs der Kegelschnitte wird ihre Lösung, wenn sie überhaupt reell ist, stets als δυνατόν oder als μὴ ἀδύνατον angesehen.

Unsere Stelle spricht also dagegen, daß Platon eine allgemeine Beschränkung auf Zirkel und Lineal beobachtet wissen wollte, und legt es vielmehr nahe, daß er kubische Mittel wenigstens bei der Lösung kubischer Aufgaben gestattet hat. Der nun folgende mathematische Zusatz schließt mit einer körperalgebraischen Überlegung, die unsere geschichtliche Auswertung der Menonstelle weiter unterstützen und für eine Einzelfrage des dritten Teiles dieser Arbeit die Grundlage abgeben wird.

Mathematischer Zusatz zu § 6.

Die Unlösbarkeit der Aufgabe im Menon 86 E mit Zirkel und Lineal wird von Heath in seiner Geschichte der griechischen Mathematik nur als Tatsache erwähnt. In dem rein mathematischen Schrifttum fehlte bisher der Anlaß, diese algebraische Einzeltatsache förmlich zu beweisen. Die Nachlieferung des Beweises wird auch der vorliegenden geschichtlichen Untersuchung mehr als einmal zugute kommen.

An den Durchmesser ADB eines Kreises[23]) soll nach Heath ein Rechteck $ACED$ von gegebenem Flächeninhalt[24]) so angestreckt werden[25]), daß das Restreckteck $EDBF$ dem angestreckten ähnlich ist[26]). Spiegelt dann G den Punkt E in der Geraden AB, so wird damit die gegebene Fläche[24]) wirklich in der Gestalt eines Dreiecks[27]) in den gegebenen Kreis hineingespannt[28]).



Um mit einer möglichst einfachen Gleichung zu schließen, nehmen wir $AB = 1$, die gegebene Fläche $= 1 : c^2$, $AD = 2 : cy$. Es ist dann

$$DB = 1 - \frac{2}{cy},$$

$$DE^2 = \left(\frac{2}{cy}\right) - \left(\frac{2}{cy}\right)^2.$$

Die Forderung $AD . DE = 1 : c^2$ drückt sich durch die Bedingungsgleichung

$$(1) \qquad y^4 - 8cy + 16 = 0$$

für die maßgebende Länge y aus. Nach dem Gaußschen Lemma ist (1) für „den Wert $c = 1$" unzerlegar, also um so mehr für „c unbestimmt". Die Wurzeln y_1, y_2, y_3, y_4 von (1) sind daher entweder gar nicht, oder paarweise und folglich alle mit Zirkel darstellbar. Nach (1) gilt für sie zunächst

$$(2) \qquad 0 = y_1 + y_2 + y_3 + y_4.$$

Dann bilden wir drei neue Zahlen u_1, u_2 und u_3 mit

$$(3) \qquad \begin{aligned} 4\sqrt{u_1} &= y_1 + y_2 - y_3 - y_4 \\ 4\sqrt{u_2} &= y_1 - y_2 + y_3 - y_4 \\ 4\sqrt{u_3} &= y_1 - y_2 - y_3 + y_4 \end{aligned}$$

und bemerken zunächst, daß die Zahlen u, wegen der Lösbarkeit der linearen Gleichungen (2) und (3) nach den y, genau dann mit Zirkel und Lineal darstellbar sind, wenn die y diese Eigenschaft besitzen. Die neuen Zahlen u sind nun die Wurzeln der Gleichung (der „kubi-

[23]) „τὴν δοθεῖσαν αὐτοῦ (d. h., τοῦ κύκλου) γραμμήν".
[24]) „τόδε τὸ χωρίον".
[25]) „παρατείναντα", „τὸ παρατεταμένον".
[26]) „οἷον ἂν αὐτὸ τὸ παρατεταμένον ᾖ".
[27]) „τρίγωνον" in aussagender Wortstellung.
[28]) „ἐς τόνδε τὸν κύκλον ἐνταθῆναι".

schen Resolvente")

$$u^3 - 4u - c^2 = 0 \tag{4}$$

Nach dem Gaußschen Lemma ist (4) für „den Wert $c = 2$" unzerlegbar, also um so mehr für „c unbestimmt". Eine unzerlegbare Gleichung dritten Grades ist aber mit Hilfe von lauter quadratischen Zwischengleichungen nicht lösbar[29]). Wir buchen das genaue Ergebnis dieser algebraischen Überlegung wie folgt.

„Wird die gegebene Größe c als eine Unbestimmte aufgefaßt, so ist die Aufgabe im Menon 86 E mit Zirkel und Lineal nicht ausführbar".

Hier ist ein algebraischer Umstand hervorzuheben, der in der vorliegenden Arbeit zweimal wieder eine Rolle spielen wird. Die Voraussetzung, daß $\mathsf{P}(c)$, c unbestimmt, als Grundkörper gewählt wurde, ist für das Ergebnis wesentlich. Gehen wir in (1) von „c unbestimmt" zu „$c = 2$", also vom Grundkörper $\mathsf{P}(c)$ zum Grundkörper P über, so wird (1) zerfällbar sein:

$$y^4 - 16y + 16 = (y-2)\,(y^3 + 2y^2 + 4y - 8)$$

und eine Wurzel $y = 2$ besitzen, die mit Zirkel und Lineal darstellbar ist. Dies kann auch für andere „Werte von c" vorkommen, und die Aufgabe ist in allen solchen Fällen „mit Zirkel und Lineal lösbar". Das steht mit unserem Ergebnis keineswegs im Widerspruch; denn der Grundkörper „$\mathsf{P}(c)$, c eine gegebene Größe" ist keineswegs ein besonderer Fall des Grundkörpers „$\mathsf{P}(c)$, c eine Unbestimmte".

Hätte nun Platon ein lebhaftes und dauerndes Interesse gehabt, allen Einzelfällen von Lösbarkeit mit Zirkel und Lineal nachzuspüren,

---

[29]) Dieser Satz wird in den üblichen Darstellungen entweder im Sonderfall und etwas umständlich bewiesen, oder aber als triviale Folgerung aus einer weit tieferliegenden Theorie. Der Hauptschritt läßt sich jedoch auf andere Art verallgemeinern und dank dieser Verallgemeinerung leichter begründen.

Hilfssatz: Ist ein Polynom n-ten Grades $f(x)$ über dem Grundkörper k unzerlegbar, und gilt im Polynombereich $k[x]$ die eindeutige Zerlegbarkeit in Primpolynome, so kann $f(x)$ nur dann in einer endlichen algebraischen Erweiterung K vom Relativgrad p über k einen Faktor m-ten Grades $g(x)$ abspalten, wenn jeder zu m fremde Teiler von n in p aufgeht.

Anwendung: Man nehme in dem vorliegenden Fall $n = 3$, $m = 1$ und p eine Potenz von 2.

Beweis: Wir nehmen in $K[x]$ die Zerlegung $f(x) = g(x)\,h(x)$ an und gehen innerhalb der (dessentwegen zu bildenden) Galoisschen Hülle von K über k zu den Normen dieser Polynome über: $f(x)^p = N(g)\,N(h)$. Hier stehen auf beiden Seiten Polynome aus $k[x]$, woselbst $f(x)$ prim ist und die eindeutige Zerlegbarkeit gilt. Daraus schließen wir, daß $N(g) = f(x)^q$, $q < p$. Die beiden Seiten dieser Gleichung haben die genauen Grade $mp = nq$; und darum muß jeder zu m fremde Faktor von n in p aufgehen.

so hätte Menon 86 E leicht eine andere Wendung nehmen können: „Fragt man die Geometer, ob eine Aufgabe mit Zirkel und Lineal lösbar ist, so antworten sie wohl: Wir wissen es nicht, aber wir besitzen ein Kennzeichen, das darüber entscheidet, oder wir kennen Einzelfälle, wo das möglich ist". So lautet die Stelle nicht. Vielleicht hat Platon zufällig ein anderes Beispiel zur ὑπόθεσις gewählt, vielleicht kannte er quadratisch lösbare Einzelfälle aber kein Kennzeichen, vielleicht besaß er ein erstaunlich sicheres Gefühl für unseren algebraischen Unterschied zwischen beliebigen Werten und Unbestimmten, vielleicht lag ihm gar nichts daran, auch bei kubischen Aufgaben sämtliche „Sonderfälle von Lösbarkeit mit Zirkel und Lineal" aufstöbern zu lassen.

§ 7.

Kreis und Gerade als Urkurven bei Platon.

Das Ergebnis von § 3 lenkt die Aufmerksamkeit auf eine zweite Fundstätte von mittelbaren Zeugnissen über die Stellungnahme Platons zu Zirkel und Lineal. Wird an den beiden Plutarchstellen die Zuflucht zu gerätlichen Mitteln gerügt, so kommen Zirkel und Lineal als Gegenstand des platonischen Tadels auch deshalb weniger in Betracht, weil sie ebenfalls gerätliche Mittel sind. Dieser Umstand wurde von Descartes hervorgehoben (**95**, 315 = Oeuvres VI, 388) und gilt so sehr, daß Pappus drei geometrische Herstellungen „organisch" nennt, die allein mit Zirkel und Lineal erfolgen (1082 : 2, 1098 : 10 und 1108 : 22). Es wäre in der Tat eine merkwürdige Unfolgerichtigkeit, wenn Platon alle anderen Geräte als sinnfällig und stoffhaft verboten und Zirkel und Lineal, die nicht weniger sinnfällig und stoffhaft sind, gestattet hätte. Die Beschränkung auf diese Hilfsmittel mußte, wenn Platon sie auferlegen und diese Widersprüche dennoch vermeiden wollte, durch die Beschränkung auf Kreis und Gerade als Hilfskurven ersetzt werden. Wir wollen uns daher die Frage stellen, ob diese Kurven bei Platon selbst irgendwie als die Grundlage aller anderen angesehen werden, und ob sie von ihm in einer solchen Weise bevorzugt werden, daß ihr Gebrauch bei der Lösung von Aufgaben mit berührt wird.

Es gibt in der Tat bei Platon, und auch über ihn einige Stellen, die beim Aufkommen der bisherigen Anschauungen vorgeschwebt haben können. Sie sind alle von der Art, daß in ihnen der Kreis und die Gerade gewissermaßen als die beiden Urkurven auftreten, und es wird die Frage sein, ob diese Stellen einen Hinweis enthalten, Kreis und Gerade im Sinne von Zirkel und Lineal zu verstehen.

Proclus schreibt: „ὁ μὲν Πλάτων τῆς γραμμῆς δύο τὰ ἁπλούστατα καὶ ἀρχοειδέστατα θέμενος εἴδη, τήν τε εὐθεῖαν καὶ τὴν περιφερῆ, τὰ ἄλλα πάντα κατὰ μίξιν ἐκ τούτων ὑφίστησιν" (103 : 21—104 : 2). Wir bemerken zunächst mit Heiberg (64, 13), daß Proclus bald nachher die aristotelische Einteilung der Bewegungen von der Einteilung der Linien nicht ganz scharf getrennt hat. An unserer Stelle kann er eine ähnliche Übertragung, nämlich die von der Einteilung der σχήματα im Parmenides (siehe unten) auf die der Linien, vorgenommen haben. Jene Stelle im Parmenides ist dem Proclus gewiß gegenwärtig, denn er spielt deutlich (104 : 8) auf die vorangehende Parmenidesstelle an (οὐτ' ἄρα ὅλον … ἔσται τὸ ἕν) und nennt diese Schrift und ihren Verfasser mit Namen, während seine Beispiele von gemischten räumlichen Figuren (104 : 20) mit den Beispielen in seinem Parmenideskommentar übereinstimmen (31, 878 : 15—25). In demselben Kommentar werden die Linien und die Figuren durch eine gemeinsame Eigenschaft verknüpft, gerade um zu zeigen, daß diese Eigenschaft die Figuren nicht hinreichend kennzeichnet, 878 : 30—33. Proclus hat in seinem Bestreben, die Unterscheidung zwischen „Grenze, Unbegrenztem und Gemischtem" überall anzuwenden, die entsprechende Einteilung bei den Linien, in Anlehnung an die Parmenidesstelle über die Figuren, vielleicht selbständig — oder wenigstens ohne unmittelbare platonische Vorlage — unternommen (vgl. 144 : 14—18). Einerlei aber, ob seine Aussage eine nachträgliche Deutung ist, oder eine Überlieferung aus Platons Zeit enthält, in beiden Fällen hängt ihre Bedeutung für die konstruktionstheoretische Frage nach Zirkel und Lineal noch sehr davon ab, in welchem Sinne die anderen Kurven nach der Redeweise von Platon und Proclus aus Kreis und Gerade „gemischt" sein sollen. Es empfiehlt sich jedoch, diese Frage solange zurückzustellen, bis die übrigen Quellen dieser Art zusammenfließen können.

Im Parmenides ist die Teilnahme an σχῆμα durch die Teilnahme am Runden und am Geraden bedingt und deshalb dem Einen abzusprechen: „Καὶ ἄνευ σχήματος ἄρα· οὔτε γὰρ ἂν στρογγύλου οὔτε εὐθέος μετέχοι" 137 DE). Στρογγύλον (verstehe σχῆμα) bedeutet dabei nicht in beliebiger Weise krumm, sondern genau kreis- oder kugelrund: „Στρογγύλον γέ πού ἐστι τοῦτο, οὗ ἂν τὰ ἔσχατα πανταχῇ ἀπὸ τοῦ μέσου ἴσον ἀπέχῃ". Im siebten Brief erscheint dasselbe Begriffspaar in der spätere üblicheren, aber schon an unserer Stelle vorkommenden Benennung εὐθύς-περιφερής aber immer nur in Verbindung mit den σχήματα. Diese sind gemäß einer anderen Parmenidesstelle entweder gerade oder kreisrund oder „aus diesen beiden gemischt" (145 B).

Was ist aber ein σχῆμα? Von Euklid an bedeutet das Wort nicht etwa eine völlig beliebige Kurve oder Fläche, sondern ein regelmäßig berandetes Stück der Ebene oder des Raumes: „σχῆμά ἐστι τὸ ὑπό τινος ἤ τινων ὅρων περιεχόμενον" (Buch I, Def. 14). Dementsprechend treffen wir in Buch I bei den Definitionen des Kreises und des Halbkreises, in Buch XI bei denen des Prismas, der Kugel, des Kegels, des Zylinders und der fünf platonischen Körper stets die Worte „περιεχόμενον" oder „περιληφθέν". Die Scheiben des Kreises, der Ellipse und der geschlossenen Efeulinie sind nach Geminus σχήματα (Proclus 111 : 5—8), während die Parabel, die Hyperbel, die Muschellinie und die gerade Strecke nicht zu den „σχηματοποιοῦσαι" unter den Linien gehören; zu den räumlichen σχήματα zählt bei Epikur auch die Eigestalt (nach Diogenes Laertius, **11**, X, § 74). Selbst auf krummen Flächen gibt es σχήματα, aber auch hier sind es allseitig begrenzte Flächenstücke mit einem Rand von regelmäßiger Gestalt, wie bei Pappus das (eulersche) Kugeldreieck (476 : 16—17). So wenig ist die Berandung als selbständige Kurve zu denken, daß Proclus das einspringende Vierseit ein vierseitiges Dreieck nennt (329 : 1). Aber auch in platonischen Schriften hat das Wort σχῆμα diese Bedeutung und nicht die Bedeutung einer ganz beliebigen Kurve: Sokrates erklärt es vorübergehend als eine Begleiterscheinung des farbigen Gegenstandes oder der Oberfläche, endgültig als στερεοῦ πέρας (Menon 75 B und 76 A), und so heißen im Timaeus die Kugel und die platonischen Körper (33 B, 54 C und öfter). Die regelmäßigen Figuren der Ebene und des Raumes lassen sich nun in der Tat in geradrandige (Vieleck, Vielflächner), rundrandige (Kreis, Kugel) und gemischtrandige (Halbkreis, Kegel, Zylinder) einteilen. Aber diese Einteilung überträgt sich von den Figuren, die man zuerst betrachtet hatte, höchstens auf diejenigen später entdeckten Kurven oder Bogenfolgen, die im Sinne des Geminus σχηματοποιοῦσαι sind, nicht auf die „ἐπ' ἄπειρον ἐκβαλλόμεναι", wie Parabel, Hyperbel oder Muschellinie. Unsere Parmenidesstellen reichen nicht hin um zu zeigen, daß die offenen Kegelschnitte nach Platons Ansicht am Geraden und am Kreisförmigen teilhaben. Noch ferner liegt es, auf Grund dieser Stellen anzunehmen, daß der Gebrauch der Kegelschnitte nach Platons Ansicht durch den Gebrauch von Zirkel und Lineal zu ersetzen gewesen sei. Nicht einmal die sehr ausführliche Erklärungsschrift des mathematisch so gut unterrichteten Proclus (**31**) bringt die Stelle mit unserer Frage in Berührung.

Eine Forderung, alles mit Zirkel und Lineal zu erledigen, könnte man aus dem Teilwortlaut einer anderen Stelle bei Proclus herauspressen wollen: „Διὸ καὶ ὁ Πλάτων ... διὰ τῶν ἐπιπέδων ἠξίου δηλοῦν" (92 : 9—11). Die (τόποι) ἐπίπεδοι sind nach Pappus ja nichts anderes, als Gerade und Kreis (662 : 11 und § 9).

Die Umgebung der Stelle sträubt sich gegen eine solche Deutung. Die geschlechtverdeckende Form ἐπιπέδων in Zeile 11 erweist sich in Zeile 12 als sächlich; es sollen die σώματα (Urstoff-Vielflächner, wie Timaeus 55 D—56 A) in ihre zweierlei Dreiecke aufgelöst und nachher zu anderen σώματα wiederzusammengesetzt werden. Wirkliche Beispiele dieser Art von Naturerklärung kommen im Timaeus (56 DE) und bei Diogenes Laertius über Platon wirklich vor (III, § 70 am Schluß). Der ununterbrochene Wortlaut macht es klar, daß es sich nur um die naturphilosophische Darstellungstechnik handelt (92 : 9—13).

Im Philebus scheint Platon den Kreis und die Gerade in ganz anderer Weise zu bevorzugen. Bei der Erörterung der Lüste schreitet Sokrates von den gemischten zu den reinen vor. Rein und von einem vorhergehenden Schmerz unabhängig sind die Lüste, die sich auf schöne Farben, Gestalten, Töne und Gerüche beziehen. Protarchus bittet um größere Deutlichkeit und erhält die Antwort, diese Schönheit der Gestalt solle nicht im landläufigen Sinne verstanden werden, sondern εὐθύ τι λέγω καὶ περιφερὴς καὶ ἀπὸ τούτων δὴ τά τε τόρνοις γιγνόμενα ἐπίπεδά τε καὶ στερεὰ καὶ τοῖς κανόσι καὶ γωνίαις, εἴ μου μανθάνεις, 51 C.

Sokrates leitet seinen Zuhörer in sehr geschickter Stufenfolge von der Schönheit der Natur (ζώων) über die Schönheit der Kunst (ζωγραφημάτων) und der Technik bis zu den Schönheiten rein geistiger Ordnung (μαθήματα, 52 A). Die runden und geraden Gegenstände, die hier in der Mitte stehen, gehören noch zur Außenwelt und fallen noch unter die Sinne, aber sie erhalten durch die Aufprägung einer begrifflich bestimmten, geometrischen Gestalt und durch die gerätlich erreichte Genauigkeit derselben einen gewissen Anteil an der höheren, geistigen Schönheit der geometrischen Wissenschaft. Diese Schönheit verdanken sie nicht mehr, wie die ζωγραφήματα, der treuen Nachahmung eines schönen, aber naturgebundenen Gegenstandes, sondern der Nachahmung einer geometrischen, also einer rein begrifflichen Gestalt. Die hier genannten Beispiele brauchen nicht als eine Aufzählung von gewollter Vollständigkeit verstanden zu werden. Das Ziel des Sokrates besteht darin, daß er den langsam mitkommenden Protarchus irgendwie zu den geistigen Schönheiten hinführt, und deshalb darf er sich keiner anderen als der denkbar einfachsten Beispiele bedienen. Gestalten aus der höheren Geometrie zu nennen, würde Protarchus nur verwirren und dem didaktischen Geschick des Sokrates widersprechen.

Aber auch diese einfachen Beispiele werden an unserer Stelle auf keinen weiteren geometrischen Zweck hingeordnet. Die Gestalten sind in sich schön, nicht relativ (οὐκ . . . πρός τι . . . ἀλλά . . . καθ' αὑτά), sie sind fertige Gestalten und werden mit keinem Wort als Hilfskurven zur Lösung von Aufgaben oder zur Herstellung von gewünschten Strecken hingestellt. Sie stehen ferner nicht als zusammengehörige Hilfsmittel da, sondern als einzelne getrennte Gestalten. Die Stelle ist mit der Ansicht, daß Kreise und Geraden den Grundstock aller geometrischen Gebilde ausmachen — falls eine solche anderweitig begründet wäre — verträglich; aber sie enthält keine Handhabe, um mit den Tadelstellen aus Plutarch zusammen gegen alle Zeugnisse von § 6 jene Ansicht aufrechtzuerhalten.

Es fehlt aber auch jede Andeutung, daß es neben dem Geraden und dem Runden auch andere, aus diesen gemischten Gestalten gebe. Die Worte „ἀπὸ τούτων“ scheinen zwar in diese Richtung zu weisen, aber mit den genannten Werkzeugen ist es neben dem ganz Runden und dem ganz Geraden nur möglich, das stellenweise Runde und anderswo Gerade zu erzeugen, nicht etwa Ellipsen oder Parabeln.

Unser Zögern, in Philebus 51 C eine allgemeine geometrische Vorschrift zu erblicken, wird durch einen besonderen Umstand verstärkt. Neben das Lineal und den Zirkel oder Drehbank tritt hier der Setzwinkel, obwohl man die Lote seit Oinopides allein mit Zirkel und Lineal zu fällen und zu errichten wußte (Proclus 283 : 7 und 333 : 5). Faßt man diese Geräte aber nicht als geometrische Hilfsmittel oder als Reißzeug auf, sondern als Werkzeuge der Stoffbearbeitung, so bleibt man bei der vorgeschlagenen Deutung der Stelle und versteht viel leichter, warum der Setzwinkel hier genannt werden muß. Das geometrische Verfahren des Oinopides eignet sich nämlich nur für das Reißbrett und versagt völlig, wenn man eine Holzplatte genau rechtwinklig machen will. Aus allen diesen Gründen tragen wir Bedenken, aus der angeführten Philebusstelle eine grundsätzliche Äußerung über Zirkel und Lineal bei der Lösung von theoretischen Aufgaben herauszulesen, zumal die eigentlichen μαθήματα erst später an die Reihe kommen (52 A), und zumal die Geräte κανών und τόρνος zweimal in nächster Nähe als technische, und als technisch berechtigte Werkzeuge aufgeführt sind (56 BC und B).

Die schwachen Anklänge an Zirkel und Lineal haben sich entweder als sachfremd erwiesen, oder sie brachten diese Geräte mit der Lösung von Aufgaben nicht ersichtlich in Verbindung. Auch eine längere, hier unterdrückte Untersuchung über die Begriffe σκολιός, καμπύλος, στρογγύλος und περιφερής, vor allem bei Platon, Aristoteles und den Kommentatoren zu beiden, sowie über die Art ihrer Gegensätzlichkeit zum εὐθύ erzielte für die gegenwärtige, streng konstruktionstheoretische Frage keine greifbare Ergebnisse. Eine Möglichkeit bleibt dabei noch offen: eine Forderung oder eine Hoffnung, wenigstens theoretisch alles auf Kreise und Geraden zurückzuführen, könnte mit dem Sinn gegeben werden, in welchem alle anderen Kurven aus diesen beiden „gemischt“ sein sollen. Darüber unterrichten uns am klarsten Geminus und Proclus.

Zu den gemischten Linien zählen die Efeulinie, die Kugelspirale, die Kegelspirale, die Kegelschnitte, die Wulstschnitte (Proclus 111 : 12 und 15—19), die Ellipse noch zweimal (159 : 17—21 und 391 : 20—392 : 1), die Quadratrix, die archimedische Spirale und die Muschellinie (272 : 4—10). Daß schlechthin alle anderen ebenen Kurven als Gerade und Kreis, alle anderen Flächen als Ebene und Kugel „gemischt“ sind, bringt Proclus mittelbar, aber eindeutig zum Ausdruck (118 : 26—119 : 5). Die regelmäßigen Figuren werden hier, wenn auch gleichlaufend, so doch in klarer Trennung von den Linien eingeteilt: eben und gemischt sind Kreisabschnitt und Kreisausschnitt, räumlich und gemischt sind Kegel und Zylinder (113 : 17—19).

Der Umfang des Begriffs ist damit klar umgrenzt. Geminus selber mahnt uns, auf die verschiedenen Arten der Mischung zu achten (Proclus 117 : 22—25). Bei der σύνθεσις folgen die Bestandteile zugweise auf einander, bei der κρᾶσις sind sie wenigstens durch geeignete Schnitte wieder zum Vorschein zu bringen, bei der σύγχυσις sind die Bestandteile unwiederbringlich mit einander verschmolzen (118 : 3, 6, 20). Die einzügigen Linien (ἀσύνθετοι) können nach Geminus nur durch σύγχυσις, die Flächen nur durch κρᾶσις gemischt sein. Die gemischten Linien wären demnach durch kein geometrisches Verfahren in ihre Bestandteile aufzulösen, so daß der Gedanke fern gelegen haben muß, ihren Gebrauch durch den Gebrauch der reinen Bestandteile zu ersetzen. Eine Anspielung auf Zirkel und Lineal ist auch deshalb weniger leicht anzunehmen, weil hier die Rolle von Kreis und Gerade in der Ebene für den Raum durch Ebene und Kugel übernommen wird.

Proclus vergleicht die Arten der Mischung mit den Arten der Erzeugung von Kurven. Die Zylinderspirale ist gemischt und entsteht durch zwei ungleichartige Bewegungen (105 : 20—24). Aus zwei gleichartigen Bewegungen kann aber sehr wohl, wie Geminus mit Recht bemerke, eine einfache Linie entstehen, wie 106 : 3—6 die Gerade und 106 : 9—12 der Kreis: gleitet eine Strecke zwischen den Schenkeln eines rechten Winkels, so beschreibt der Mittelpunkt einen Kreis, alle übrigen Punkte Ellipsen. Andererseits brauchen gemischte Linien nicht erst durch eine mehrfache Bewegung zu entstehen. Die Kegelschnitte sind gemischt und entstehen als Schnitte, andere Kurven sind gemischt und beruhen auf einer Fläche als Grundlage (117 : 17—19). Die Gemischtheit und die Erzeugungsart bleiben also nach beiden Richtungen hin von einander völlig unabhängig.

Die Möglichkeit aber, alle gemischten Linien durch eine geeignete Verbindung von geradlinigen und kreisläufigen Bewegungen zu erzeugen, bedeutet in der Sprache von heute nichts mehr, als daß die Kurven Gleichungen in Polarkoordinaten besitzen — sofern man jene Bewegungen nur der Bahngestalt nach betrachtet und die gleichförmige Geschwindigkeit nicht fordert. Vom Standpunkt der Herstellbarkeit mit Zirkel und Lineal kommt es jedoch nicht darauf an, wie die benutzten Kurven in ihrer gesamten Ausdehnung als vorliegende, fertige Gestalten abgeleitet werden können. Maßgebend ist vielmehr, wie man ihre Schnittpunkte bestimmen kann, und zwar auch dann bestimmen, wenn die Kurven nicht fertig vorliegen, sondern durch gerade hinreichende Angaben im einzelnen festgelegt sind. Wenn die Schnittpunkte nicht für sich allein mit Zirkel und Lineal zu finden sind, so ist die ganze Aufgabe mit Zirkel und Lineal nicht zu lösen. Eine Forderung, alle gesuchten Punkte und Strecken allein mit diesen Hilfsmitteln zu bestimmen, ist daher mit den Worten „alle anderen Gattungen von Kurven läßt er aus diesen beiden gemischt sein" auch nach dem mathematischen Sachverhalt nicht gegeben.

Ein weiterer Grund, diese höhere Ursprünglichkeit von Kreis und Gerade nicht im konstruktionstheoretischen Sinne von Zirkel und Lineal zu verstehen, liegt darin, daß man selbst zwischen diesen beiden Kurven einen Unterschied der Ursprünglichkeit hat feststellen wollen. Von kleineren Unterschieden an Schönheit und an Vorrang in bezug auf die Bewegungsarten sehen wir ab[30]. Deutlicher ist eine Stelle bei Plutarch über die Frage, warum Platon für die regelmäßigen Körper zweierlei Dreiecke als Bausteine aufstellt und das Runde gänzlich übergeht. Als zweite Erklärung schlägt Plutarch vor: „Oder ist das Gerade seinem Wesen nach früher als das Runde?", Quaestiones Platonicae V, § 2 (vi, 130 : 14—16). Dies wird bejaht, auf verschiedene Arten begründet, und in die Worte zusammengefaßt: „Daß das Geradlinige vorangeht, und daß das Kreisförmige erst nachträglich und begleitenderweise zustandekommt, hat Platon gezeigt" (aber wo?). Bleiben Plutarchs Begründungen noch etwas unscharf, so sagt Proclus kurz und bündig: „δόξειε δ' ἂν ἀμφοτέρων οὐσῶν ἁπλῶν τῶν γραμμῶν, τῆς εὐθείας καὶ τῆς περιφεροῦς, ἁπλουστέρα μᾶλλον ἡ εὐθεῖα εἶναι" (106 : 20—22). Als Gründe gibt er an: einmal die Strukturhaftigkeit des Kreises, die mit dem innewohnenden Gegensatz „hohl-erhaben" gegeben ist, und dann den Umstand, daß der Kreis die Gerade voraussetzt, aber nicht umgekehrt (106 : 23—25). Die Kreisbewegung ist dagegen für Aristoteles (265 a 16) ursprünglicher als die gerade Bewegung. Vgl. dazu auch die Einleitung zum Almagest.

Der erwähnte Trennungsstrich zwischen Hilfszeichnung und Auflösung in einfachste Urbestandteile wird, einem Bericht des Proclus zufolge, von Menaechmus selbst gezogen (72 : 23—73 : 14). Das sind für Menaechmus gerade die zwei verschiedenen geometrischen Bedeutungen des Wortes στοιχεῖον, und bei der Erklärung der zweiten Bedeutung braucht Proclus fast dieselben Worte, wie in seiner Mitteilung über Platons Einteilung der Linien: hier ἁπλούστερον und ἀρχειοδέστερα, dort ἁπλούστατα und ἀρχοειδέστατα.

---

[30]) Darüber zum Beispiel: Aristoteles, anal. post. 75 b 20, de coelo 269 a 4, [probl. 915 a 35]; Diogenes Laertius VIII, § 19; Proclus 35 : 4; Philoponus 25, 105; 10—12.

§ 8.
Das Schweigen über Zirkel und Lineal.

In der Voraussetzung, daß eine allgemeine oder bedingte Beschränkung auf Zirkel und Lineal bestand, könnte man geneigt sein zu erwarten, daß sie bei der Aufgabenstellung in der Gestalt einer Nebenbedingung auch zum Ausdruck gekommen sei. Aus dem Fehlen dieser Nebenbedingung könnte man umgekehrt schließen wollen, das keine Beschränkung bestanden habe. Diese Neigung ist beim heutigen Mathematiker jedenfalls stärker entwickelt als bei den Griechen, weil die klassischen Aufgaben der alten Geometrie heute in den Rahmen der algebraischen Körpertheorie hineingestellt werden und von dorther ihren ganzen Sinn erhalten. Haben nun die Griechen selbst, dort, wo sie die klassischen Aufgaben in Worte fassen, die entsprechenden Nebenbedingungen wenigstens in geometrischer Gestalt mit zum Ausdruck gebracht?

Über diesen Punkt schweigt die Überlieferung. Überall dort, wo die einfache [31]) oder die verallgemeinerte [32]) delische Aufgabe, die Dreiteilung [33]) oder eine allgemeinere [34]) Teilung des Winkels als Aufgaben gestellt sind, und überall dort, wo von ihrer Lösbarkeit gesprochen wird (§ 10), fehlt jede wörtliche Bezugnahme auf Zirkel und Lineal. Es wird nur verlangt, die gesuchte Würfelkante oder den gesuchten Teilungsstrahl irgendwie herbeizuschaffen. Das Gleiche gilt von der Kreisquadratur. Pappus (250 : 33), Proclus (422 : 24—423 : 2), Plutarch de Exilio 607 EF (iii) und Philoponus (**24**, 476 : 26—477 : 5) schreiben ohne Zusatz τετραγωνισμός, τετραγωνίσαι, τετραγωνίζειν; Nicephorus Chumnus sehr viel später, und bezeichnenderweise in der Mehrzahl, aber auch ohne Zusatz τετραγωνισμοί (**26**, 433); Pappus (258 : 15—16, 292 : 1—2), Ammonius (**3**, 75 : 10—19) und Philoponus (**23**, 120 : 24—121 : 10) ohne Zusatz εὑρεῖν; Simplicius (**37**, 192 : 12—30) und Philoponus (wie vorhin) ohne Zusatz συνίστασθαι; Porphyrius (**29**, 120 : 10—18) ohne Zusatz περιλαβεῖν; und Simplicius (**35**, 26 : 2—3 = **38**, 54 : 13) ohne Zusatz θέσθαι. Andere Quadraturen von Teilen des Kreises und von Ellipsenabschnitten wurden zusammen mit der Quadratur des vollen Kreises

[31]) Eutocius 54 : 26—106 : 24; Pappus 32 : 2—48 : 18, 56 : 18—68 : 16, 164 : 1—176 : 8, 242 : 13—250 : 32, 1070 : 13—1072 : 29; Philoponus **25**, 102 : 14—105 : 4; Plutarch, Vita Marcelli § 14 (ii), de Ei apud Delphos 386 E (iii), de Genio Socratis 579 C (iii), Quaestiones convivales 718 EF (iv); Proclus 213 : 2—11; Pseudoplaton, Sisyphus 388 E; Theon von Smyrna **40**, 2 : 3—12; Vitruvius **42**, 217 : 1—6.

[32]) Pappus 58 : 18—19, 64 : 19—21, 166 : 13, 248 : 1 und 1070 : 14—16.

[33]) Archimedes II, 518 (eine ἀπαγωγή); Pappus 246 : 2, 272 : 13, 274 : 18, 280 : 20, 284 : 3; Proclus 272 : 3—10.

[34]) Pappus 284 : 23—288 : 3; Proclus 271 : 21—23.

schon von Archimedes erwähnt, aber Archimedes sagt wie die Späteren ohne Zusatz τετραγωνίζειν und spricht schlechthin von der Auffindung eines inhaltsgleichen, geradlinig begrenzten Gebietes (II, 262:13—264:4).

Drei Schriftsteller lassen die Aufgabe der Kreisquadratur aus der Aufgabe der Vieleckquadratur entstehen. Es sind Proclus (422:24—423:2), Ammonius (3, 75:10—19) und Philoponus (23, 120:24—121:10), aber keiner von ihnen fühlt sich verpflichtet hervorzuheben, daß die Quadratur des Vielecks mit Zirkel und Lineal ausführbar ist, und daß die Quadratur des Kreises deshalb auf die gleiche Art gefunden oder gesucht werden müsse. Von Gedanken an die Art der Herstellung sind Ammonius und Philoponus hier so weit entfernt, daß sie meinen, Archimedes habe eine gute Annäherung gefunden, das Genaue aber noch niemand. An der bereits erwähnten Sisyphusstelle (§ 6) wurde deutlich nach der gemessenen Größe der Würfelkante gefragt, weniger deutlich nach deren algebraischer Eigenart und in keiner ersichtlichen Weise nach den Bedingungen ihrer geometrischen Herstellung.

Die Quadratur wird in den aristotelischen Schriften neunmal erwähnt. Sie ist einmal ein Beispiel für die bloß mögliche Erkenntnis (cat. 7 b 27—33) und fünfmal ein solches für wissenschaftstheoretische Grundsätze (anal. pr. 69 a 29—34, anal. post. 75 b 37—76 a 3, soph. elench. 171 b 12—18 und 172 a 1—9, phys. 185 a 14—17). Zweimal bedeutet τετραγωνισμός nur die Quadratur des Rechtecks (de anima 412 a 11—20, met. 996 b 18—22) und einmal wird die Kreisquadratur als ein Gegenstand hingestellt, über welchen man nicht berät (Eth. Eud. 1226 a 22—30). An keiner von diesen neun Stellen hätte indessen eine bestehende Beschränkung auf Zirkel und Lineal unbedingt mit ausgesprochen werden müssen. Andererseits darf es nicht wundernehmen, wenn die mathematischen Beispiele des Corpus Aristotelicum tatsächlich innerhalb der Grenze von Zirkel und Lineal bleiben. Aristoteles und seine Ausarbeiter dürfen vielmehr mit Rücksicht auf den Zweck dieser Beispiele und auf die Vorkenntnisse der außerakademischen Hörer nur die allereinfachsten Beispiele aussuchen, und konnten nicht so oft wie Platon in mathematische Tiefschichten vordringen. Sie rechnen mit Lesern, für welche die Auffindung des Kreismittelpunktes bereits eine Leistung ist und den Fachmann erfordert (Eth. Nicom. 1109 a 24—26; und in der Wortprägung der Magna Moralia 1186 b 36—38).

Sollte dennoch zur Zeit des Aristoteles eine Vorschrift gegolten haben, Zirkel und Lineal ausschließlich oder weitestgehend zu verwenden, so müßte im Begriff der Möglichkeit einer Lösung die entsprechende Entwicklung bemerkbar werden, und es bliebe immerhin auffällig, wenn dann Aristoteles diesen Tatbestand nirgends metaphysisch oder erkenntnistheoretisch ausgewertet haben soll. Ein solcher Fall von relativer Unmöglichkeit würde, um nur ein Beispiel zu geben, die Ausführungen der Metaphysik 1019 b 23—35 und 1046 a 7—9 in wertvoller Weise ergänzen.

Aber auch an den anderen bisher genannten Stellen wird nicht ganz wider Erwarten über Zirkel und Lineal geschwiegen. Denn solange die Bezugnahme auf diese Hilfsmittel als allgemeine Regel in Kraft bleibt, und solange man hofft, mit diesen Hilfsmitteln auszukommen, solange darf man es ebendeshalb unterlassen, die Nebenbedingung bei jeder neuen Aufgabe von neuem zu stellen. Die mathematischen, nicht bloß schöngeistigen Wortfassungen der Aufgaben stammen ferner aus einer Zeit, wo man die Unzulänglichkeit von Zirkel und Lineal bereits klar geahnt hat (§ 10) und ebendeshalb nicht gebieterisch fordern mochte, daß die Lösung allein mit diesen Hilfsmitteln geleistet werde. Mit anderen Worten, das Fehlen einer ausdrücklichen Nebenbedingung läßt sich zu verschiedenen Zeiten aus verschiedenen Gründen anders erklären, als durch das wirkliche Fehlen einer besonderen Rolle von Zirkel und Lineal, und bietet daher noch keine klare Handhabe um zu beweisen, daß eine grundsätzliche Beschränkung auf diese Hilfsmittel niemals und in keiner Gestalt bestanden habe.

In den Elementen des Euklid liegt aber die erste tatsächliche und für uns greifbare Beschränkung auf Zirkel und Lineal vor. Doch kann diese Beschränkung bei Euklid selber nicht grundsätzlich für die gesamte Geometrie gegolten haben. Euklid ist, nach dem Zeugnis des Pappus, in anderen Werken über diese Grenze hinausgegangen: bei den „Örtern zu Flächen“ (Pappus 636 : 23), bei den „Örtern zu drei und vier Geraden“ (676 : 7) und in einem vierteiligen Werk über die Kegelschnitte selbst (672 : 18). Über die Beweggründe, warum er sich in den Data und vor allem in den Elementen tatsächlich auf Zirkel und Lineal beschränkt, hat uns Euklid keine Andeutungen hinterlassen. Wir sind also auf indirekte Schlüsse über seine mutmaßlichen Absichten angewiesen.

Hätte Proclus mit seinem Urteil recht, daß die Elemente ganz auf das Ziel der Lehre von den fünf platonischen Körpern aufgebaut sind (68 : 23 und 71 : 23), so wäre damit eine ausreichende Erklärung für das Gefüge der Elemente gegeben, und man brauchte eine solche nicht in der bewußten Beschränkung auf Zirkel und Lineal zu suchen. Leider sprechen viele Tatsachen gegen die Meinung des Proclus. Die zahlentheoretischen Bücher VII—IX stellen eine Reihe von Hilfssätzen bereit, die ausschließlich zu einer Lehre von den kubischen Wurzelgrößen dienen können. Buch X enthält lange und besonders schwierige Abschnitte, die in Buch XIII nicht herangezogen werden, und die Buch X zu dem umfangreichsten aller dreizehn Bücher der Elemente haben anschwellen lassen. Diese Meinung des Neuplatonikers Proclus kann uns also als bündiger Beweis nicht dienen.

Eine zweite Möglichkeit der Erklärung ist die, daß Euklid zwar bewußt alle höheren Kurven als Kreis und Gerade aus den Elementen ferngehalten hat, aber nur aus unterrichtlichen Gründen. Diese Ansicht wird in § 9 wenigstens als Teilerklärung eine gewisse Unterstützung finden. Aber es ist noch ein weiter Schritt von der Erkenntnis, daß Lösungen mit Zirkel und Lineal in der Regel leichter sind als andere, die erst durch eine eigene Theorie gestützt werden müssen, bis zu der bewußten wissenschaftlichen Fragestellung: Welche Aufgaben kann man mit Zirkel und Lineal lösen, und bei welchen kann man beweisen, daß das unmöglich ist? Hätte Euklid alles restlos ausbreiten wollen, was man damals mit Zirkel und Lineal leisten konnte, so hätte er die Möndchen des Hippokrates gewiß nicht ausgelassen. Aber für Euklid sind sicher ganz andere Beweggründe für die Stoffwahl der Elemente mit maßgebend. Die Lehre von den Einschiebungen, die Lehre von den kubischen Wurzelgrößen bildeten zu dieser Zeit zweifellos kein geordnetes Ganze, während Euklid stets nur in sich abgerundete Theorien zur Darstellung bringt. Wie will man die unverkennbare affine Richtung in der Schreibweise der planimetrischen Bücher, wie will man die Lehre vom Kreisinhalt mit der Absicht einer Beschränkung auf solche Aufgaben vereinbaren, die sich mit Zirkel und Lineal lösen lassen?

Das Zeugnis des Stillschweigens fällt erst dann in die Wagschale, wenn die Bezugnahme auf Zirkel und Lineal wider berechtigtes Erwarten ausbleibt. Das geschieht mehrmals in einer Weise, die auf Teile unseres Gegenstandes etwas Licht wirft.

Pappus erzählt z. B. von den „früheren“, den „alten“ Geometern, sie hätten die delische Aufgabe und die Dreiteilung des Winkels mit Zirkel und Lineal zu leisten versucht[35]) und seien dabei in Verlegenheit geraten, da ihnen die Lösung nicht glückte. Als Erklärung für diese Versuche gibt Pappus jedoch kein Verbot und keine Beschränkung an, auch keine Verkennung der wahren Rolle von Zirkel und Lineal, sondern einzig die Unvertrautheit jener Geometer mit den wirklich notwendigen Hilfsmitteln, mit den Kegelschnitten, sowie die Schwierigkeit, die Kegelschnitte in der Ebene zu zeichnen (44 : 18—19, 54 : 23—27, 270 : 1—3, 272 : 8—14 und 1070 : 8—10). Pappus selber weiß, daß die Dreiteilung des Winkels und die Würfelverdoppelung wesentlich kubische Aufgaben sind (§ 10), aber für die Versuche der älteren Geometer führt er nicht einmal den naheliegenden Grund an,

[35]) 44 : 18—19 und 272 : 8—11. Zu dieser Bedeutung von τόποι ἐπίπεδοι siehe die Erklärungen, die Pappus selbst gibt, und die wir am Anfang von § 9 zusammenstellen.

daß diese von der Unmöglichkeit einer Lösung mit Zirkel und Lineal noch keine Ahnung hatten. Mit dem Bericht des Pappus ist es durchaus vereinbar, daß die älteren Geometer nur deshalb mit Zirkel und Lineal an die Aufgabe herantraten, weil sie nur mit diesen Mitteln vertraut waren. Dann waren sie aber noch weniger imstande, die Leistungsfähigkeit von Zirkel und Lineal mit der Leistungsfähigkeit von höheren Hilfsmitteln bewußt zu vergleichen und eine bewußte Auswahl der Methoden zu treffen, Pappus' Schweigen über diesen Punkt ist besonders auffallend, denn es stand ihm ein reichhaltiges Schrifttum zur Verfügung. Enthielten diese zahlreichen Werke die Spuren einer früheren Stellungnahme zu Zirkel und Lineal, die nachher als undurchführbar erkannt und aufgegeben worden wäre, so hätte Pappus die selbstgewählte Frage nach den Ursachen des geschichtlichen Tatbestandes im Lichte jener Spuren erklären müssen. Statt dessen läßt er aus den Erfahrungen, welche die Alten bei ihren Versuchen machten, gewisse Einteilungen der Aufgaben (§ 9) und die Einsicht in gewisse geometrische Unmöglichkeiten (§ 10) entstanden sein. Die Erklärungen, die er hier vorlegt, können auch eine persönliche Vermutung sein; aber daß Pappus auf persönliche Vermutungen angewiesen wäre, würde schon für sich auffallen und das gleiche Zeugnis abgeben.

In mehr als einem Zusammenhang hatte Proclus Gelegenheit, wenn nicht die Pflicht, Kenntnisse über eine Einwirkung Platons auf die Wahl der geometrischen Verfahren zu verwerten und niederzulegen. Zwei Berichte über Oinopides wurden bereits erwähnt, wo die begriffliche Lösung zweier (übrigens sehr einfacher) Aufgaben endlich geleistet wurde, und zwar mit Zirkel und Lineal (283 : 7—10, 333 : 5—9). Proclus preist sie als eine Entdeckung, aber er preist nicht den Umstand, daß diese Entdeckung gerade mit Zirkel und Lineal gelungen war, und er bemerkt nicht, daß damit ein späterer Wunsch von Platon zum ersten Mal in Erfüllung gegangen sei. Eine ähnliche Gelegenheit hätte Proclus in anderen Werken gehabt: im Timaeuskommentar (32, II, 33 : 29—34 : 4) und im Kommentar zum Parmenides (31, 877 : 15 —883 : 26) und an beiden Stellen schreibt er über Platons Ansichten zu unserem Gegenstand kein Wort. Bei der großen Ausführlichkeit dieser zwei Auslegungen von zwei platonischen Schriften fällt es unwillkürlich auf, daß Proclus über eine besondere Stellungnahme Platons zu Zirkel und Lineal keine Überlieferung mehr besessen haben sollte.

Es kommen hinzu die Stellen in der Erläuterungsschrift zu Euklid, wo die Wahl des Stoffes und des Verfahrens ausdrücklich besprochen wird. Obwohl Proclus selber Neuplatoniker war, obwohl er Euklids Zugehörigkeit zur philosophischen Schule Platons eigens hervorhebt (68 : 20—21), obwohl er die Ansichten Platons allein in dieser Schrift öfter als dreißigmal, und oft in weniger grundlegenden Fragen mitteilt, bringt er Platon nirgends mit einer konstruktionstheoretischen Vorschrift in Verbindung — sei es, weil die Quellen bereits versiegt waren, sei es, weil dazu die geschichtliche Unterlage fehlte. So oft Proclus die Meidung von Aufgaben erklären will, die mit Zirkel und Lineal nicht gelöst werden können, greift er nicht zur absichtlichen Meidung anderer geometrischen Mittel, sondern nur zu den Bedürfnissen eines planmäßig abgestuften Unterrichtes (§ 9).

Selbst dort, wo der Titel der Elemente besprochen wird (72:3), deutet Proclus mit keinem Worte an, daß sie die erlaubten zeichnerischen Verfahren vollständig aufzählen sollten; und mit keinem Worte deutet er umgekehrt an, daß die Grenzen der Leistungsfähigkeit von Zirkel und Lineal in den Elementen überall erreicht oder eindeutig abgesteckt werden müßten. Im Gegenteil, die Elemente liefern Beweismittel für viele, also doch nicht schlechthin für alle höheren συμπτώματα (72:12). Proclus betont ferner, in Anlehnung an den Platonschüler Menaechmus, daß die Eigenschaft, Hilfskonstruktion zu sein, nicht die einzige geometrische Bedeutung des Wortes στοιχεῖον darstellt (§ 7).

Wir lernten in § 7 einige Stellen kennen, wo man dem Kreis und der Geraden einen verschiedenen Grad von Ursprünglichkeit zugeschrieben hat. Wäre nun eine Beschränkung auf Zirkel und Lineal vorausgegangen, so würde man jetzt erwarten, daß die Forderung nunmehr verschärft werde, und daß die Geometer wenigstens theoretisch mit der „ἁπλουστέρα“ von jenen beiden Linien auskommen müßten. Auch hierzu scheint es zwei Tadelstellen zu geben. Proclus rügt eine Nebenlösung des Apollonius für die Aufgabe in Euklid I, Satz 11, weil sie verwickelter sei als die euklidische und „der Zeichnung der Kreise bedürfe“, 282:21—22. Allein, die Zeichnung der Kreise ist hier wirklich notwendig, wenn auch versteckterweise, und der Fehler des Apollonius besteht nur darin, daß er sich nicht wie Euklid auf Buch I, Satz 1 beruft, sondern das gleichseitige Dreieck erneut konstruiert. Sein Fehler ist also nur ein Verstoß gegen den logischen Aufbau der Elemente, und kein Verstoß gegen eine konstruktionstheoretische Vorschrift. Ein ähnlicher Tadel, aber auch nur ein ähnlicher Fehler des Apollonius begegnet uns bei Proclus noch ein zweites Mal (335:16—336:8).

In der tatsächlichen Beschränkung der Elemente auf Zirkel und Lineal konnten wir aus mehreren Gründen noch keine grundsätzliche Stellungnahme erblicken. Eine griechisch überlieferte Ansicht über das Endziel der Elemente nennt einen bestimmten Lehrstoff, der die Beschränkung auf Quadratwurzelgrößen schon in sich enthält und die bewußte Absicht nicht voraussetzt, diese Art von Größe ausschließlich in Betracht zu ziehen. Trugen wir nun Bedenken, wenigstens gegen die Vollständigkeit dieser Erklärung des Proclus, so werden wir in § 9 erfahren, daß Euklids Wahl des Lehrstoffes und der angewendeten Verfahren auch in anderen Zusammenhängen behandelt wird, und daß sie auch dort in ganz anderer Weise begründet wird, als mit Vorschriften über den Gebrauch von Zirkel und Lineal.

Aber die zeitliche Zerstreuung unserer Gewährsmänner über die Jahrhunderte, die vielen Zufälligkeiten in bezug auf den Quellenreichtum und die Zweckverbundenheit ihrer Schriften, die wachsende Einsicht darein, daß die betreffenden Nebenbedingungen in Wirklichkeit unerfüllbar sind, schwächen die Beweiskraft des Stillschweigens über Zirkel und Lineal in einem gewissen Grade ab. Die Meinung, daß man früher mit Zirkel und Lineal Vorschriften und Hoffnungen verband, die nachher aufgegeben werden mußten, wird durch dieses Stillschweigen allein nicht unabweisbar widerlegt, wohl aber mit neuen Beweispflichten belastet.

Teil III: Die wirkliche Rolle von Zirkel und Lineal bei den griechischen Mathematikern.

War Platon bereit, in der höheren Geometrie und bei kubischen Aufgaben die kubischen Hilfsmittel zu gestatten, und wurde die Lehre von den Kegelschnitten von einem seiner unmittelbaren Schüler entdeckt und zur Lösung von Aufgaben verwendet, so kann von den Zeiten an, wo Euklid und Aristaeus und Apollonius diese Lehre zu hoher Blüte bringen, von einer allgemeinen Beschränkung auf Zirkel und Lineal nicht länger die Rede sein. Eine bedingte Beschränkung — die Pflicht, so oft es möglich ist mit Zirkel und Lineal auszukommen, aber zugleich die Erlaubnis, sonst mit höheren Hilfsmitteln zu arbeiten — wird von Pappus klar ausgesprochen. Diese Regel des Pappus wird zwar in der Geschichte der Mathematik gelegentlich erwähnt (z. B. **61**, II, 385), aber ohne auf die Begründungen einzugehen, welche die Griechen selbst gegeben haben, und vor allem ohne die zugehörigen, fast algebraischen Tatsachenkenntnisse der Griechen planmäßig zu untersuchen. Die wirkliche Stellung von Zirkel und Lineal bei den Griechen ist aber mit der Pappusschen Regel keineswegs erschöpft und soll in diesem letzten Teil der vorliegenden Arbeit in einigen Punkten etwas genauer bestimmt werden.

Die Ergebnisse sind durch die Quellenfunde bestimmt und lassen sich nicht in einer einzigen logischen Reihenfolge darbieten. Wir reihen sie auf als Antworten auf vier Gruppen von besonderen Fragen:

1. Wie haben die Griechen ihre bedingte Beschränkung auf Zirkel und Lineal selber begründet? Wie streng haben sie diese Regel beobachtet?

2. Die Regel des Pappus rechnet offen mit geometrischen Unmöglichkeiten. Ahnten die Griechen, daß diese Unmöglichkeit im Wesen der Sache liegt? Haben die das Bedürfnis nach einem förmlichen Unmöglichkeitsbeweis empfunden?

3. Die Lehre von der Herstellbarkeit mit Zirkel und Lineal wird heute auf körperalgebraische Grundlage gestellt. Besaßen die Griechen beginnende Einsichten in diese Grundlage?

4. Haben sie für die zweierlei Kurven, die man mit Zirkel und Lineal zeichnen kann, nämlich Kreis und Gerade, ein rein geometrisches und wirklich gemeinsames Merkmal gesucht und gefunden?

§ 9.

Der Standpunkt weitestgehender Verwendung von Zirkel und Lineal.

Soweit wir wissen ist die Schrift des Apollonius über die „ebenen Örter“ das erste Werk, in welchem Kreis und Gerade nach dem sichtbaren Wunsch des Verfassers für die Auswahl des Stoffes maßgebend gewesen sind. Der Titel περὶ τόπων ἐπιπέδων zeigt, daß die Namen, die Pappus bei seiner Einteilung der Örter und der Aufgaben in je drei Stufen verwendet, zum Teil viel älter sind als Pappus, der ja dort selber von den παλαιοί spricht. Aber Pappus ist der erste, der diese drei Stufen in einem uns erhaltenen Werke aufzählt. Seine Einteilungen bilden die Grundlage für seine „Regel“ und müssen zu deren Verständnis vorausgeschickt werden.

Die wichtigste Einteilung erfolgt nach Gesichtspunkten, die für uns auf dem Begriff des relativen Körpergrades beruhen. Pappus nimmt sie zweimal ganz und ein drittes Mal teilweise vor. Die „ebenen“ Aufgaben (ἐπίπεδα) sind die mit Zirkel und Lineal lösbaren (δυνάμενα λύεσθαι, 54:10 und 270:6, δυνάμενα δειχθῆναι, 672:9). „Räumlich“ (στερεά) sind die mit einem oder mehreren Kegelschnitten gelösten (λύεται, 54:12 und 270:9, δείκνυται, 672:10). „Linear“ oder „kurvenhaft“ (γραμμικά) sind dann alle übrigen Aufgaben (54:17 und 270:14). Unter δυνάμενα ist die gegenständliche Möglichkeit gemeint, nicht die Möglichkeit beim jeweiligen Stande der Wissenschaft (§ 10). Proclus erklärt diese drei Namen: die ebenen Aufgaben benutzen Linien, die ihren Ursprung in der Ebene haben; die räumlichen benutzen die Oberflächen räumlicher Figuren, die linienhaften benutzen Kurven, deren Ursprung verwickelter und gezwungener sei (54:10—19 und 270:6—16). Diese Einteilung der Aufgaben setzt sich noch bis Euler fort. Bei ihm gibt es „problemata plana“ (zweiten Grades, oder vierten aber quadratisch lösbar) und „problemata solida“ (dritten oder vierten Grades und nicht quadratisch lösbar; siehe etwa 99, § 17).

An einer anderen Stelle gibt Pappus eine gleichlaufende Einteilung der Örter (672 : 7—8). Bemerkenswert ist dabei die Ausdehnung auf Örter noch höherer Stufe, und der Vergleich zwischen der Darstellbarkeit der höheren Potenzen durch geometrische Gebilde und durch zusammengesetzte Verhältnisse (678 : 26—680 : 21). Anklänge an die niederen Stufen der Örter kehren bei Proclus wieder. Die Hyperbel ist auch bei ihm ein „räumlicher Ort", doch ist hier zunächst nur von den Ortssätzen, nicht von den Örtern selbst die Rede (394 : 20—395 : 12). Die widersprechende Einreihung der archimedischen Spirale unter die „ebenen" Lösungsmittel kommt an einer Pappusstelle vor, die auch sonst verderbt und lückenhaft ist (302 : 16—18 und hierüber Heiberg 62 und Tannery 77).

Die bisher geschilderten Einteilungen bezogen sich ausschließlich auf die Geometrie der Ebene. Eine weitere Einteilung bei Pappus unterscheidet die Örter nach ihrer „Relativdimension": hat ein n-dimensionales Gebilde (Punkt, Linie, Fläche oder Raumstück) einen N-dimensionalen Ort, so heißt dieser für $N = n$ ἐφεκτικός, für $N = n+1$ διεξοδικός und für $N = n+2$ ἀναστροφικός (660 : 18—662 : 4). Auch hier gibt es eine entsprechende Einteilung der Aufgaben, und zwar nicht erst bei Pappus sondern schon bei Amphinomus (nach Proclus 220 : 9—12) und später bei Marinus zu den Data (13, VI, 234 : 13—16 und 242 : 13—14): die τεταγμένα haben genau eine Lösung, die μέσα haben mehr als eine, aber nur endlich viele, während die ἄτακτα unendlich viele Lösungen besitzen.

Auf Grund dieser Einteilungen der Aufgaben und der Örter macht Pappus eine unmittelbare und grundsätzliche Äußerung über den Gebrauch von Zirkel und Lineal:

Δοκεῖ δέ πως ἁμάρτημα τὸ τοιοῦτον οὐ μικρὸν εἶναι τοῖς γεωμέτραις, ὅταν ἐπίπεδον πρόβλημα διὰ τῶν κωνικῶν ἢ τῶν γραμμικῶν ὑπό τινος εὑρίσκηται, καὶ τὸ σύνολον ὅταν ἐξ ἀνοικείου λύηται γένους.

Es scheint bei den Geometern als kein geringer Fehler zu gelten, wenn jemand eine ebene Aufgabe durch die Kegelschnitte oder die linearen Örter löst, und überhaupt wenn die Lösung nicht aus der natürlichen „Methodenschicht" entnommmen wird (270 : 28—31).

Mit diesen Worten ist die bedingte Beschränkung auf Zirkel und Lineal klar ausgesprochen. Die Geometer stehen hier auf dem Standpunkt weitestgehender Verwendung von Zirkel und Lineal. Warum haben sie diesen Standpunkt gewählt?

Die wörtlich überlieferten Gründe, welche die Griechen selber angegeben haben, sind entweder lehrkundlicher oder wissenschaftstheoretischer Art. Das ist in sich nichts Überraschendes, da die Konstruktionen mit Zirkel und Lineal eine bequeme und sachliche Grenze der Elementargeometrie bilden. Sie beruhen nicht auf immer neuen, immer schwierigen Eigenschaften des Kreises, sondern auf den wenigen Sätzen, die den Kreis mit den quadratischen Gleichungen verknüpfen. Ihre Verkettung kann eine große Entdeckergabe fordern — man denke an Archytas' Lösung der delischen Aufgabe oder an Apollonius' Lösung der hippokratischen Einschiebung — aber ihr schrittweises Verständnis ist durch die geduldige Anwendung immer wieder derselben Anfangsgründe zu erschwingen.

Proclus hält sich zunächst bei den eigenen Darlegungen an diese Grenze. Er nennt die Gerade und den Kreis (allerdings nicht in einem vorwiegend unterrichtlichen Sinn) „einfache" Linien, von denen die Laien (οἱ πολλοί) klare, nicht erst angelernte (ἀδιδάκτους) Vorstellungen besitzen, während die höheren gemischten Linien in die Fachwissenschaft gehören (τεχνικωτέρας, 118 : 25—119 : 2). Ähnlich verhalten sich auch die Flächen: von den elementartigsten (στοιχειωδέστατα), der Ebene und der Kugel, haben wir die Begriffe von selbst, während die bunte Mannigfaltigkeit der gemischten Flächen erst durch die wissenschaftliche Forschung zutage tritt (119 : 2—6). Die unterrichtliche Besorgtheit des Proclus kommt bei der Winkelteilung klar zum Ausdruck: die allgemeine Winkelteilung soll übergangen werden, weil die benötigten Kurven für Anfänger (ἐπεισαγόμενοι) zu schwer zu betrachten sind (272 : 11—13).

Aber auch für Euklids Methodenwahl findet Proclus keine anderen Gründe. Neben den reinen Winkeln und Figuren behandle Euklid auch die gemischten, bei den Linien nur die reinen, denn „bei der Darlegung einfacher Dinge sind die einfachen Gattungen heranzuziehen" (113 : 21—22; diese Behauptung hat freilich auch ihre metaphysischen Hintergründe). Euklid selbst soll die Dreiteilung des Winkels bewußt aus den Elementen ausgeschlossen haben — aber weil er auf die gemischten Linien einfach nicht weiter einging (μὴ περιεργαζόμενος) und weil die gemischten Kurvenarten nicht nur programmfremd, sondern auch „schwer zu entwickeln und aufzuzählen" sind (272 : 22—23).

Für die Wahl der Methoden gibt auch Pappus des öfteren nur didaktische Beweggründe an. Eine Lösung der Aufgabe vom „bestimmten Schnitt" mit Hilfe der Halbkreise ist ihm „einführungsgemäßer" (εἰσαγωγικώτερον) als eine andere ἐπὶ ψιλῶν τῶν εὐθειῶν (644 : 5—7). An einer Parallelstelle zur „Regel des Pappus", wo die älteren Geometer die ebenen Örter, den Kreis und die Gerade ins Auge fassen, geschieht dies nicht grundsätzlich in allen Teilen der Geometrie, sondern nur bei der Abfassung von Elementen (ἐστοιχείωσαν, 662 : 20). Waren die Lernenden mit den Elementen von Euklid fertig, so sollten sie an zweiter Stelle die τόποι ἀναλυόμενοι durcharbeiten (634 : 4

—5), und auch hier standen die quadratisch lösbaren Stücke voran (672:5—7). Selbst innerhalb der niedrigsten Aufgabenstufe wurde eine weitere Auswahl getroffen (τῶν ἐπιπέδων ἀποκληρώσαντες, 670:14 —15). Pappus nimmt eine ganz besondere Rücksicht auf die Schwierigkeiten, die ein gewissenhafter Leser empfinden muß (298:4—5).

In § 6 lernten wir zwei Stellen bei Plutarch kennen, wo Platon über den Schwierigkeitsgrad der delischen Aufgabe eine Bemerkung gemacht haben soll. Reimer geht weiter und behauptet, ohne Belege zu bringen, daß Zirkel und Lineal bei Platon geradezu als Grenze zwischen der elementaren und der höheren Mathematik dienten: „Huic viro sagacissimo in universum de finibus, quibus geometria, quae adhuc tantum exculta erat elementaris, ab illa sublimiori, ut postea appellata est, esset discernenda; ita quidem, ut prior illa tractandis solis figuris rectilineis circuloque circumscriberetur, posterior vero ad ceteras lineas curvas adhuc inveniendas esset comparanda, iam satis cognitum et constitutum fuisse, aegre dubitari potest" (71, 36).

Neben die unterrichtlichen treten die wissenschaftstheoretischen Beweggründe. Eine gewisse Abstufung der Geometrie ist nicht nur mit Rücksicht auf die Lernenden, sondern auch mit Rücksicht auf ein wohlgeordnetes Lehrgebäude zu fordern. Es ist ein allgemein angenommener Grundsatz, bei Aristoteles (met. 1078a 36—b 2) wie bei Proclus (26:13—24), daß die Schönheit der mathematischen Wissenschaft in der Ordnung (τάξις) in der Übereinstimmung (aller Folgerungen unter einander, συμμετρία) und in der unwandelbaren Bestimmtheit der Begriffe (τὸ ὡρισμένον) besteht, und das in einem Sinn, den Proclus sehr eingehend erklärt (26:24—27:10). Auch diese Wissenschaft darf also die Tatsachen nicht wahllos anhäufen, denn — wie ein Scholion über die höheren Wurzelgrößen sagt — „ἐπιστήμης δὲ τὰ αἴτια καὶ ἀρχηγικὰ καὶ ἁπλᾶ ἐπισκέπτεσθαι, οὐ τὰ καθ' ἕκαστον καὶ ἄπειρα" (13, V, 414:10 —415:2). Die gleiche Abneigung gegen das Grenzenlose klingt bei Proclus mit, wenn er einige gemischte Linien nennt und von den übrigen sagt: „Ihrer gibt es eine unbegrenzte Menge, denn unbegrenzt ist die Menge der räumlichen Figuren, und vielartige (πολυειδεῖς) Schnittkurven werden mit ihnen aufgestellt" (112:8—11). Noch deutlicher tritt diese Scheu zutage, und in noch deutlicherem Zusammenhang mit der Abstufung der Geometrie, wenn Pappus die Zusätze der neueren Elementschreiber tadelt: „als ob es derer nicht eine unendliche Menge gäbe, wollte man alles hinzusetzen, was in jene Schicht gehört" (662:21—23). Wohl spricht Euklid von einer unendlichen Folge von mittelwertartigen Wurzelgrößen (X, Satz 115), aber er schichtet sie sehr sogfältig auf und leitet jede einzelne in ganz bestimmter Weise aus den vorhergehenden ab.

Diese unterrichtlichen und darstellungstechnischen Gründe für die Beobachtung der Regel des Pappus sind die einzigen, die uns aus dem Altertum selbst überliefert sind. Ob sie überhaupt die einzigen waren, ist schwer zu entscheiden. Eine zweite Möglichkeit, die Zielsetzung jener Regel zu ergründen, würde mit der Untersuchung der gebotenen Beispiele gegeben sein, sowie mit der Abschätzung der Strenge, mit welcher die Griechen ihre Regel beobachtet haben.

Die zwei Beispiele, die Pappus selbst zu seiner Regel bietet (270 : 31—272 : 3), leiden an Unklarheiten der Bezugnahme und an Unstimmigkeiten, die von Hultsch (20, 273, Anm. 5), von Heiberg (62) und von Tannery (77) eingehend erörtert worden sind und auf die Beweggründe für die Regel kein Licht fallen lassen. An mittelbaren Beispielen fehlt es in den Collectiones nicht. Wir haben die Zurückführung der hippokratischen Einschiebung auf Zirkel und Lineal bereits erwähnt (Pappus 670 : 16—22 und § 5). Eine andere Neusis, zu zwei Geraden, ist wenigstens dann mit Zirkel und Lineal lösbar, wenn der Zielpunkt auf einer Winkelhalbierenden liegt. Pappus führt die Konstruktion zwar nur in dem weiteren Sonderfall durch, daß die Leitgeraden senkrecht auf einander stehen (782 : 6—784 : 8), aber für den Fall eines anderen Winkels stellt er anderswo den entscheidenden Hilfssatz bereit (778 : 6—780 : 6). Von ungenannten Vorgängern des Pappus stammt eine Dreiteilung des Winkels mit Hilfe eines Kreises und einer Hyperbel; wie der Hilfssatz verrät und auch wörtlich gesagt wird, sollte diese Lösung eine gewisse Einschiebung ersetzen (272 : 12—274 : 2). Die kegelschnittliche Lösung der Neusis auf Seite 272 : 2—3 hat Pappus entweder selbst gefunden oder aus ungenannten Quellen hinzugesetzt (κατέταξα, 298 : 4).

Über den Zweck der ersten von den drei Aufgabenstufen hat Zeuthen eine besondere Ansicht vertreten: die Grundkonstruktionen mit Zirkel und Lineal, die in Euklids ersten drei Forderungen niedergelegt sind, hätten das Vorhandensein einer Mindestzahl von Urgebilden sichern sollen, die weitere Verwendung dieser Hilfsmittel hätte dann den übrigen Gebilden als Existenzbeweis dienen müssen. Zeuthen stellte diese Behauptung 1892 auf (87, 105—113) und wiederholte sie 1913: „Dans le nouveau système on a attribué aux constructions exécutées conformément aux postulats à l'aide de la droite et du cercle un rôle tout particulier: celui de servir de démonstrations d'existence des figures construites" (93, 470). In Verbindung mit einer Beschränkung auf Zirkel und Lineal würde diese Ansicht dahin führen, daß quadratisch Konstruierbares allein existiere oder mindestens eine besondere Art von Existenzsicherung genießt. Wir gehen auf diesen Punkt hier nicht näher ein und wollen nur kurz andeuten, warum man diese Ansicht von Zeuthen nicht schlechthin auf alle Konstruktionen ausdehnen darf. Es gibt nämlich eine Anzahl Zeugnisse dafür, daß in den Augen der griechischen Geometer die Existenz der geometrischen Gebilde nicht erst durch ihre Konstruktion gewährleistet war.

1. Platon läßt die Figuren von den Geometern „nicht machen, sondern aufdecken“: „οὐ γὰρ ποιοῦσι τὰ διαγράμματα . . . ἀλλὰ τὰ ὄντα ἀνευρίσκουσιν (Euthydemus 290 C).

2. Die Existenz des Kreisumfanges (genauer: die Existenz eines Kreises von gegebenem Umfang) ist für Aristoteles dadurch gesichert, daß es einen größeren und einen kleineren, also auch einen gleichen gibt (phys. 248 a 24—25).

3. Im Kommentar zum zehnten Buche der Elemente behauptet Pappus, daß wir zwischen je zwei ungleiche Strecken jede beliebige Anzahl von geometrischen Mitteln einlegen können (5, II, 121 : 6—13 = 21, 85 : 24—29). Das kann durch eine Konstruktion von gleicher Allgemeinheit schwerlich gedeckt gewesen sein.

4. Die Existenz von gegenseitig unausmeßbaren Winkeln ist für Pappus zwar etwas merkwürdig, aber dennoch sicher. Aber sie wird nur durch die Quadratrix gesichert (296 : 9—12).

5. Sporus rügt den Gebrauch der Quadratrix, aber nur wegen zweier von ihm scharfsinnig herausgemerkter Zirkelschlüsse, nicht etwa weil die Existenz des gesuchten Punktes ungenügend gesichert wäre (Pappus 252 : 26—256 : 1). Pappus' eigener, exhaustionsartiger Beweis setzt die Existenz des Punktes ganz klar voraus.

6. Speusippus, Amphinomus und Menaechmus stritten über den Unterschied zwischen Aufgabe und Lehrsatz. In dem Bericht des Proclus über diesen Streit heißt es: „τὰς δὲ γενέσεις (d. h., der geometrischen Gebilde) οὐ ποιητικῶς ἀλλὰ γνωστικῶς ὁρῶμεν, ὡσανεὶ γιγνόμενα λαμβάνοντες τὰ ἀεὶ ὄντα“ (78 : 4—6).

7. Eutocius verteidigt Archimedes gegen den Vorwurf, der Kreis müsse erst gestreckt sein, bevor man das inhaltsgleiche Dreieck bilden könne (zu de Circuli mensura, Satz 1). Die Existenz einer Strecke gleicher Länge ist für Eutocius auch dann sicher, wenn diese Strecke zugestandenermaßen nicht hat hergestellt werden können. Archimedes habe vielmehr das gute Recht, über ein bloß vorausgesetztes Dreieck die genannte Behauptung aufzustellen (Eutocius 230 : 11—23).

8. Endlich liegt eine Stelle vor, wo zwischen Herstellung und Existenzbeweis ausdrücklich unterschieden wird, nämlich bei Philoponus über die Analytica posteriora: „Die Quadrierer des Kreises untersuchten nicht, ob es möglich sei, daß ein Quadrat dem Kreis überhaupt gleich komme, sondern sie suchten in der Annahme, daß dies mög-

lich sei, ein kreisgleiches Quadrat wirklich herzustellen" (γεννᾶν, 25, 112 : 25—36)[36]).

Wir haben die Frage schon berührt, ob die Regel des Pappus bis zu den Grenzen des Möglichen durchgeführt wurde. Könnten wir nun eine einheitliche Gruppe von Ausnahmen feststellen, so käme die Frage nach den Beweggründen für die Regel möglicherweise der Entscheidung näher. Allein, es fehlt auch hier die notwendige rein mathematische Voruntersuchung. Alle Aufgaben dritten und höheren Grades müssen aus der Geometrie der Alten zusammengetragen, in Gleichungen eingekleidet und auf ihre Galoisschen Gruppen untersucht werden. Es wäre ferner zu fragen, inwieweit die algebraischen Verhältnisse von dem gewählten geometrischen Ansatz abhängen, und wie sich die Galoisschen Gruppen von Grundkörper zu Grundkörper ändern. Zu dieser konkreten Handhabung der Gruppentheorie der Gleichungen niederen Grades tragen zwei neuere Dissertationen bei. Fr. Hack zeigt, wie die Gruppe aus den Koeffizienten zu erkennen ist (**101**), während Fr. Seidelmann die Gleichungen mit gegebener Gruppe parametrisch darstellt (**113**). Hack behandelt einige einfache Einschiebungen, aber er versucht nicht, die quadratisch ausführbaren Fälle vollständig zu bestimmen. Eine Voruntersuchung dieser Art und diesen Umfanges muß an anderer Stelle versucht werden[37]).

§ 10.

Äußerungen der Griechen über die relative Unlösbarkeit gewisser Aufgaben.

Ältere Darstellungen der griechischen Mathematik lassen gewisse geometrische Unmöglichkeiten damals wohl bekannt sein. So Montucla: „Car on démontre aujourd'hui, et les anciens ne l'ignorèrent pas, qu'on

[36]) Zusatz bei der Drucklegung: diese Stelle aus Philoponus wurde auch von O. Becker bemerkt und weiter ausgewertet. Siehe seine „Eudoxus-Studien II. Warum haben die Griechen die Existenz der vierten Proportionale angenommen?", Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, Abt. B, Bd. 2 (1933) 369—387; Seite 376.

[37]) Es sei gestattet, auf eine kleine Ironie der Mathematikgeschichte aufmerksam zu machen. Die Einschiebung bei Pappus 782 : 6—7 wird in einer neueren japanischen Arbeit irrtümlich für unlösbar mit Zirkel und Lineal erklärt (**103**, 137 Mitte). Der Verfasser hatte als linke Seite der kubischen Resolvente das allerdings unzerlegbare Polynom

$$t^3 - 21\,t^2 + 87\,t - 144$$

erhalten (p. 138 oben). Der vorletzte Koeffizient ist aber in Wirklichkeit 120, und dann zerfällt das Polynom in

$$(t - 12)\,(t^2 - 9\,t + 12).$$

Infolge eines Rechenfehlers wurde also in einer modernen japanischen Arbeit ein algene saurait le résoudre (d. h., die delische Aufgabe) par les seuls secours de la géométrie ordinaire“ (**68**, I[1] 188 = I[2] 175). So Reimer in einem Zusatz zu Bossut: „Dieser denkende Geometer (d. h., Platon) mutmaßte sehr richtig, daß zu einer befriedigenden oder rein geometrischen Auflösung derselben andere krumme Linien als der Kreis erforderlich sein dürften“ (**72**, 114). So auch Wittstein: „Schon damals (d. h., in der Schule Platons) dienten die Kegelschnitte zur Lösung von Aufgaben... deren Unlösbarkeit durch gerade Linie und Kreis allein man bereits erkannt hatte“ (**118**, 6). Spätere Schriftsteller haben wenigstens soviel geglaubt, daß die Griechen an den entsprechenden Möglichkeiten offen zweifelten. Nach Felix Klein hat uns das Altertum „drei fundamentale Aufgaben als vermutlich unlösbar hinterlassen“ (**108**, 10). Enriques teilt diese Meinuug. „Wenn man auch mit Wahrscheinlichkeit vermuten darf“, schreibt er, „daß schon den Griechen Zweifel aufgetaucht seien an der Zulänglichkeit dieser Mittel, so fehlten ihnen doch die Mittel, sich mit Hilfe der Analysis darüber zu vergewissern“ (**97**, 10). Diesen Ansichten steht die von Tropfke schroff gegenüber: „Von einer solchen Unmöglichkeit geometrischer Lösung“, schreibt Tropfke von der Lösung kubischer Aufgaben mit Zirkel und Lineal, „hatte das Altertum keine Ahnung“ (**81**, III, 63).

Diese Meinungen gehen nicht weniger stark auseinander, wie in § 1 die Meinungen darüber, ob Platon eine Beschränkung auf Zirkel und Lineal auferlegt habe. Eine Antwort auf die vorliegende, mehr positive Fragestellung ist erheblich leichter. Ohne die letzte Vollständigkeit zu erstreben, tragen wir mühelos eine Reihe von Stellen zusammen über die geometrische Unmöglichkeit im allgemeinen, über die Unmöglichkeit, gewisse Aufgaben mit Zirkel und Lineal zu lösen, und endlich noch über den ausgesprochenen Wunsch, für die Unmöglichkeit der Kreisquadratur einen bündigen Beweis zu besitzen.

Daß die Lösung einer gestellten Aufgabe bisweilen unmöglich ist, wird schon durch die Entdeckung des διορισμός durch den Platonschüler Leon erkannt (Proclus 66 : 22), aber auch durch die gleichlaufende Einteilung der Lehrsätze in wahre und falsche, der Aufgaben in lösbare und unlösbare (ebd. 330 : 14—16). Die Unlösbarkeit braucht nicht, wie beim διορισμός, allein an den Ausmaßen der gegebenen Stücke zu liegen, denn Pappus redet allgemeiner von den Widersprüchen, die sich aus der Analysis ergeben können (636 : 7—14).

Nicht so klar ist die Bezugnahme auf unseren Gegenstand bei Aristoteles: „ἔνιαι (d. h., von den δυνάμεις) γὰρ ὁμοιότητί τινι λέγονται,

braischer Tatbestand falsch bestimmt, den die Griechen Apollonius und Pappus sogar in einem allgemeineren Fall (670 : 20—22) richtig bestimmt hatten (vgl. den entscheidenden Hilfssatz 778 : 7—10 und die Lösung Horsleys **65**. 9—12). Die Arbeit von Hayashi konnte freilich nur in der Wiedergabe (**103**), nicht im Original (**102**) eingesehen werden.

καθάπερ ἐν γεωμετρίᾳ καὶ δυνατὰ καὶ ἀδύνατα λέγομεν τῷ εἶναί πως ἢ μὴ εἶναι" (met. 1046 a 7—9) und an der Parallelstelle 1019 b 33—34: „κατὰ μεταφορὰν δὲ ἡ ἐν τῇ γεωμετρίᾳ λέγεται δύναμις". Alexander bezieht diese Bemerkung jedenfalls auf unsere zweiten Potenzen: eine Strecke sei in der Potenz das vierfache einer anderen, wenn sie der Länge nach doppelt so groß ist wie jene (1, 566 : 14—25). Eine mittelbare, aber völlig eindeutige Unmöglichkeitsaussage ist mit der Abstufung der Aufgaben gegeben. „Eben" waren die mit Zirkel und Lineal lösbaren (δυνάμενα λύεσθαι, Pappus 54 : 10, 270 : 6 und δυνάμενα δειχθῆναι, 672 : 9). Die „räumlichen" und „linearen" Aufgaben müssen demnach als mit Zirkel und Lineal unlösbar gegolten haben. Damit eine Aufgabe zur zweiten Stufe gehöre, verlangt Pappus ganz ausdrücklich, daß bei ihr die Heranziehung der Kegelschnitte notwendig sei (ἀναγκαῖον, 54 : 15).

Die Unmöglichkeit einer Lösung der delischen Aufgabe mit Zirkel und Lineal wird von Pappus wiederholt behauptet, bald im Namen Herons und Philons, des Poliorketikers (56 : 1 und 62 : 17), bald im eigenen Namen (40 : 10, 54 : 24 und 1070 : 8), und zwar jedesmal mit dem Zusatz „φύσει", der die Unlösbarkeit von der bloßen Ungelöstheit scharf unterscheidet. Pappus setzt diese Kenntnis bei allen geschulten Mathematikern voraus; wer mit Zirkel und Lineal auszukommen glaubt, bestimme diese Aufgabe ἀμαθῶς (30 : 24). Die zuversichtliche Erklärung, es sei „daraus klar, daß die vorliegende Aufgabe mit den ebenen Örtern nicht gelöst werden kann" (58 : 21—22), wird von Hultsch als Einschiebsel ausgeklammert. Sie wird aus dem Vorhergehenden nicht ernstlich gefolgert und zeigt nur, daß der Verfasser dieser Zeilen aus irgendeiner Quelle von der Unlösbarkeit zu wissen glaubte.

Die Winkelteilung gilt bei Pappus und auch bei Proclus als nicht lösbar mit Zirkel und Lineal. Die Dreiteilung ist nach dem ersteren eine räumliche Aufgabe, und zwar ihrem Wesen nach (φύσει, 272 : 9—10 und 284 : 22). Für Proclus geht sie über die gerade geschilderte Konstruktionsweise, also über Zirkel und Lineal hinaus und erfordert gemischte Linien (271 : 24—272 : 1). Proclus dehnt seine Behauptung weiter auf die Fünfteilung aus (271 : 23) und merkwürdigerweise noch auf die Vierteilung, wobei er im dortigen Zusammenhang wahrscheinlich nur an den Gebrauch der Spirale oder der Quadratrix bei der allgemeinen Bogenteilung gedacht hat. Auch wenn diese Erklärung nicht zutrifft, haben wir in diesen Worten immerhin ein Anzeichen dafür, daß man sich einer inneren Abstufung der ebenen Aufgaben untereinander und nach der Anzahl der Anwendungen von Zirkel und Lineal nicht ständig bewußt war. Die allgemeine Winkelteilung in einem beliebigen vorgegebenen Verhältnis wird endlich von Pappus als eine „lineare" Aufgabe bezeichnet (284 : 23—24), also weder mit Zirkel und Lineal, noch mit Kegelschnitten zu bewältigen. Hier fällt es übrigens auf, daß der übliche Zusatz φύσει fehlt. Das kann zwar eine Zufälligkeit der Darstellung sein, aber wenn Pappus das Wort mit Absicht wegläßt, so wird er für die Unlösbarkeit der früher genannten Aufgaben mit Zirkel und Lineal vielleicht bessere, oder jedenfalls andere Gründe gehabt haben, als für die notwendige Zugehörigkeit dieser letzten Aufgabe zu den „linearen". Die anschließenden Worte „καὶ δέδεικται ὑπὸ τῶν νεωτέρων" lassen sich nicht so deuten, als ob die „Neueren" diese Zugehörigkeit förmlich bewiesen hätten, denn Pappus braucht das Wort δείκνυται auch in der Bedeutung „lösen" (z. B., 672 : 9—10) und gibt im Anschluß daran nur die Lösungen selbst.

Die Bedeutung einer Aussage über die Unmöglichkeit der Kreisquadratur hängt sehr davon ab, wie diese Aufgabe aufgefaßt wird. So ist aus dem arglosen Scholion zu Aristophanes, Vögel 1005: „παίζει, ἀδύνατον γὰρ τὸν κύκλον τετράγωνον γενέσθαι" (7) schwerlich eine ernste, algebraisch scharf umrissene Behauptung zu entnehmen, und dies noch weniger, wenn Rudio mit seiner bedeutend elementareren Auslegung dieser Vögelstelle Recht hat (75).

Die Eudemische Ethik bezeichnet die Quadratur des Kreises als „ὅλως οὐ πρακτόν" und deshalb nicht Gegenstand der Beratung (1226 a 22—30). Aber mit den Worten οὐ πρακτόν ist die Unmöglichkeit im Sinne der theoretischen Geometrie keineswegs eindeutig zum Ausdruck gebracht; denn οὐ πρακτόν kann neben „untunlich" auch „nicht etwas zu Tuendes" bedeuten, also „kein Ziel der beratenen Handlung" und „kein Anwendungsgebiet der Ethik". Das πρακτόν wird de Sensu 437 a 2—3 dem νοητόν gegenübergestellt, met. 1025 b 24 dem προαιρετόν gleichgesetzt, Eth. Nicom. 1094 a 19 auf ein τέλος hingeordnet, Politica 1333 a 32—33 in ἀναγκαῖον, χρήσιμον und καλόν eingeteilt. Dafür enthält die Parallelstelle 1112 a 22—23 der Nicomachischen Ethik zwar nicht das Wort πρακτόν, wohl aber ein von Aristoteles gern gewähltes Beispiel für das mathematisch Unmögliche.

In der Aussage bestimmt, in der Begründung verfehlt, ist die Erklärung Olympiodors, die Kreisquadratur sei deshalb unmöglich, weil der Punkt kein gemeinsames Maß für die geometrischen Größen abgebe. Olympiodor vergleicht diese geometrische Aufgabe mit der anderen, arithmetischen Aufgabe, eine Kreiszahl zu finden, die zugleich eine Quadratzahl ist. Das sei möglich, weil die Eins das Maß aller Zahlen ist (19, 110 : 16—25). Elias sagt weniger bestimmt: „ἡ γὰρ φύσις τετραγωνισμὸν οὐκ ἐπιδέχεται" (12, 214 : 5—11). Ammonius (3, 75 : 10—19) und Philoponus (23, 120 : 14—121 : 10) erzählen, daß viele berühmte Mathematiker sich in der Quadratur des Kreises versucht hätten; dem Archimedes sei eine gute Annäherung geglückt, das

Genaue aber noch niemanden[38]). Die Anspielung auf die Kreismessung — oder auf Archimedes' verschärfte Abschätzung von π (II, 542, Fragment 6) — läßt leider befürchten, daß beide Erklärer die Aufgabe rein größenmäßig auffassen und warnt vor einer scharf algebraischen Auslegung dieser Stelle. Ammonius' Gründe werden von Simplicius mitgeteilt und gehen aus von der „Wesensverschiedenheit des Geraden und des Runden". Mit Recht führt Simplicius die Möndchen als Gegenbeispiele an, unterscheidet genau zwischen ἀνομογενής und ἀσύμβλητος und möchte an der Quadrierbarkeit des Kreises nicht allein aus diesem Grunde zweifeln (35, 42:12—44:14 = 38, 59:23—60:7). Ausreichende Gründe für die Unmöglichkeit einer Kreisquadratur mit Zirkel und Lineal sind im Altertum auch nicht zu erwarten; ist es doch bisher nicht gelungen, den Lindemannschen Beweis vom Jahre 1882, der sehr viel mehr dartut, als daß π keine Quadratwurzelgröße ist, durch einen einfacheren Beweis zu dieser einfacheren Tatsache zu ersetzen.

Um so größere Beachtung verdient es, daß einmal im Altertum von einem förmlichen Unmöglichkeitsbeweis für die Kreisquadratur gesprochen worden ist. Simplicius schreibt in seinem Kommentar zu phys. 248a 10—18 wie folgt:

Αἴτιον δὲ τοῦ καίτοι μήπω εὑρεθέντα τὸν τοῦ κύκλου τετραγωνισμὸν ζητεῖσθαι ἔτι — καὶ τὸ εἰ ἔστιν εὐθεῖα περιφερεῖ ἴση — τὸ μηδὲ ὅτι ἀδύνατα ταῦτά ἐστιν ηὑρῆσθαί πω, ὥσπερ τὸ τὴν διάμετρον ἀσύμμετρον εἶναι τῇ πλευρᾷ[39]).

Der Grund dafür, daß die bislang unentdeckte Kreisquadratur noch untersucht wird, und daß man noch fragt, ob eine dem Kreisumfang gleich lange Strecke vorhanden ist, besteht darin, daß diese Dinge noch nicht für unmöglich befunden worden sind, wie das bei der Unausmeßbarkeit von Seite und Diagonale schon der Fall ist (38, 1082:29—1083:3).

Der Vergleich mit einem anderen, längst geglückten Unmöglichkeitsbeweis, der bereits von Aristoteles häufig als geläufiges Beispiel benutzt wurde (anal. pr. 41a 26—27 und 50a 37—38), läßt über den Sinn von Simplicius' Wunsch keinen Zweifel aufkommen. Durch diese Stelle wird Rudios Ehrenrettung des Simplicius (74), trotz der

[38]) Cosmas Indicopleustes geht in seiner Topographia Christiana weit in die Irre und bezeichnet Archimedes als den einzigen Geometer, dem die Quadratur des Kreises geglückt sei (9, Spalte 176:6—8).

[39]) Die Zeichensetzung rührt vom Zitierenden her und entspricht der dargebotenen Übersetzung.

Einwendungen von Tannery (78), in einem weiteren und wichtigen Punkte verstärkt[40]).

§ 11.
Vorstufen der algebraischen Auffassung der Konstruktionen mit Zirkel und Lineal.

Es wurde in der Einleitung und am Anfang von § 8 betont, daß die neuere Mathematik den Sinn der drei klassischen Aufgaben fest umreißt, indem sie genau die Hilfsmittel angibt, mit denen man entweder auskommen muß oder zeigen, daß man nicht auskommen kann. Die geometrische Frage: „Zu welchen Punkten und Strecken gelangen wir, wenn wir von gegebenen Punkten und Strecken ausgehen und nur Zirkel und Lineal verwenden?" läuft parallel zur algebraischen Frage: „Zu welchen Körpern gelangen wir, wenn wir von einem vorgegebenen Körper ausgehen und nur Körpererweiterungen zweiten Grades vornehmen?". Und umgekehrt, wie in der neueren Körperalgebra eine Erweiterung nur in bezug auf einen ganz bestimmten Grundkörper sinnvoll ist, so ist die entsprechende geometrische Aufgabe nur dann sinnvoll, wenn alle gesuchten Gebilde mit den vorgeschriebenen Mitteln aus ganz bestimmten vorgegebenen Grundgebilden abzuleiten sind. Am Ende des Zusatzes zu § 6 wurden wir daran erinnert, wie wichtig diese weitere Sinngebung der Aufgabe sein kann, und wie sehr sie die Lösbarkeitsverhältnisse beeinflußt. Wir wollen also zunächst fragen, bis zu welchem Grad und in welcher Gestalt diese „algebraische Relativität" schon im Altertum verstanden wurde.

In einem Falle liegt dieses Verständnis klar zutage, nämlich für die gegenseitige Bezogenheit der Begriffe ῥητός und ἄλογος. In einem Euklidscholion heißt es wörtlich: „τὸ ῥητὸν καὶ ἄλογον μέγεθος ἑκάτερον οὐκ ἔστι τῶν καθ' αὑτὰ νοουμένων, ἀλλὰ πρὸς ἕτερον συγκρινομένων" (13, V, 429 : 16—18). Wenige Zeilen weiter wird diese Aussage wiederholt und ihr Sinn durch ein Beispiel unzweideutig festgehalten: „Setzt man die Seite eines Quadrates als ῥητός voraus, so ist die Diagonale in der Länge ἄλογος und erst im Quadrat ῥητός, und setzt man umgekehrt die Diagonale als ῥητός voraus, so ist die Seite in der Länge ἄλογος und erst im Quadrat ῥητός" (ebd. 430 : 2—11)[41]). Die gleichen Ge-

[40]) Unsere Stelle steht im zweiten Teil der Dielsschen Ausgabe, der 1895 erschien. Tannery hat sie in seiner Arbeit über „Simplicius et la quadrature du cercle" (78) leider nicht berücksichtigt. Doch wollte Tannery mit dieser Arbeit nur eine Besprechung von Rudio liefern, und es trifft ihn höchstens der Vorwurf, einen zu allgemeinen Titel gewählt zu haben.

[41]) Der Wortlaut dieses ganzen Scholions (430 : 2—20) weicht nur unwesentlich von einer Stelle in den Heronischen Definitiones ab (18, IV, 136 : 25—138 : 18) und enthält eine leise Anspielung auf kubische Wurzelgrößen.

danken entwickelt Pappus im Kommentar zu Euklid X (**21**, 78—80) sowie in den Collectiones 296 : 11—12, wo er von dem Vorhandensein gegenseitig unausmeßbarer Winkel redet und diese Gegenseitigkeit sehr klar ausspricht: „κἂν ῥητὴν ὑποστησώμεθα τὴν μίαν γωνίαν ἢ περιφέρειαν, ἄλογος ἡ λοιπὴ γενήσεται“.

Eine zweite Art von Relativität hebt der Verfasser einer eingeschobenen Pappusstelle hervor (164 : 1—176 : 8, siehe Seite 164, Anm. 1). An einer und derselben Figur wird ein und derselbe geometrische Tatbestand von zwei verschiedenen Standpunkten betrachtet. In der ἀπόδειξις wird erst $\theta\zeta = \zeta\eta$ vorausgesetzt, dann die Strecke $\delta\mu$ bestimmt und endlich gezeigt, daß (in moderner Normierung und Schreibweise) $\delta\mu = \delta\zeta^3$ (knapp 164 : 12–26, ausführlicher 168 : 1—172 : 14). Im Gegensatz hierzu wird bei der ὀργανικὴ κατασκευή zuerst die Strecke $\delta\mu$ beliebig vorausgesetzt, dann $\theta\zeta = \zeta\eta$ gemacht und somit erreicht, daß $\delta\zeta$ die gewünschte Eigenschaft $\delta\zeta^3 = \delta\mu$ besitzt. Es werden dann schließlich die beiden Standpunkte eigens verglichen und festgestellt, daß die Schlußfolgerung stets dieselbe ist, aber das Gegebenheitsverhältnis verschieden (174 : 30=176 : 4). Bei der klassischen delischen Aufgabe sind $\delta\varepsilon$ und $\delta\mu$ gegeben, $\delta\zeta$ gesucht.

In einem anderen Bericht des Pappus über die delische Aufgabe (32 : 2—48 : 18) bemerkten Günther (**56**, 32—41), Pendlebury (**111**), Glaisher (**100**) und Heath (**61**, I, 268—270) eine Konvergenz, die Pendlebury lückenhaft bewiesen hat, und deren Beweis in einem kurzen Zusatz zu § 11 vervollständigt werden möge. Die gleiche Stelle bietet Anlaß zu einer algebraischen Beobachtung. Pappus läßt das Verhältnis $\theta\varkappa : \theta\rho$ mit Recht unbestimmt. Allein, zu jedem rationalen Teilungsverhältnis $\varkappa\sigma : \sigma\rho$ gibt es zwei bestimmte, quadratisch darstellbare Verhältnisse $\theta\varkappa : \theta\rho$, für welche tatsächlich φ mit ρ zusammenfällt. Im Sonderfall $\varkappa\sigma = \sigma\rho$ (Pappus 32 : 12) beträgt dieses kritische Verhältnis $2+\sqrt{5} : 1$. Zwischen 1 und $2+\sqrt{5}$ lassen sich in der Tat die zwei geometrischen Mittel $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$ und $\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$, nachdem man sie einmal ausgerechnet hat, als Strecken von dieser errechneten Länge mit Zirkel und Lineal herstellen. Bewußt oder unbewußt hat sich Pappus durch diese scheinbare Ausnahme nicht beirren lassen. Entweder hat er die Arten der Gegebenheit besonders klar durchschaut und den Unterschied zwischen einer Unbestimmten und einem beliebigen Sonderwert unbewußt, aber feinfühlig beachtet, oder — die Sonderstellung des Wertes $\theta\varkappa : \theta\rho = 2+\sqrt{5} : 1$ ist ihm völlig entgangen. Das Letztere ist nicht ohne weiteres anzunehmen, da Pappus die Wertbereiche $\theta\varkappa : \theta\rho > 5$ $(> 2+\sqrt{5})$ und $\theta\varkappa : \theta\rho < 4$ $(< 2+\sqrt{5})$ genau unterschieden hat (38 : 4—8).

In § 5 stellten wir fest, daß Hippokrates den Grundgedanken seiner Quadratur der Möndchen sehr leicht für den allgemeinen Fall (p, q) —

oder wenigstens für einige weitere Sonderfälle — hätte aussprechen können. Ob er nun diejenigen Möndchen wählte, die er mit Zirkel und Lineal herstellen konnte, oder durch die innewohnende Schwierigkeit der höheren Fälle wie durch ein unsichtbares Hindernis aufgehalten wurde, jedenfalls scheint er kein Möndchen quadriert zu haben, das er vorher nicht auch konstruiert hatte. Das würde aber unserem modernen algebraischen Empfinden ganz entsprechen; es genügt nicht festzustellen, daß der Inhalt des Möndchens durch eine Quadratwurzelzahl gemessen wird, es muß das Möndchen selbst als selbständige Figur gezeichnet werden können. Auch die neuesten Arbeiten von Landau und Tschebotaröw stehen auf diesem Standpunkt und gewinnen erst aus diesem Standpunkt eine Ansatzmöglichkeit für die Galoissche Theorie. Anders der junge Euler. Mit 23 Jahren ist er mit der Feststellung zufrieden: „Quoties in hac expressione analytica quantitates logarithmicae evanescunt, toties lunulam esse quadrabilem“ (98, I, 38). Einundvierzig Jahre später kommt er noch einmal auf die Möndchen zu sprechen und verlangt jetzt — wir dürfen vielleicht sagen: mit Hippokrates — daß darüber hinaus „uterque angulus m et n geometrice assignari possit, quod evenit, si utriusque sinum vel tangentem geometrice exhibere licuerit“ (99, § 12).

So klar die Gegenseitigkeit im algebraischen Verhalten zweier einzelnen Größen zu einander erkannt wurde, so hat man doch eine Reihe von Vorstellungen, die für unsere heutige Körperalgebra wesentlich sind, bei den Griechen noch nicht beobachtet. Es scheint einmal die Erkenntnis zu fehlen, daß mit den hinzugenommenen Größen zugleich der ungeteilte, aus ihnen hervorgehende Erweiterungskörper als wohlbestimmte Größenmenge ins Auge zu fassen ist; ein anderes Mal die Erkenntnis, daß diese in geometrischer Gestalt gewonnene Körpererweiterung wiederum als Grundkörper dienen kann und der Wiedererweiterung fähig ist. Von solchen Körpertürmen und Aufschichtungen ist auch dort nichts zu sehen, wo eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal in mehreren Schritten erfolgt. Das geschieht zum Beispiel bei Euklids Herstellung des regelmäßigen Fünf- und Fünfzehnecks, des Ikosaeders und des Dodekaeders (IV, 11 und 16, XIII, 16 und 18) sowie in Satz 86 der Data. Doch bleibt der wiederholte Gebrauch von Zirkel und Lineal eine äußere Zufälligkeit der einzelnen Lösung. Im zehnten Buch der Elemente werden die quadratischen und biquadratischen Größen freilich sehr kunstvoll in Schichten aufgebaut, aber dies erfolgt ohne offene Bezugnahme auf ihre geometrische Herstellung mit Zirkel und Lineal in einem oder mehreren Schritten und steht in keiner unmittelbar zu sehenden Beziehung zu den Methoden der modernen Algebra.

Wie Pappus seinen wiederholten Zusatz „φύσει“, also die wiederholte Behauptung der wesentlich kubischen Natur gewisser Aufgaben gerechtfertigen wollte, wissen wir nicht. Trotz beginnender Einsichten in die algebraischen Grundlagen der Lehre von Zirkel und Lineal dürfte den Griechen das nötige körpertheoretische Rüstzeug gefehlt haben, um ihre Aussagen über Zirkel und Lineal mit letzter algebraischer Schärfe zu prägen und zwingend zu beweisen.

Mathematischer Zusatz zu § 11.

Pendlebury rechnet in der oben erwähnten Arbeit mit einem Limes, dessen Vorhandensein er nicht nachweist. Wir wollen die Konvergenz des Verfahrens von Pappus auf andere Art beweisen und nennen die dortigen Längen

$$\theta\varkappa = a, \quad \theta\sigma = x_n, \quad \theta\zeta = x_{n+1}, \quad \theta\rho = b, \quad \theta\varphi = z_n.$$

Aus der Ähnlichkeit der unechten Vierecke $\chi\rho\varphi\varkappa$ und $\psi\zeta\sigma\varkappa$ folgt zunächst

$$\frac{a-x_{n+1}}{a-x_n} = \frac{a-b}{a-z_n}.$$

Wir erweitern den rechten Bruch mit a^2, setzen $a^2 b = k^3$ $(k > 0)$ sowie, gemäß der Konstruktion des Pappus, $a^2 z_n = x_n^3$:

$$\text{(A)} \qquad \frac{a-x_{n+1}}{a-x_n} = \frac{a^3-k^3}{a^3-x_n^3}$$

wobei

$$\text{(B)} \qquad a > k > b > 0, \quad a > x_n > 0$$

ist und die Multiplikation mit $(a-x_n):(a-k)$ darum erlaubt:

$$\text{(C)} \qquad \frac{a-x_{n+1}}{a-k} = \frac{a^2+ak+k^2}{a^2+ax_n+x_n^2}$$

alsdann ist $\left\{\begin{array}{ll}\text{nach (A):} & x_n \gtreqless x_{n+1} \\ \text{nach (C):} & \qquad x_{n+1} \gtreqless k\end{array}\right\}$ je nachdem $x_n \gtreqless k$.

Die Folge (x_n) geht daher monoton auf k zu und ist zugleich durch k beschränkt, also konvergent, etwa $\to X$. Aus demselben Grund in Verbindung mit (B) ist außerdem $X \neq a$. Jetzt erst, nachdem die Existenz von X und die Ungleichheit $X \neq a$ gesichert sind, dürfen wir in (A) $n \to \infty$ gehen lassen und die Folgerung $X = k$ ziehen.

§ 12.

Vorstufen der gruppentheoretischen Auffassung von Kreis und Gerade.

Eine vierte Einzelfrage bleibt noch zu behandeln: ob die Kurven der ersten Stufe, die Gerade und der Kreis, irgendwie zu einer inneren Einheit zusammengebunden wurden. Gelingt dieser Nachweis, so haben wir für die genannten Kurven eine Sonderrolle gefunden, die nicht mehr von der zufälligen Wahl zweier Zeichengeräte abhängt, und nicht mehr von dem Gewicht, das man dem ältesten und vertrautesten Reißzeug beigelegt haben mag, sondern vielmehr in einem tiefliegenden geometrischen Satz verankert ist.

Die Kreise und die Geraden der Ebene trugen bei Geometern, die für Pappus παλαιοί waren, den gemeinsamen Namen τόποι ἐπίπεδοι. Wenn sie auch nicht zu einer wohlbestimmten Kurvenmenge in heutigen Sinne zusammengefaßt werden, so bleibt ihre Vereinigung doch nicht äußerlich. Wenige Zeilen später, in seinem Bericht über die Schrift „über die ebenen Örter" des Apollonius, zieht Pappus viele Sätze selbständig [42]) in eine einzige Aussage zusammen. Diese Stelle soll in § 12 genauer erörtert werden. Sie wird von Heath zwar übersetzt, aber nicht mathematisch ausgedeutet und als „apparently confused" bezeichnet (**61**, II, 186). Um sie zu verstehen, müssen wir etwas weiter ausholen.

Ohne Rücksicht auf die griechische Mathematik fragen wir uns: welche (dann von selbst stetigen) Transformationen der Ebene führen Kreise (einschließlich Geraden) in Kreise (einschließlich Geraden) über? Diese Aufgabe wurden zum ersten Male von Möbius gestellt und 1855 vollständig beantwortet (**110**). Die gesuchten Transformationen sind [43])

die Umlegungen

A) $$x' = x, \qquad y' = -y,$$

die Schiebungen

B) $$x' = x + p, \qquad y' = y + q,$$

die Streckungen

C) $$x' = kx, \qquad y' = ky,$$

die Drehungen

D) $$x' = x\cos(t) + y\sin(t),$$
$$y' = y\cos(t) - x\sin(t),$$

die Kreisspiegelungen

E) $$x' = \frac{R^2 x}{x^2+y^2}, \qquad y' = \frac{R^2 y}{x^2+y^2},$$

ausgenommen $x = y = 0$; oder eine beliebige endiche Folge von solchen Transformationen. Mit der leicht verständlichen Ausnahme

[42]) θήσω, 662 : 23, περιλαβών, 662 : 24.

[43]) Das Ergebnis wird in der langen Arbeit von Möbius nicht einheitlich ausgesprochen. In § 5 werden die Transformationen, die wir mit A, B, C, D bezeichnen, als „Ähnlichkeiten" zusammengefaßt, und es wird angegeben, wann eine Kreisverwandtschaft eine von diesen besonderen Gestalten annimmt. Daß die Kreisspiegelungen die einzigen anderen sind, geht aus § 10, Nummer (c) hervor. Im allgemeinen sind sie mit A, B, C oder D vermischt, aber für besondere Fälle von Figur 1 unvermischt.

der Umlegungen stehen alle, auch die Kreisspiegelungen, in geometrischer Form bei Pappus.

Unsere Pappusstelle steht in den Collectiones 662:25—664:6 und ferner in Heibergs Apollonius (5, II, 115:22—116:5). Sie bildet einen einzigen, reichgegliederten Bedingungssatz mit den Stützpunkten „ἐὰν δύο . . . ἅπτηται, ἅψεται . . .“:

(i) ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἀχθῶσιν
(ii) ἤτοι ἀπὸ ἑνὸς δεδομένου σημείου
(iii) ἢ ἀπὸ δύο, καὶ
(iv) ἤτοι ἐπ' εὐθείας
(v) ἢ παράλληλοι
(vi) ἢ δεδομένην περιέχουσαι γωνίαν, καὶ
(vii) ἤτοι λόγον ἔχουσαι πρὸς ἀλλήλας (scl. δεδομένον)
(viii) ἢ χωρίον περιέχουσαι δεδομένον,
(ix) ἅπτηται δὲ τὸ τῆς μιᾶς πέρας ἐπιπέδου τόπου θέσει δεδομένου,
(x) ἅψεται καὶ τὸ τῆς ἑτέρας πέρας ἐπιπέδου τόπου θέσει δεδομένου
(xi) ὁτὲ μὲν τοῦ ὁμογενοῦς
(xii) ὁτὲ δὲ ἑτέρου, καὶ
(xiii) ὁτὲ μὲν ὁμοίως κειμένου πρὸς τὴν εὐθεῖαν,
(xiv) ὁτὲ δὲ ἐναντίως

oder in gleichgegliederter deutscher Übersetzung:

(i) Zieht man zwei gerade Strecken
(ii) entweder von einem gegebenen Punkte aus,
(iii) oder von deren zwei; und
(iv) entweder in gerader Linie mit einander,
(v) oder parallel,
(vi) oder unter einem festen Winkel zu einander; und
(vii) entweder mit einem festen Längenverhältnis,
(viii) oder mit einem festen Längenprodukt;
(ix) und liegt das Ende der einen Strecke auf einem gegebenen Kreis oder auf einer gegebenen Geraden,
(x) so wird liegen: auch das Ende der anderen Strecke auf einem damit gegebenen Kreis oder auf einer damit gegebenen Geraden, und zwar
(xi) bald von der gleichen Art, bald
(xii) von der entgegengesetzten, und
(xiii) bald gleichliegend zur Bezugsgeraden, bald
(xiv) ungleichliegend zu derselben.

Pappus möchte zwei geometrische Örter mit einander vergleichen. Die Glieder (i—viii) bestimmen in einer ersten Reihe von Wahlfällen, wie der zweite Ort vom ersten abhängen soll; (ix) legt den ersten Ort der Gattung nach fest; (x) sagt dann aus, wie der zweite Ort in seiner

Abhängigkeit vom ersten beschaffen sein wird; (xi—xiv) geben endlich in einer zweiten Reihe von Wahlfällen an, wie gewisse Eigenschaften des zweiten Ortes von denen des ersten abhängen.

Diese Abhägingkeit des einen Ortes von dem anderen (i—viii) drückt bei Pappus dasselbe aus, was wir eine „Transformation" nennen. Die Punkte, welche die beiden Örter beschreiben, werden als Endpunkte von Strecken aufgefaßt, und diese Strecken sollen:

1. entweder denselben Anfangspunkt haben (ii), oder einen verschiedenen Anfangspunkt (iii). Das heißt: es gilt in (B) entweder $p = q = 0$ (Fall ii), oder nicht $p = q = 0$ (Fall iii). In Worten: es findet entweder eine Schiebung (iii), oder keine Schiebung (ii) statt,

2. jedenfalls einen festen Winkel mit einander bilden (iv—vi). Das heißt: es gilt in (D) entweder $t = 0$ (Fälle iv und v), oder $t \neq 0$ (Fall vi). In Worten: es findet entweder eine Drehung statt (vi), oder keine Drehung (iv—v).

Die Notwendigkeit, zwischen (iv) und (v) zu unterscheiden, ist nur durch die griechische Ausdrucksweise bedingt; (iv) bezieht sich auf (ii), wo die Strecken von einem Punkte ausgehen und übereinander liegen, (v) dagegen auf (iii), wo die Strecken von verschiedenen Punkten ausgehen und parallel zu einander bleiben.

3. und entweder ein festes Längenverhältnis besitzen (vii), oder ein festes Längenprodukt (viii). Das heißt: die Transformation (C) wird entweder mit $k = 1$ oder mit $k \neq 1$ vorgenommen, und die Transformation (E) wird entweder mit vorgenommen oder nicht mit vorgenommen.

Damit sind unsere Transformationen B, C, D, E klar gekennzeichnet, sowie der Umstand, daß jede einzelne entweder vorhanden sein oder fehlen kann. Pappus hat lediglich die Umklappungen A ausgelassen, die wir als Grenzfall von E ansehen dürfen. Warum diese für uns naheliegende besondere Kreisverwandschaft weggelassen wird, steht hier nicht zur Erörterung. Pappus geht dann weiter und schildert einige Eigenschaften der Kreisverwandtschaften.

Erstens: Es kann vorkommen, daß eine Gerade in eine Gerade oder ein Kreis in einen Kreis verwandelt wird, sodaß der unabhängige und der abhängige ebene Ort ὁμογενεῖς sind (xi); oder aber, daß eine Gerade zu einem Kreis, ein Kreis zu einer Geraden wird. Dann sind die beiden Örter ἑτέρου γένους (xii).

Zweitens es bleiben gewisse Lagebeziehungen erhalten (xiii), oder sie werden in die entgegengesetzten übergeführt (xiv). Das ist möglicherweise eine Vorstufe zur Erkenntnis, daß die Kreisverwandtschaften den Drehungssinn bald lassen und bald umkehren — doch geht diese Einsicht aus den Worten selbst keineswegs eindeutig hervor, und eine solche Orientierung der Figuren müßte durch andere Zeugnisse unterstützt werden.

An unserer Stelle hat also Pappus fast alle Transformationen der Ebene angegeben, bei denen die Gesamtheit aller Kreise und Geraden als Gesamtheit invariant bleibt. Wenn auch kein Vollständigkeitsnachweis erstrebt wird, so ist doch damit ein erster Schritt getan zu einer gruppentheoretischen Kennzeichnung der Menge der „ebenen Örter" der Kurven, die man mit Zirkel und Lineal zeichnen kann. In diesem Umfang können die zusammenfassenden Aussagen des Pappus und die sachlichen Vorarbeiten des Apollonius bezeichnet werden als ein Stück Erlanger Programm aus der griechischen Geometrie (**105**).

Derselbe Apollonius, der die Kegelschnitte zu hoher Blüte brachte, der die hippokratische Einschiebung verallgemeinerte und auch dann mit Zirkel und Lineal bezwang, hat außerdem eine Aufgabe achten Grades, die apollonische Berührungsaufgabe, in allen zehn Fällen gelöst. Pappus teilt uns leider nur die Tatsache und die Verteilung der Fälle auf die zwei Bücher mit, aber nicht die gewählte Lösungsmethode (646 : 2–19). Wir sind jetzt berechtigt, über diese Frage eine Vermutung zu wagen; denn wir wissen, daß die schwierigeren Fälle mit Hilfe der Kreisverwandtschaften auf die leichteren zurückgeführt werden können, und wir wissen, daß Apollonius die Kreisverwandtschaften beherrschte.

Zusammenfassung.

I

Die früheren Ansichten über die Rolle von Zirkel und Lineal in der griechischen Mathematik weichen stark von einander ab. Daß Platon eine Beschränkung auf diese Hilfsmittel auferlegt habe, wurde zuerst von Hankel behauptet und dann häufig wiederholt. Über die Stellen jedoch, die Hankel selbst als Beweis angeführt hatte, ist man nicht hinausgegangen. Das war für uns der Anlaß, diese drei Belege auf ihren Inhalt neu zu prüfen (§ 1).

Hankel berief sich auf eine Bemerkung in Platons Staat und auf zwei Stellen bei Plutarch. Diese zwei Stellen erzählen von einem Tadel, den Platon gegen Archytas, Eudoxus und Menaechmus gerichtet habe. Ihre Angaben stammen vermutlich aus dem Platonicus des Eratosthenes und werden mit Ausnahme des Tadels in vielen Punkten anderwärts bestätigt. Für den Tadel selbst ist Plutarch allerdings unser einziger Gewährsmann. Seine Berufenheit als Zeuge auf diesem Gebiet mußte daher bei einer Durchmusterung aller seiner mathematischen Stellen geprüft werden; das Ergebnis war für Plutarch nicht ungünstig. Unsere Zweifel richten sich daher nicht gegen die Echtheit seiner Überlieferung, sondern gegen die Ausdeutung, die seine Worte in der neueren mathematischen Geschichtsschreibung gefunden haben (§ 2). Aus den Umständen des Tadels, aus der dargebotenen Begründung, aus den bezeugten Ansichten Platons (§ 3) und aus der späteren Entwicklung der Geometrie (§ 4) konnte die Vermutung wiederholt geschöpft werden, daß nicht die Bewegungsgeometrie und nicht das Hinausgehen über Zirkel und Lineal, sondern der Gebrauch von gerätlichen Sondermitteln und die Abkehr von der rein begrifflichen Geometrie den Gegenstand von Platons Tadel bildeten.

II

Die Umschau nach anderen und deutlicheren Zeugnissen über Zirkel und Lineal begann mit dem Bericht von Simplicius über die Möndchen des Hippokrates. Die Behandlung aller Möndchen (p, q) ist, abgesehen von der Herstellung der Figur, stets die gleiche. Wenn also Hippokrates tatsächlich nur quadratisch konstruierbare Fälle wählt, und von den heute bekannten nur zwei besonders verwickelte übergeht, so könnte er die Auswahl bewußt unter diesem Gesichtspunkt getroffen haben. Aber die Quellenlage ist leider ungünstig, und es ist nicht ganz sicher, daß Hippokrates die Herstellbarkeit seines dritten Möndchens mit Zirkel und Lineal erkannt und ausgenützt hat. Wenn also die Annahme, Hippokrates habe bewußt mit Zirkel und Lineal konstruieren wollen, zur Zeit die einzige ist, welche die Auswahl seiner drei Fälle begreiflich machen kann, so fehlt es doch an Unterlagen, um diese Annahme zu erhärten. Als Ergebnis von § 5 bleibt nur, daß Hippokrates die Herstellung der Möndchen als einen wesentlichen Teil der Aufgabe erkannt und ihr einen uns leider unbekannten Sinn erteilt hat.

Platon selbst hat zweimal zu wesentlich kubischen Aufgaben Stellung genommen. Einmal hat er die delische Aufgabe, nach einem anderen mehrfachen Zeugnis des Plutarch, nicht als unlösbar noch als falsch gelöst betrachtet, sondern lediglich als eine Leistung der höheren Mathematik. Über die zweite kubische Aufgabe besitzen wir im Menon seine eigenen Worte. Die Lösung ist mit Zirkel und Lineal nicht möglich, wohl aber mit höheren, damals bereitliegenden Mitteln, und trotzdem erklärt Platon die Aufgabe für lösbar (§ 6). Eine Stellungnahme Platons zu Zirkel und Lineal schien ferner an den Stellen vorzuliegen, wo er Kreis und Gerade in irgendeiner Weise bevorzugt. Aber diese Stellen erwiesen sich teilweise als sachfremd, und der Sinn, in welchem die übrigen Kurven aus diesen beiden „gemischt“ sein sollten, ist mit konstruktionstheoretischen Gesichtspunkten unvereinbar (§ 7).

Wenn die klassischen Aufgaben ohne beschränkende Nebenbedingung gestellt werden, wenn Aristoteles in seinen Beispielen und Euklid in seinen Elementen eine tatsächliche, aber stillschweigende Beschränkung auf Zirkel und Lineal üben, so kann aus diesem Stillschweigen an sich nichts gefolgert werden. Größeres Gewicht gewinnt das Stillschweigen, wenn Pappus die Versuche der alten Geometer, mit Zirkel und Lineal auszukommen, einzig mit ihrer Unvertrautheit mit höheren Mitteln begründet, und wenn Proklus, trotz aller Mitteilsamkeit über Platon, viele Gelegenheiten versäumt, besondere Ansichten Platons und Euklids über Zirkel und Lineal zu erwähnen (§ 8).

Das Endergebnis der ersten zwei Teile der vorliegenden Arbeit ist also, daß weder die bisher verwendeten (§§ 1—4), noch die hier hinzugetragenen (§§ 5—8) Zeugnisse die nötige Stütze dafür bieten, daß auch nur zeitweise, etwa unter Platons Einfluß, eine vollständige Beschränkung auf Zirkel und Lineal bestanden habe.

III

Eine nicht vollständige, sondern nur möglichste Beschränkung auf Zirkel und Lineal bleibt durchaus denkbar und wird spätestens bei Apollonius als bewußte Grenze der Stoffwahl bezeugt, spätestens von Pappus als geometrische Verhaltungsmaßregel ausgesprochen. Doch ist mit ihr die wirkliche Stellung von Zirkel und Lineal in der griechischen Geometrie nicht erschöpft.

Die tatsächliche Beschränkung auf Zirkel und Lineal, wie wir sie bei Aristoteles und Euklid finden, wird zwar von den Griechen selbst begründet, aber nur mit Rücksichten auf die Lernenden und auf eine geordnete wissenschaftliche Darstellung. Gegen Zeuthens Ansicht, daß sie insbesondere die Last der Existenzbeweise tragen sollte, bestehen gewisse Bedenken. Ob die Griechen bei jeder Gruppe von Aufgaben die Grenzen der Leistungsfähigkeit von Zirkel und Lineal wirklich erreichten, ließe sich nur durch eine neue, galoistheoretische Untersuchung feststellen (§ 9).

Fragen der Lösbarkeit mit bestimmten Hilfsmitteln wurden von den Griechen bisweilen gestellt und verneinend beantwortet. Auch hierüber waren die Ansichten der Mathematikhistoriker sehr verschieden. Doch war es leicht, griechische Äußerungen über die geometrische Unmöglichkeit im allgemeinen und insbesondere über die Lösbarkeit gewisser Aufgaben mit Zirkel und Lineal zu sammeln. Bei Simplicius findet sich sogar die ausdrückliche Feststellung, daß für die Kreisquadratur ein bündiger Unmöglichkeitsbeweis noch aussteht (§ 10).

Leichte Spuren von Einsicht in die algebraischen und körpertheoretischen Grundlagen der Lehre von Zirkel und Lineal konnten in etwa vier Fällen beobachtet werden. Doch fehlten den Griechen die grundlegenden Begriffe auf diesen Gebieten, und so blieb es ihnen verwehrt, ihre Aussagen über Zirkel und Lineal algebraisch genau zu prägen und streng zu beweisen (§ 11).

Die Kurven, die man mit Zirkel und Lineal zeichnet, wurden von den griechischen Mathematikern nicht nur äußerlich vereinigt. Heute suchen wir im Geiste des „Erlanger Programms“ (**105**) diejenigen Transformationen der Ebene aus, unter denen die Gesamtheit aller Geraden und Kreise der Ebene als Gesamtheit erhalten bleibt. Diese „Kreisverwandtschaften“ wurden 1855 von Möbius aufgezählt und als die einzigen ihrer Art nachgewiesen. Aufgezählt — wenn auch ohne Nachweis der Vollständigkeit und mit einer unbedeutenden Ausnahme — stehen sie bereits bei Pappus, und Pappus brauchte sie nur aus einem Werk des Apollonius zu entnehmen. Dadurch wurden die Geraden und Kreise der Ebene schon im Altertum zu einer inneren Einheit verbunden, die ganz in der Theorie wurzelt und mit den zufälligen Zeichengeräten „Zirkel und Lineal“ nichts mehr zu tun hat. Die Feststellung dieser Kenntnisse bei Apollonius berechtigt schließlich zu der Vermutung, daß er seine Berührungsaufgabe mit diesen Hilfsmitteln gelöst haben mag (§ 12).

Verzeichnis der genannten Schriften.

A. Textausgaben.

1 Alexander: in Metaphysicam, ed. M. Hayduck, CAG I (= Commentaria in Aristotelem graeca, Band I), Berlin 1891.

2 Ammonius (Herennius Philon): de Differentiis adfinium vocabulorum, ed. Valkenaer, Leiden 1739, iterum ed. Schäfer, Leipzig 1822.

3 Ammonius: in Categorias, ed. A. Busse, CAG IV_4, Berlin 1895.

4 Anonymer Kommentar zu Platons Theaetet (Papyrus 9782) unter Mitwirkung von J. L. Heiberg von H. Diels und W. Schubart bearbeitet, Berliner Klassikertexte, Heft 2, Berlin 1905.

5 Apollonius von Perge: Quae graece extant cum commentariis antiquis, ed. J. L. Heiberg, Leipzig I 1891, II 1893.

6 Archimedes: Opera omnia, iterum ed. J. L. Heiberg, Leipzig I 1910, II 1913, III 1915.

7 Aristophanes: Scholia graeca, ed. Fr. Dübner, Paris 1883^2.

8 Autolycus: de Sphaera quae movetur liber, de Ortibus et occasibus libri duo, ed. Fr. Hultsch, Leipzig 1885.

9 Cosmas Indicopleustes: Topographia christiana, Migne, Patrologia graeca, Band 88, Spalte 1—476, Paris 1864. Vgl. The Christian Topography of Cosmas Indicopleustes, ed. E. O. Winstedt, Cambridge 1909.

10 David: Prolegomena et in Porphyrii Isagogen, ed. A. Busse, CAG $XVIII_2$, Berlin 1904.

11 Diogenes Laertius: de Vitis dogmatibus et apophthegmatibus clarorum philosophorum, ed. H. G. Huebner, Leipzig I 1828, II 1831.

12 Elias (olim David): in Porphyrii Isagogen et Aristotelis Categorias, ed. A. Busse, CAG $XVIII_1$, Berlin 1900.

13 Euklid: Opera omnia, edd. J. L. Heiberg et H. Menge, Leipzig I 1883, II 1884, III 1886, IV 1885, V 1888, VI 1896, VII 1895, VIII 1916; nach Buch und Satz angeführt.

14 Eutocius: (zu Archimedes, siehe 6, Band III).

15 Gellius, Aulus: Noctes Atticae, ed. K. Hosius, Leipzig 1903.

16 Heron: Belopoiica, in: Griechische Kriegsschriftsteller, mit kritischen und erklärenden Anmerkungen von H. Köchly und W. Rüstow, Teil I: Aeneias' „Von der Verteidigung der Städte", Herons „Geschützbau", Philons „Geschützbau" und einem Anhang: „Vitruvius über den Geschützbau und die Quellen für die Geschütze der zweiten Artillerieperiode", Leipzig 1853.

17 Heron: H. Diels und E. Schramm: Herons Belopoiika, griechisch und deutsch, Abh. Kgl. Pr. Ak. Wiss., ph.-h. Kl. (1918) 2.

18 Heron: Opera, edd. Heiberg, Nix, Schmidt, Schöne. Leipzig I 1899, II_1 1900, III 1903, IV 1912, V 1914.

19 Olympiodorus: in Categorias, ed. A. Busse, CAG XII_1, Berlin 1902.

20 Pappus: Collectionis quae supersunt e libris manu scriptis edidit latina interpretatione et commentariis instruxit Fr. Hultsch, Berlin I 1876, II 1877, III 1878 (die Seitenzählung geht durch alle drei Bände).

21 Pappus: The commentary of Pappus on Book X of Euclid's Elements, edd. G. Junge and W. Thomson, Cambridge (Massachusetts, U.S.A.) 1930.

22 Philon von Byzanz: Belopoiica (siehe 16).

23 Philoponus: in Categorias, ed. A. Busse, CAG $XIII_1$, Berlin 1898.

24 Philoponus: in Analytica priora, ed. M. Wallies, CAG $XIII_2$, Berlin 1905.

25 Philoponus: in Analytica posteriora, ed. M. Wallies, CAG $XIII_3$, Berlin 1909.

25a Philoponus: in De anima, ed. M. Hayduck, CAG XV, Berlin 1897.

26 Plotin: Liber de pulchritudine, ed. Fr. Creuzer, accedunt anecdota graeca, Heidelberg 1814.

27 Plutarch: Moralia, ed. G. Bernardakis, Leipzig I—VII 1887—1896; unvollendete Neubearbeitung von Hubert, Nachstädt, Paton, Pohlenz, Sieveking, Titchener und Wegehaupt, Leipzig 1925—?.

28 Plutarch: Vitae parallelae, ed. K. Sintenis, Leipzig I—V 1881—1891; unvollendete Neubearbeitung von Lindskog und Ziegler, Leipzig 1914—?.

29 Porphyrius: in Categorias, ed. A. Busse, CAG IV_1, Berlin 1897.

30 Proclus: in primum Euclidis Elementorum librum commentarii ex regognitione Godofredi Friedlein, Leipzig 1873.

31 Proclus: (Platonis Parmenides, accedunt Procli) in Parmenidem commentarii cura G. Stallbaum, Leipzig 1839.

32 Proclus: in Platonis Timaeum, ed. Diehl, Leipzig I—III 1903—1906.

33 Proclus: Institutio physica, ed. Ritzenfeld, Leipzig 1912.

34 Ptolemaeus: Syntaxis mathematica, ed. J. L. Heiberg, Leipzig I 1898, II 1903.

35 Rudio, Ferdinand: Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippocrates, Leipzig 1907 (Sonderausgabe der Stelle 38, 54:12—69:49).

36 Serenus von Antinoe: Opuscula, ed. J. L. Heiberg, Leipzig 1896.

37 Simplicius: in Categorias, ed. K. Kalbfleisch, CAG VIII, Berlin 1907.

38 Simplicius: in Physicam, ed. H. Diels, CAG IX, Berlin 1882 und CAG X, Berlin 1895.

39 Theodosius Tripolites: Sphaerica, ed. J. L. Heiberg, Abh. Ges. Wiss. Gött., phil.-hist. Kl. (2) 19 (1927) Heft 3, Berlin 1927.

40 Theon von Smyrna: Expositio rerum mathematicarum ad legendum Platonem utilium, ed. E. Hiller, Leipzig 1878.

41 Tzetzes, Johannes: Chiliades, ed. Theophilus Kießling, Leipzig 1826.

42 Vitruvius: de Architectura libri decem, edd. V. Rose et H. Müller-Strubing, Leipzig 1867 (die Ausgabe von F. Krohn, Leipzig 1912, gibt im Texte auch, im Index nur, die Seitenzahlen von Rose an).

43 Vorsokratiker, Fragmente der, ed. H. Diels, dritte Auflage des ersten Bandes, Berlin 1912.

B. Schriften zur Geschichte der Mathematik.

44 Arneth, Arthur: Die Geschichte der reinen Mathematik in ihrer Beziehung zur Geschichte der Entwicklung des menschlichen Geistes. Aus der „Neuen Enzyklopädie für Wissenschaften und Künste“ besonders abgedruckt, Stuttgart 1852.

45 Ball, Walter William Rouse: A short account of the history of mathematics, London 1888.

46 Bossut, Charles: Essai sur l'histoire générale des mathématiques, Paris 1802.

47 Bretschneider, Karl Anton: Die Geometrie und die Geometer vor Euklid, ein historischer Versuch, Leipzig 1870.

48 Butcher, S. H.: The geometrical problem of the Meno 86 e—87 a. Journal of Philology 17 (1888) 219—225.

49 Cantor, Moritz: [Besprechung von Hankel (33) in] Zeitschrift für Mathematik und Physik, historisch-literarische Abteilung 20 (1875) 33 (nicht 133).

50 Cantor, Moritz: Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik, Band I, Auflage 3, Leipzig 1907 (Auflage 4 als anastatischer Neudruck, Leipzig 1922).

51 Cook-Wilson, J.: On the geometrical problem in Plato's Meno 86 e, with a note on a passage in the treatise „de lineis insecabilibus" 970 a 5. Journal of Philology 28 (1903) 222—240.

52 Dijksterhuis, E. J.: De elementen van Euclides. Deel I, de ontwikkeling der grieksche wiskunde voor Euclides en Boek I der Elementen, Groningen 1929.

53 Enriques, Federigo und Santillana, G. de: Storia del pensiero scientifico, Mailand und Rom, I 1932.

54 Gow, James: A short history of Greek mathematics, Cambridge (England) 1884.

55 Guldberg, A. S.: Om Cirkelens Kvadratur. Fra Videnskabens Verder, Raekke 2, Nummer 2, Kopenhagen 1873.

56 Günther, Siegmund: Antike Näherungsmethoden im Lichte der modernen Mathematik. Abh. Kgl. Böhm. Ges. Wiss., math.-naturw. Kl., (6) 9 (1878) Nummer 4, Prag 1878.

57 Günther, Siegmund: (Besprechung von A. Sturms „Das delische Problem" in) Blätter für das Gymnasial-Schulwesen, herausgegeben vom Bayrischen Gymnasiallehrerverein, München 33 (1897) 484.

58 Günther, Siegmund: Geschichte der Mathematik. Teil I: von den ältesten Zeiten bis Cartesius, Sammlung Schubert XVIII, Leipzig 1908.

59 Hankel, Hermann: Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und im Mittelalter, Leipzig 1874.

60 Heath, Sir Thomas Little: The thirteen books of Euclid's Elements, Cambridge (England) I—III 1908.

61 Heath, Sir Thomas Little: A history of Greek mathematics, Oxford I—II 1921.

62 Heiberg, Johan Ludvig: Über eine Stelle des Pappus. Zeitschrift für Mathematik und Physik, historisch-literarische Abteilung 23 (1878) 117—120.

63 Heiberg, Johan Ludvig: Jahresbericht über griechische und römische Mathematik. Philologus 43 (1884) 321—346 und 467—522.

64 Heiberg, Johan Ludvig: Mathematisches zu Aristoteles. Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften 18 (1904) 1—49, und: Leipzig 1904.

65 Horsley, Samuel: Apollonii Pergaei Inclinationum libri duo. Restituebat Samuel Horsley, Oxford 1770.

66 Loria, Gino: Le scienze esatte nell' antica Grecia, Mailand 1914.

67 Mollweide, Karl Brandan: Commentationes mathematico-philologicae tres, Leipzig 1813 (zu beachten sind die Addenda, SS. 115—122).

68 Montucla, Jean Etienne: Histoire des mathématiques, Paris I—II 1758 (später von Lalande erweitert, Paris I—IV 1799—1802; nach beiden Auflagen angeführt).

69 Poppe, Johann Heinrich Moritz: Geschichte der Mathematik von den ältesten bis auf die neue Zeit, Tübingen 1828.

70 Prym, Friedrich: Über die Entwicklung der griechischen Mathematik bis zu ihrem Höhepunkt. Rektoratsrede zu Würzburg am 11. V. 1898, Würzburg 1898.

71 Reimer, Nikolaus Theodor: Historia problematis de cubi duplicatione seu de inveniendis duabus mediis continue proportionalibus inter duas datas, Göttingen 1798.

72 Reimer, Nikolaus Theodor: Versuch einer Geschichte der Mathematik. Aus dem Französischen (d. h., von Bossut 46) übersetzt und mit Anmerkungen und Zusätzen versehen, Hamburg 1804.

73 Rudio, Ferdinand: Archimedes, Huyghens, Lambert, Legendre. Geschichte des Problems von der Quadratur des Zirkels von den ältesten Zeiten bis auf unsere Tage, Leipzig 1892.

74 Rudio, Ferdinand: Zur Rehabilitation des Simplicius, Bibliotheca Mathematica (3) 4 (1903) 13—18.

75 Rudio, Ferdinand: Die angebliche Kreisquadratur bei Aristophanes. Bibliotheca Mathematica (3) 8 (1907) 13—22.

76 Schmidt, Max C. P.: Altphilologische Beiträge, Heft 2: Terminologische Studien, Leipzig 1905.

77 Tannery, Paul: Sur une critique ancienne d'une démonstration d'Archimède. Mémoires de la Société Scientifique de Bordeaux (2) 5 (1883) 49—61 = *Mémoires* I, Nummer 23, Seite 300—316.

78 Tannery, Paul: Simplicius et la quadrature du cercle. Bibliotheca Mathematica (3) 3 (1902) 342—349 = Mémoires III, Nummer 75, Seite 119—130.

79 Taylor, Thomas: The philosophical and mathematical commentaries of Proclus on the first book of Euclid's Elements, London I—II 1792.

80 Toeplitz, Otto: Der derzeitige Stand der Forschung in der Geschichte der griechischen Mathematik. Semester-Berichte zur Pflege des Zusammenhanges von Universität und Schule aus den mathematischen Seminaren von H. Behnke und O. Toeplitz 6 (W. S. 1934—1935) 4—18.

81 Tropfke, Johannes: Geschichte der Elementarmathematik in systematischer Darstellung mit besonderer Berücksichtigung der Fachwörter. Auflage 2, Leipzig I—VII 1921—1924; (die herangezogenen Bände sind in 3. Aufl. noch nicht erschienen).

82 Wieleitner, Heinrich und Hofmann, Josef E.: Zur Geschichte der quadrierbaren Kreismonde. Programm München (Neues Realgymnasium) 1933—1934.

83 Wilamowitz-Moellendorff, Ulrich von: Ein Weihgeschenk des Eratosthenes. Göttinger Nachrichten, hist.-phil. Klasse (1894) 15—35.

84 Wilamowitz-Moellendorff, Ulrich von: Platon, sein Leben und seine Werke, Auflage 2, Berlin I—II 1920.

85 Zeuthen, Hieronymus Georg: Keglesnitslæren i Oldtiden. Kopenhagen 1885 (deutsch unter Nummer **86**).

86 Zeuthen, H. G.: Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum. Deutsche Ausgabe, unter Mitwirkung des Verfassers besorgt von R. von Fischer-Benzon, Kopenhagen 1886 (dänisch unter Nummer **85**; der Text ist stellenweise geändert).

87 Zeuthen, H. G.: Om Konstruktionen som Existensbevis i den græske Matematik. Nyt Tidsskrift for Matematik 3 A (1892) 105—113 (deutsch unter Nummer **90**).

88 Zeuthen, H. G.: Forelæsning over Matematikens Historie: Oldtid og Middelalder, Kopenhagen 1893 (deutsch unter Nummer **91**).

89 Zeuthen, H. G.: M. Maurice Cantor et la géométrie supérieure de l'antiquité. Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques (1) 29 = (2) 18 (1894) 163—169.

90 Zeuthen, H. G.: Die geometrische Konstruktion als „Existenzbeweis" in der antiken Geometrie. Mathematische Annalen 47 (1896) 222—228 (dänisch unter Nummer 87).

91 Zeuthen, H. G.: Geschichte der Mathematik im Altertum und im Mittelalter, Kopenhagen 1896 (dänisch unter Nummer 88).

92 Zeuthen, H. G.: Geometriske Synsmaader før Platon. Nyt Tidsskrift for Matematik 24 A (1913) 105—124.

93 Zeuthen, H. G.: Notes sur l'histoire des mathématiques, IX: Sur les connaissances géométriques des Grecs avant la réforme Platonicienne. Oversigt over det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger (1913) 431—473.

C. Schriften rein mathematischen Inhaltes.

94 Clausen, Thomas: Vier neue mondförmige Flächen, deren Inhalt quadrierbar ist. Crelle 21 (1840) 375—376.

95 des Cartes, René: Géométrie (in: Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences, Leiden 1637; Oeuvres, edd. Adam-Tannery, Band VI, Paris 1903).

96 Dirichlet, Peter Gustav Lejeune: Gesammelte Werke, herausgegeben auf Veranlassung der Preußischen Akademie der Wissenschaften von Leopold Kronecker, fortgesetzt von Lazarus Fuchs, Berlin I 1889, II 1897.

97 Enriques, Federigo: Probleme der Wissenschaft, erster Teil: Wirklichkeit und Logik, Leipzig 1910.

98 Euler, Leonhard: (in P. H. Fuß: Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du dix-huitième siècle, St. Petersburg 1843).

99 Euler, Leonhard: Considerationes cyclometricae. Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae 16 (1772 für 1771) 160—170.

100 Glaisher, James Whitbred Lee: (Besprechung von Pendlebury **111** in) Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 5 (1873) 244.

101 Hack, Franz: Beiträge zur Anwendung der Gruppentheorie auf kubische und biquadratische Gleichungen. Dissertation Tübingen 1895.

102 Hayashi, Tsuruichi: On the extension of a theorem of Pappus. Journal of the mathematical and physical school of Tōkyō 10 (1900) 1—4.

103 Hayashi, Tsuruichi: [dasselbe, wiedergegeben in: Mikami, Yoshio, Mathematical papers from the Far East. Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften 28 (1910) 136—138].

104 Hutton, Charles: Recreations in mathematics and natural philosophy, London I—IV 1814.

105 Klein, Felix: Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, Erlangen 1872; das „Erlanger Programm", abgedruckt in den Mathematischen Annalen 43 (1893) 63—100 und in den Gesammelten mathematischen Abhandlungen I (1921) 460—497.

106 Klein, Felix: Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grad, Leipzig 1884.

107 Klein, Felix: Vorlesungen über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie, ausgearbeitet von F. Tägert, Leipzig 1895.

108 Klein, Felix: Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus. Dritter Band: Präzisions- und Approximationsmathematik, ausgearbeitet von C. H. Müller, für den Druck fertiggemacht und mit Zusätzen versehen von Fr. Seyfarth, Berlin 1928.

109 Landau, Edmund: Über quadrierbare Kreisbogenzweiecke. Sitzungsb. d. Berl. Math. Ges. 2 (1902) 1—6 = Beigabe zum Arch. f. Math. u. Phys. (3) 4 (1903) 1—6.

110 Moebius, August Ferdinand: Die Theorie der Kreisverwandtschaften in rein geometrischer Darstellung. Abh. Sächs. Ges. Wiss., math.-phys. Klasse 2 (1855) 529—595 = Werke II (1886) 243—314.

111 Pendlebury, R.: On a method of finding two mean proportionals. Messenger of Mathematics (2) 2 (1873) 166—169.

112 Rabuel, Claude: Commentaires sur la Géométrie de M. des Cartes, Lyon 1730.

113 Seidelmann, Fritz: Die Gesamtheit der kubischen und biquadratischen Gleichungen mit Affekt bei beliebigem Rationalitätsbereich. Dissertation Erlangen 1916; davon ein Auszug in den Mathem. Annalen 78 (1918) 230—233.

114 Tschebotaröw, Nikolaj: Über quadrierbare Kreisbogenzweiecke I. Mathematische Zeitschrift 39 (1935) 161—175 (eingegangen am 20. II. 1933, noch nicht vollständig erschienen).

115 Vahlen, Karl Theodor: Konstruktionen und Approximationen in systematischer Darstellung, eine Ergänzung der niederen und eine Vorstufe zur höheren Geometrie. Leipzig 1911.

116 Wijnquist, Daniel: Dissertatio gradualis lunulas quasdam quadrabiles exhibens, quam praeside Martino Johanne Wallenio[1]) publico examini submittit Daniel Wijnquist Wiburgensis. Aboae impressit Chr. Frenkell 1766.

117 Witting, Alexander: Die mathematischen Wissenschaften. Teil 2, Abschnitt II, § 2 des Sammelwerkes: „Schaffen und Schauen, ein Führer ins Leben", gewidmet von der Firma B. G. Teubner in Leipzig aus Anlaß ihres hundertjährigen Bestehens, Leipzig und Berlin, I^2 1911, II 1909.

118 Wittstein, Th.: Drei Vorlesungen zur Einleitung in die Differential- und Integralrechnung, gehalten zur Eröffnung der Wintervorlesungen 1850—1851, Hannover 1851.

[1]) Die Promotionsschriften wurden damals in den schwedischen Landen durchgängig vom Prüfungsvorsitzenden verfaßt und dienten dem Doktoranden nur als Unterlage für die öffentliche Verteidigung; vergleiche eine Antwort von V. Bäcklund an F. Klein (**106**, 143, Anmerkung).